**Hrvatsko matematičko društvo**

# HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

**prvo kolo – subota, 23. svibnja 2026.**

## Rješenja zadataka za grupu A (4. razred)

### 1. Humanitarci

Učenici 4.b skupljali su novac za humanitarnu akciju. Prikupljeni iznos predali su svom razredniku. Razrednik je na taj iznos dodao još toliko novca i još 20 €, pa je sve zajedno predao ravnatelju škole. Ravnatelj je na primljeni iznos dodao još toliko novca i još 30 €, pa je sav novac proslijedio gradonačelniku. Na kraju je gradonačelnik na iznos koji je dobio dodao još toliko novca i još 40 €. Tako je ukupno prikupljeno 1828 €. Koliko su eura prikupili učenici 4.b?

***Rezultat:*** 206

**Rješenje.**

Za humanitarnu akciju je prikupljeno 1828 €. Prije nego što je gradonačelnik dodao 40 €, svotu novaca koju je dobio od ravnatelja je udvostručio, što znači da je od ravnatelja dobio:

$$(1828\ € - 40\ €) : 2 = 1788\ € : 2 = 894\ €.$$

Na isti način izračunamo koliko je novaca dobio ravnatelj od razrednika.

$$(894\ € - 30\ €) : 2 = 864\ € : 2 = 432\ €.$$

Na kraju izračunamo koliko su novaca prikupili učenici 4.b.

$$(432\ € - 20\ €) : 2 = 412\ € : 2 = 206\ €.$$

Učenici 4.b prikupili su 206 €.

### 2. Zamišljeni broj

Mirta je zamislila troznamenkasti broj čiji je zbroj znamenaka 17, a znamenka desetica 9. Broj zapisan istim znamenkama kao zamišljeni broj, ali u obrnutom poretku veći je od dvostrukog zamišljenog broja za 100. Koji je broj zamislila Mirta?

***Rezultat:*** 296

**Rješenje.**

Znamo da je znamenka desetica 9 i da je zbroj svih znamenaka 17 pa je zbroj znamenaka stotice i jedinice jednak 8. Dakle, Mirta je zamislila jedan od brojeva 197, 296, 395, 494, 593, 692, 791 i 890.

Uočimo da je dvostruki zamišljeni broj uvećan za 100 sigurno paran broj. Broj koji je Mirta zamislila je paran, tj. jedan od brojeva 296, 494, 692 i 890.

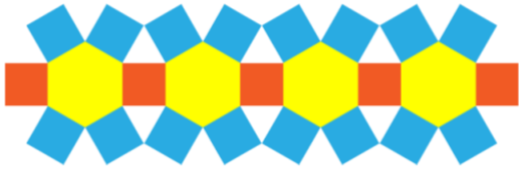
Ako je zamišljeni broj 296, dvostruki taj broj uvećan za 100 je 692, a to je upravo broj zapisan istim znamenkama kao zamišljeni broj u suprotnom poretku. Našli smo jedno moguće rješenje.

Ako je zamišljeni broj veći od 450, dvostruki broj uvećan za 100 veći je od $2 \cdot 450 + 100 = 1000$, pa ne može biti jednak broju zapisanom istim znamenkama u suprotnom poretku koji je troznamenkast.

To znači da drugih rješenja nema. Mirta je zamislila broj 296.

## 3. Cvjetovi

Nika je nacrtala šesterokut i nad svakom njegovom stranicom po jedan kvadrat. Dobiveni lik nazvala je cvijet, a kvadrate njegovim laticama. Dvije nasuprotne latice je obojila crvenom bojom. Nakon toga je s desne strane tog cvijeta docrtala još jedan takav cvijet tako da im je jedna crvena latica zajednička. Nastavila je nizati cvijet po cvijet uvijek na isti način, tj. tako da uz posljednji cvijet u nizu s desne strane docrta još jedan takav cvijet tako da im je jedna crvena latica zajednička. Na slici je prikazan tako nastali niz od četiri cvijeta.



Koliko ima šesterokuta u nizu cvjetova koji ima 2026 latica?

***Rezultat:*** 405

**Rješenje.**

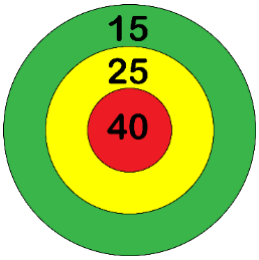
U jednom su cvijetu jedan šesterokut i šest latica, a u dva spojena cvijeta su dva šesterokuta i 11 latica. Dodavanjem svakog dodatnog cvijeta dodajemo po jedan šesterokut i pet dodatnih latica.

Broj šesterokuta jednak je broju cvjetova, a broj latica jednak je peterostrukom broju šesterokuta uvećanom za 1.

Ako je ukupan broj latica 2026, onda je broj šesterokuta jednak $2025 : 5 = 405$.

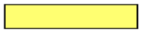
## 4. Meta

Meta se sastoji od tri dijela, kao na slici. Pogodak u zeleni dio mete nosi 15 bodova, pogodak u žuti dio 25 bodova, a pogodak u crveni dio 40 bodova. Srećka je pogodila metu s ukupno 12 strelica. Crveni dio pogodila je s tri puta više strelica nego zeleni dio. Crveni i zeleni dio zajedno pogodila je s dvostruko više strelica nego žuti dio. Koliko je bodova Srećka ostvarila?




***Rezultat:*** 370

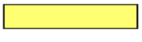
**Rješenje.**

Prikažimo broj pogodaka u žuti dio mete: .

Broj pogodaka u druge dijelove mete je dvostruko veći: .

Srećka je pogodila metu s ukupno 12 pogodaka, što možemo prikazati ovako:

.

Zato  predstavlja 4 pogotka, a  8 pogodaka.

U žuti dio Srećka je pogodila četiri puta, a u druge dijelove mete osam puta.

Odredimo koliko je pogodaka u zeleni, a koliko u crveni dio.

Označimo broj pogodaka u zeleni dio: .

Broj pogodaka u crveni dio je triput veći: .

Ukupan broj pogodaka u zeleni i crveni dio je 8:

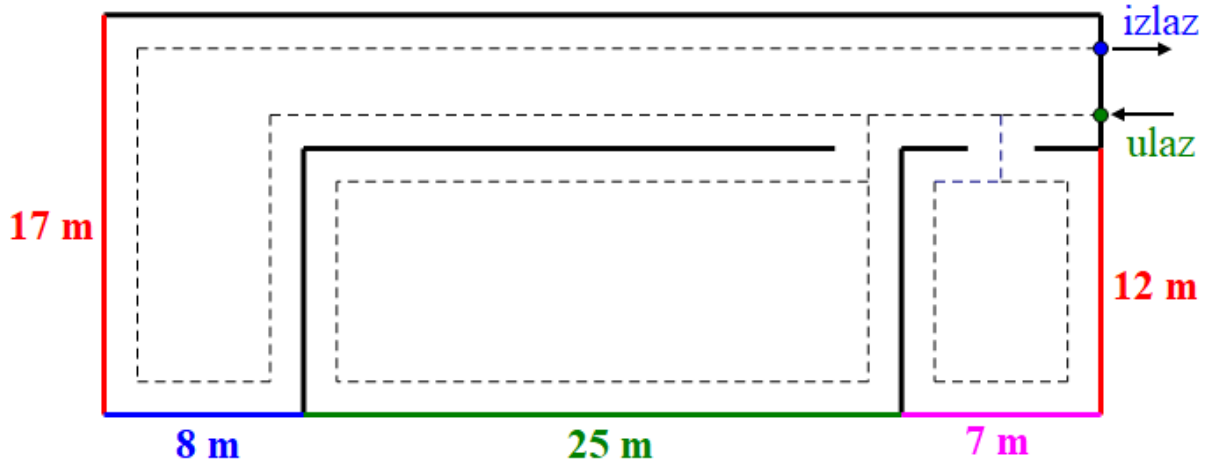


pa  predstavlja 2, a  6.

Srećka je sa šest strelica pogodila crveni dio mete, s četiri strelice žuti dio i sa dvije strelice zeleni dio. Ukupan broj ostvarenih bodova je $6 \cdot 40 + 4 \cdot 25 + 2 \cdot 15 = 370$.

## 5. Umjetnička galerija

Slava je razgledala izložbu u umjetničkoj galeriji čiji je tlocrt prikazan na slici. Označene su neke od dimenzija prostorija u galeriji. Svi su zidovi međusobno okomiti ili usporedni. Kretanje galerijom dozvoljeno je isključivo po označenim crtkanim linijama koje su usporedne sa zidovima i od njih odmaknute 1 m.

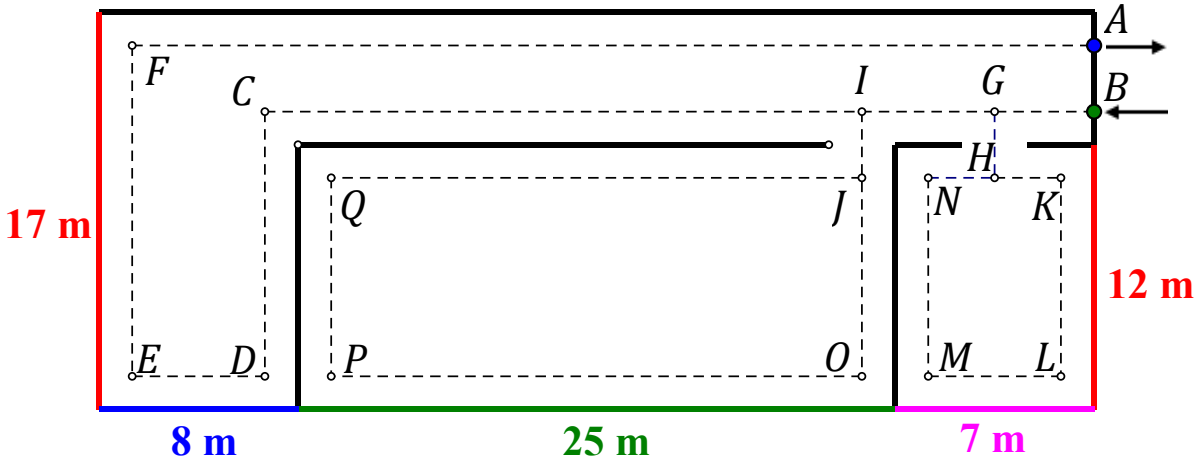



Slava je obišla sve dijelove galerije najkraćim dozvoljenim putem. Koliko je koraka Slava napravila ako je duljina njenog koraka 50 cm?

***Rezultat:*** 418

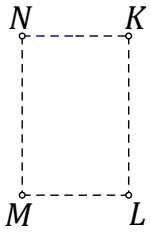
**Rješenje.**

Označimo točke u kojima se mijenja smjer kretanja kao na slici te odredimo ukupni prijeđeni put.



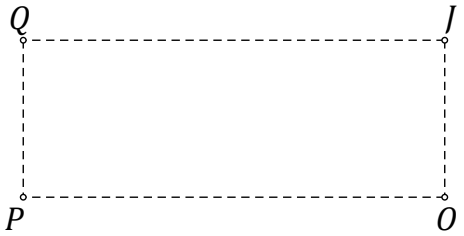

Razdvojit ćemo prijeđeni put na nekoliko dijelova.

Obilazeći prvu prostoriju, Slava je prešla opseg pravokutnika $KLMN$.

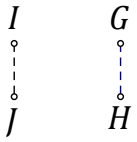



Duljine dužina $\overline{KL}$ i $\overline{MN}$ su $12-2=10$ m, a duljine dužina $\overline{LM}$ i $\overline{NK}$ su $7-2=5$ m. Opseg tog pravokutnika iznosi $2\cdot(10+5)=$ **30 m**.

Slično računamo i opseg pravokutnika $JOPQ$. Duljine dužina $\overline{PO}$ i $\overline{QJ}$ su $25-2=23$ m, a duljine dužina $\overline{PQ}$ i $\overline{OJ}$ su $12-2=10$ m.

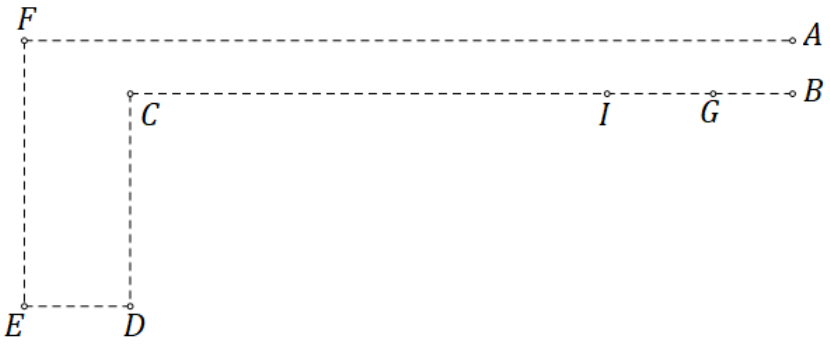



Opseg ovog pravokutnika je $2\cdot(23+10)=$ **66 m**.




Ulazeći i izlazeći iz tih prostorija dvaput je prošla između točaka $G$ i $H$, odnosno $I$ i $J$. Duljine dužina $\overline{JI}$ i $\overline{HG}$ su $1+1=2$ m, pa je Slava po tim dijelovima hodala ukupno $2\cdot(2+2)=$ **8 m**.

Ukupna duljina dužina $\overline{BG}$, $\overline{GI}$ i $\overline{IC}$ jednaka je duljini dužine $\overline{BC}$ koja iznosi $7+25+1=33$ m.




Obilazak ostatka galerije sastoji se od dužina $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ i $\overline{FA}$. Lako vidimo da je $|CD|=12-1+1=12$ m, $|DE|=8-2=6$ m, $|EF|=17-2=15$ m i $|FA|=8-1+25+7=39$ m.

Ukupna duljina puta $B-C-D-E-F-A$ iznosi $33+12+6+15+39=$ **105 m**.

Obilazeći galeriju, Slava je prešla ukupno $30+66+8+105=$ **209 m**. Duljina njenog koraka je 50 cm, pa joj za svaki metar trebaju dva koraka. Slava je ukupno napravila $2\cdot 209=$ **418** koraka.

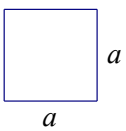
## 6. 300 kocki

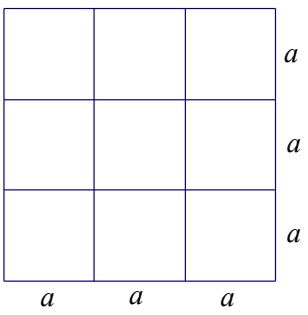
Marko može jednom punom bočicom boje obojiti četiri jednake drvene kocke. Koliko je bočica boje potrebno da se na isti način oboji 300 kocaka čiji su bridovi trostruko dulji od bridova Markovih kocaka?

***Rezultat:*** 675

**Rješenje.**

Svaka strana kocke je kvadrat.
Jedna strana kocke trostruko duljeg brida može se rastaviti na devet manjih kvadrata jednakih stranama Markove kocke. Zato je i ukupna površina veće kocke devet puta veća od površine Markove kocke.




Znači, za veće kocke potrebno je devet puta više boje nego za Markove.

Marko za četiri kocke treba jednu punu bočicu boje, a za četiri veće kocke potrebno je devet punih bočica boje. Kako je $300:4=75$, za 300 kocaka potrebno je 75 puta više boje nego za 4 kocke. Za bojanje 300 većih kocaka potrebno je $75\cdot 9=675$ bočica boje.

## 7. Voće

Voćar treba poslati 44 kg jagoda, 68 kg trešanja, 71 kg marelica i 96 kg jabuka. Cjenik slanja paketa prikazan je u tablici:

| vrsta paketa | najveća masa | cijena |
|---|---|---|
| mali paket | 6 kg | 7 € |
| srednji paket | 10 kg | 10 € |
| veliki paket | 20 kg | 18 € |

U svakom paketu može biti samo jedna vrsta voća, a jagode se ne smiju pakirati u velike pakete. Koliko je najmanje eura potrebno za slanje svog navedenog voća?

***Rezultat:*** 268

**Rješenje.** Za 44 kg jagoda smiju se koristiti samo srednji i mali paketi.
Ako se koriste samo srednji paketi, potrebno ih je pet pa je cijena $5 \cdot 10 = 50$ €.
Ako se koriste četiri srednja paketa, u njih stane 40 kg, te je potrebno upotrijebiti još jedan mali paket. Ukupna cijena će biti $4 \cdot 10 + 7 = 47$ €.
Ako se koriste tri srednja paketa, u njih stane 30 kg, te bi trebalo upotrijebiti još tri mala paketa, a cijena bi bila $3 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 51$ €.
Za slanje 44 kg jagoda potrebno je najmanje **47 €**.

Prije nego što razmotrimo pakiranje ostalih vrsta voća, uočimo sljedeće:

- U tri mala paketa stane 18 kg, a cijena je 21 €. Umjesto toga možemo upotrijebiti samo jedan veliki paket po cijeni od 18 €.
- U dva srednja paketa stane 20 kg, a cijena je 20 €. Umjesto toga možemo upotrijebiti samo jedan veliki paket po cijeni od 18 €.

Ovo znači da u najpovoljnijem rasporedu neće biti više od jednog srednjeg niti više od dva mala paketa. U jedan srednji i dva mala paketa stane najviše $10 + 2 \cdot 6 = 22$ kg. Za količine veće od 22 kg povoljnije je upotrijebiti barem jedan veliki paket.

Odredimo cijenu slanja 68 kg trešanja.
Ako se koriste samo veliki paketi, potrebna su četiri, ali to sigurno nije najpovoljnije, jer ako se upotrijebe tri velika paketa, preostalih 8 kg možemo smjestiti u jedan srednji paket (to je povoljnije od dva mala paketa). Cijena je tada $3 \cdot 18 + 10 = 64$ €.
Ako se koriste samo dva velika paketa, preostaje 28 kg, što je više od 22 kg, pa je bolje upotrijebiti jedan veliki paket više. Za slanje 68 kg trešanja potrebno je najmanje **64 €**.

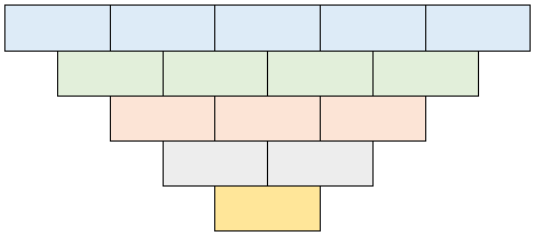
Odredimo cijenu slanja 71 kg marelica.
Ako se koriste samo veliki paketi, potrebna su četiri, a cijena je $4 \cdot 18 = 72$ €.
Ako se upotrijebe tri velika paketa, preostalih 11 kg možemo smjestiti u dva mala paketa (druge kombinacije su sigurno skuplje), pa je cijena $3 \cdot 18 + 2 \cdot 7 = 68$ €.
Ako se koriste samo dva velika paketa, preostalo bi 31 kg (više od 22 kg).
Za slanje 71 kg marelica potrebno je najmanje **68 €**.

Odredimo cijenu slanja 96 kg jabuka.
Ako se koriste samo veliki paketi, potrebno ih je pet, a cijena je $5 \cdot 18 = 90$ €.
Ako se upotrijebe četiri velika paketa, preostalih 16 kg možemo smjestiti u dva srednja ili srednji i mali ili tri mala paketa. Najpovoljnija kombinacija za 16 kg su jedan srednji i jedan mali paket. Cijena za takvu kombinaciju je $4 \cdot 18 + 10 + 7 = 89$ €.
Ako se koriste samo tri velika paketa, preostaje 36 kg, pa to ne može biti najpovoljnije.
Za slanje 96 kg jabuka potrebno je najmanje **89 €.**

Najmanja cijena slanja voća iznosi $47 + 64 + 68 + 89 = 268$ €.

## 8. Najveći broj

U gornji redak lika na slici treba rasporediti brojeve 8, 9, 10, 11 i 12, po jedan broj u svaki pravokutnik. Zatim se redom popunjavaju ostali pravokutnici, redak po redak. U svaki se pravokutnik upisuje zbroj brojeva iz dvaju pravokutnika prethodnog retka koji su tom pravokutniku susjedni.



Koji je najveći mogući broj u pravokutniku u posljednjem retku?

***Rezultat:*** 173

**Rješenje.**

Označimo brojeve upisane u gornjem retku redom: ①, ②, ③, ④, ⑤. To su dakle, nekim redom, brojevi 8, 9, 10, 11 i 12.

| ① | ② | ③ | ④ | ⑤ |
|---|---|---|---|---|

U prvom polju drugog retka je zbroj brojeva ① i ②, u drugom polju je zbroj brojeva ② i ③, u trećem zbroj brojeva ③ i ④, a u četvrtom zbroj brojeva ④ i ⑤. Zbrojeve u drugom retku možemo prikazati grafički:

| ①② | ②③ | ③④ | ④⑤ |
|---|---|---|---|

Na sličan način, u trećem su retku zbrojevi ovih brojeva:

| ①②②③ | ②③③④ | ③④④⑤ |
|---|---|---|

u četvrtom:

| ①②②②<br>③③③④ | ②③③③<br>④④④⑤ |
|---|---|

a u petom retku, u polju na dnu lika, upisan je zbroj brojeva:

① ②②②② ③③③③③③ ④④④④ ⑤

Primijetimo da se brojevi ① i ⑤ pojavljuju samo jednom, brojevi ② i ④ po četiri puta, a broj ③ čak šest puta. U donjem polju lika bit će upisan broj

$$① + 4 \cdot ② + 6 \cdot ③ + 4 \cdot ④ + ⑤ = (① + ⑤) + 4 \cdot (② + ④) + 6 \cdot ③$$

Taj će zbroj biti najveći ako je ③ najveći broj, a brojevi ① i ⑤ dva najmanja broja.

Dakle, da bismo dobili najveći mogući broj u donjem polju, potrebno je u prvom retku u srednje (treće) polje upisati broj 12, u prvo i zadnje (peto) polje brojeve 8 i 9, a u preostala polja (drugo i četvrto) brojeve 10 i 11.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 10 | 12 | 11 | 9 |
| 8 | 11 | 12 | 10 | 9 |
| 9 | 10 | 12 | 11 | 8 |
| 9 | 11 | 12 | 10 | 8 |

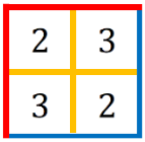
U svakom od ta četiri rasporeda, zbroj će biti isti:

$$(8 + 9) + 4 \cdot (10 + 11) + 6 \cdot 12 = 17 + 4 \cdot 21 + 6 \cdot 12 = 17 + 84 + 72 = 173.$$

## 9. Jedanaest boja

Na dvjema prozirnim folijama nacrtane su identične slike sastavljene od 11 paralelnih dužina različitih boja. Zrinka je položila te folije jednu na drugu tako da dužine na slikama budu okomite i tvore tablicu dimenzija $10 \times 10$. U svako polje te tablice Zrinka je upisala ukupan broj različitih boja na njegovom rubu. Koliki je zbroj svih 100 brojeva koje je Zrinka upisala?

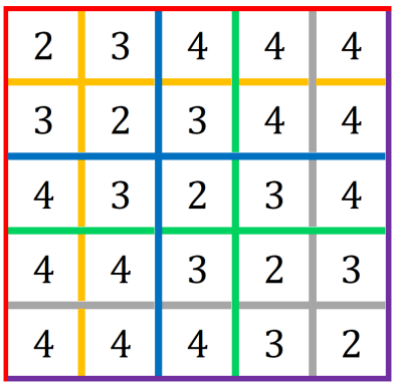
Na slici je tablica dimenzija $2 \times 2$ nastala na isti način koristeći tri različite boje.

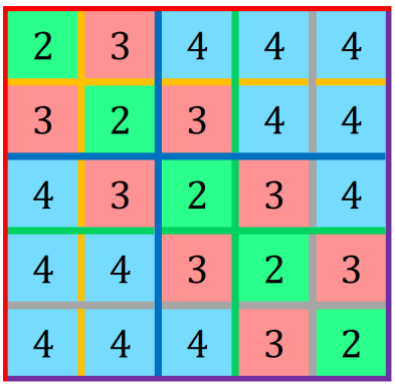



***Rezultat:*** 362

**Rješenje.**

Promotrimo tablicu dimenzija $5 \times 5$ nastalu koristeći šest različitih boja.




Obojimo li sva polja s istim brojem jednom bojom, kao na desnoj slici, možemo uočiti da je u svakom polju na dijagonali upisan broj 2, u njima susjednim poljima broj 3, a u svim ostalim poljima broj 4.

Objasnimo zašto je tako. Svako polje omeđeno je s četiri dužine. Najmanji broj koji može biti upisan u pojedino polje je 2, a najveći 4. Dvije dužine iste boje uvijek se sijeku na dijagonali. Zato polja na dijagonali (zelena polja) imaju vertikalne stranice obojane istim dvjema bojama kojima su obojane njihove horizontalne stranice. U svim poljima na dijagonali upisan je broj 2.

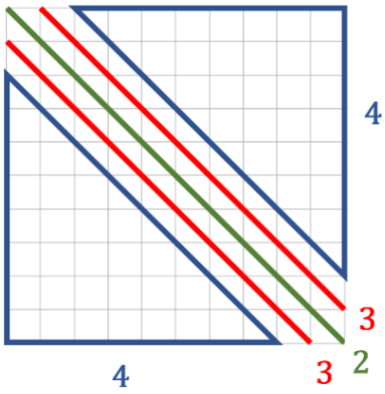
Polja koja su susjedna poljima na dijagonali (crvena polja) imaju po jedan vrh na dijagonali u kojem se sijeku istobojne dužine. Zato su rubovi takvih polja obojani s ukupno tri različite boje pa su u njima upisani brojevi 3. Sva ostala polja imaju četiri stranice različitih boja te su u njima upisani brojevi 4.

Isto vrijedi i za Zrinkinu tablicu dimenzija $10 \times 10$.

U deset zelenih polja na dijagonali, Zrinka je upisala broj 2.

U sva crvena polja, a ima ih $9 + 9 = 18$, Zrinka je upisala broj 3.

U sva plava polja Zrinka je upisala broj 4.




Takvih je polja

$$100 - (10 + 18) = 72.$$

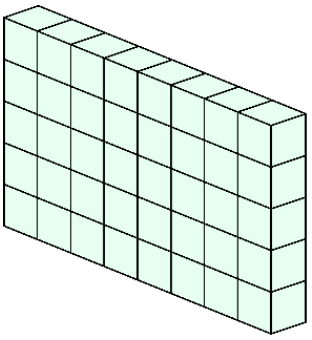
Ukupan zbroj svih upisanih brojeva je

$$10 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 72 \cdot 4 = 20 + 54 + 288 = 362.$$

***Napomena.***

Do rješenja možemo doći i tako da odredimo za koliko je zbroj brojeva manji od $4 \cdot 100 = 400$ (to bi bio zbroj da je u svakom polju upisan broj 4). U deset polja na dijagonali upisan je broj 2, pa treba oduzeti $10 \cdot 2$, a u 18 polja ispod i iznad dijagonale je upisan broj 3 pa treba oduzeti još $18 \cdot 1$. Zato je zbroj svih upisanih brojeva jednak $400 - 20 - 18 = 362$.

## 10. Spojene kockice



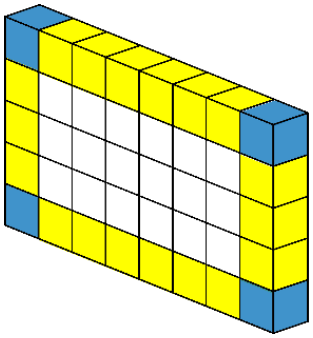
Na stranama igraće kockice nalaze se brojevi od 1 do 6. Nasuprot broja 1 je broj 6, nasuprot broja 2 nalazi se broj 5, a nasuprot broja 3 broj 4. Četrdeset takvih kockica raspoređeno je u pet redaka i osam stupaca te su susjedne kockice zalijepljene i tako je nastao kvadar. Koliki je najveći mogući zbroj svih brojeva na svim stranama tog kvadra?

***Rezultat:*** 432

**Rješenje.**

Primijetimo da je zbroj brojeva na bilo kojim dvjema suprotnim stranama igraće kockice 7.

Dvije najveće strane kvadra su pravokutnici veličine $8 \times 5$. Na svakoj od njih je 40 brojeva, a ukupan zbroj svih 80 brojeva jednak je $40 \cdot 7 = 280$.



Zbroj brojeva na ostalim stranama kvadra (rubovima) ovisi o tome kako su kockice okrenute.

Promotrimo kvadar na slici.
Plavo su označene četiri kockice u uglovima, a žuto $2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 18$ kockica.

Svakoj žutoj kockici vidljive su tri strane, od toga jedna na rubu. Sve takve kockice mogu biti okrenute tako da im je na rubu broj 6.

Svakoj plavoj kockici vidljive su ukupno četiri strane, od toga dvije na rubu. Takve kockice mogu biti okrenute tako da su im na rubu brojevi 5 i 6, a na prednjoj i zadnjoj strani brojevi 3 i 4 (tako da nisu vidljiva dva najmanja broja 1 i 2).

Najveći mogući zbroj brojeva na rubnim stranama kvadra je $18 \cdot 6 + 4 \cdot (6 + 5) = 152$.

Ukupan zbroj svih brojeva na svim stranama kvadra tada je $280 + 152 = 432$.

**Hrvatsko matematičko društvo**

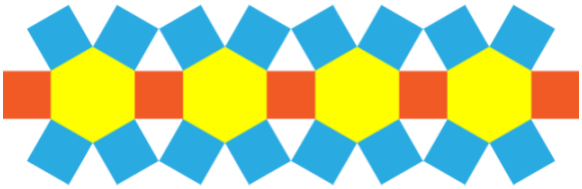
# HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

**prvo kolo – subota, 23. svibnja 2026.**

## Rješenja zadataka za grupu B (5. razred)

### 1. Cvjetovi

Nika je nacrtala šesterokut i nad svakom njegovom stranicom po jedan kvadrat. Dobiveni lik nazvala je cvijet, a kvadrate njegovim laticama. Dvije nasuprotne latice je obojila crvenom bojom. Nakon toga je s desne strane tog cvijeta docrtala još jedan takav cvijet tako da im je jedna crvena latica zajednička. Nastavila je nizati cvijet po cvijet uvijek na isti način, tj. tako da uz posljednji cvijet u nizu s desne strane docrta još jedan takav cvijet tako da im je jedna crvena latica zajednička. Na slici je prikazan tako nastali niz od četiri cvijeta.



Koliko ima šesterokuta u nizu cvjetova koji ima 2026 latica?

***Rezultat:*** 405

**Rješenje.**

U jednom je cvijetu jedan šesterokut i šest latica, a u dva spojena cvijeta su dva šesterokuta i 11 latica. Dodavanjem svakog dodatnog cvijeta dodajemo po jedan šesterokut i pet dodatnih latica.

Broj šesterokuta jednak je broju cvjetova, a broj latica jednak je peterostrukom broju šesterokuta uvećanom za 1.

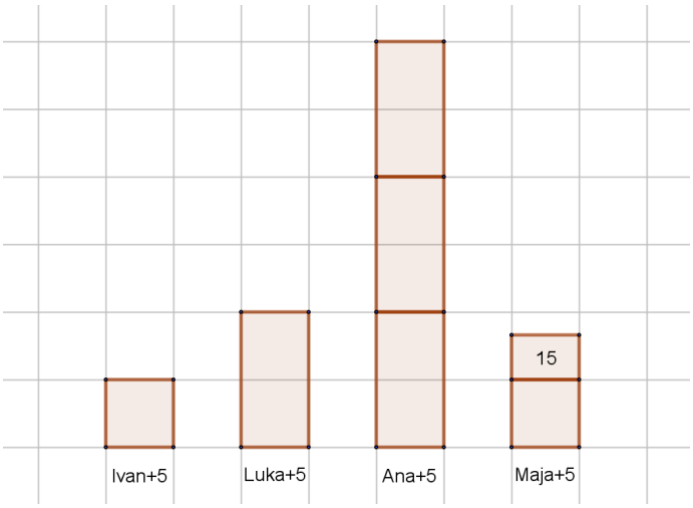
Ako je ukupan broj latica 2026, onda je broj šesterokuta jednak $2025 : 5 = 405$.

### 2. Lukina ušteđevina

Ana, Ivan, Luka i Maja imaju ukupno 2345 eura. Kad bi svatko od njih imao 5 eura više, Luka bi imao dvostruko više od Ivana, Ana bi imala trostruko više od Luke, a Maja bi imala 15 eura više od Ivana. Koliko eura ima Luka?

***Rezultat:*** 465

**Prvo rješenje.**
Prikažimo stupčastim dijagramom iznose eura koje bi redom imali Ana, Ivan, Luka i Maja kad bi svatko od njih imao po 5 eura više.




Uočimo da 2365 eura odgovara zbroju vrijednosti 10 kvadratića i još 15 eura.
Iz toga zaključujemo da jedan kvadratić predstavlja vrijednost od (2365 – 15) : 10 = 235 eura.
Stoga Luka ima 2 · 235 – 5 = 465 eura.

**Drugo rješenje.**
Označimo sa $L$, $A$, $I$, $M$ iznos eura koje redom imaju Luka, Ana, Ivan i Maja.
Njihov ukupni iznos je $L + A + I + M = 2345$.
Prema uvjetima zadatka vrijedi

$$L + 5 = 2 \cdot (I + 5)$$
$$A + 5 = 3 \cdot (L + 5)$$
$$M + 5 = (I + 5) + 15$$

Izrazimo iznos eura svakog od njih pomoću $I$:

$L + 5 = 2 \cdot (I + 5)$
$L + 5 = 2 \cdot I + 10$
$L = 2 \cdot I + 10 - 5$
$L = 2 \cdot I + 5$

$A + 5 = 3 \cdot (L + 5)$
$A + 5 = 3 \cdot L + 15$
$A = 3 \cdot L + 10$
$A = 3 \cdot (2 \cdot I + 5) + 10$
$A = 6 \cdot I + 15 + 10 = 6 \cdot I + 25$

$M + 5 = (I + 5) + 15$
$M = I + 15$

Odredimo zbroj iznosa eura svakog od njih izražen pomoću $I$:

$$A + I + L + M = (6 \cdot I + 25) + I + (2 \cdot I + 5) + (I + 15) = 10 \cdot I + 45$$

Kako oni imaju ukupno 2345 eura, treba vrijediti $10 \cdot I + 45 = 2345$.
Stoga je $10 \cdot I = 2345 - 45 = 2300$, a $I = 2300 : 10 = 230$.
Luka prema tome ima $L = 2 \cdot I + 5 = 2 \cdot 230 + 5 = 465$ eura.

**Treće rješenje.**
Označimo s A*, I*, L* i M* iznos eura koje bi redom imali Ana, Ivan, Luka i Maja kad bi svatko od njih imao po 5 eura više.
Tada bi oni ukupno imali 2345 + 4 · 5 = 2345 + 20 = 2365 eura, tj. vrijedilo bi:

$$A^* + I^* + L^* + M^* = 2365.$$

Kako vrijedi A* = 3 · L* i L* = 2 · I*, slijedi

$$A^* = 3 \cdot L^* = 3 \cdot 2 \cdot I^* = 6 \cdot I^*.$$

Budući da vrijedi i M* = I* + 15, možemo vrijednosti A*, L* i M* izražene pomoću I* uvrstiti u izraz A* + I* + L* + M* = 2365, pa dobivamo:

$$2 \cdot I^* + I^* + 6 \cdot I^* + I^* + 15 = 2365$$
$$10 \cdot I^* + 15 = 2365$$
$$10 \cdot I^* = 2365 - 15 = 2350$$
$$I^* = 2350 : 10 = 235$$

Slijedi L* = 2 · I* = 2 · 235 = 470.

Kako je L* iznos eura za 5 veći od stvarnog, Luka ima 470 – 5 = 465 eura.

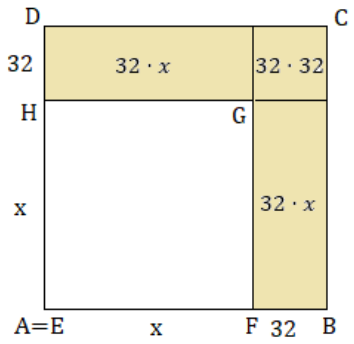
## 3. Dva kvadrata

Duljina stranice većeg i duljina stranice manjeg kvadrata razlikuju se za 32 cm, a površine tih dvaju kvadrata razlikuju se za 6528 cm$^2$. Kolika je, u centimetrima, duljina stranice većeg kvadrata?

***Rezultat:*** 118

**Rješenje.**

Neka je $ABCD$ veći, a $EFGH$ manji kvadrat. Nacrtajmo ih tako da je $A = E$ te da točka $F$ pripada dužini $\overline{AB}$, a točka $H$ dužini $\overline{AD}$. Neka je $|EF| = x$.




Površina kvadrata $ABCD$ veća je od površine kvadrata $EFGH$ za površinu dvaju pravokutnika kojima su duljine susjednih stranica $x$ i 32 cm, te za površinu kvadrata čija je stranica duljine 32 cm.

Vrijedi:

$$2 \cdot 32 \cdot x + 32 \cdot 32 = 6528$$

$$64x + 1024 = 6528$$
$$64x = 5504$$
$$x = 86$$

Dakle, duljina stranice kvadrata $EFGH$ je 86 cm, a stranica kvadrata $ABCD$ dulja je za 32 cm pa je njena duljina $86 + 32$, tj. 118 cm.

## 4. Dva svjetionika

Crveni svjetionik naizmjence svijetli 5 sekundi, pa 4 sekunde ne svijetli. Zeleni svjetionik naizmjence svijetli 4 sekunde, pa 2 sekunde ne svijetli. Točno u 19 sati oba su svjetionika započela svijetliti. Koliko je sekundi tijekom idućih 2026 sekundi svijetlio točno jedan svjetionik?

***Rezultat:*** 900

**Rješenje.**

Crveni svjetionik svijetli 5 sekundi, a ne svijetli 4 sekunde. To je ciklus od 9 sekundi.

Zeleni svjetionik svijetli 4 sekunde, a ne svijetli 2 sekunde. To je ciklus od 6 sekundi.

Unutar 18 sekundi crveni svjetionik ponovit će ciklus 2 puta jer je $9 \cdot 2 = 18$, a zeleni svjetionik ponovit će ciklus 3 puta jer je $6 \cdot 3 = 18$. To znači da se svakih 18 sekundi ponavljaju isti ciklusi.

Oba svjetionika započinju svoje cikluse u istom trenutku.

| sekunde | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| crveni svjetionik | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ | ✕ | ✕ | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ | ✕ | ✕ |
| zeleni svjetionik | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ |

✕ označava 1 sekundu u kojoj svjetionik ne svijetli

💡 označava 1 sekundu u kojoj svjetionik svijetli

Budući da trebamo odrediti koliko je sekundi svijetlio točno jedan svjetionik, tražimo one stupce u kojima se na jednom mjestu nalazi 💡, a na drugom ✕. Ima ih sveukupno 8 – to su 5., 7., 8., 9., 11., 12., 15. i 16. stupac. Dakle, tijekom svakih 18 sekundi, 8 je sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

Izračunajmo koliko je dugo tijekom 2026 sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

Kako je $2026 : 18 = 112$ i ostatak 10, 112 se puta ponavljaju ciklusi od 18 sekundi, a početnih 10 sekundi sljedećeg ciklusa još trebamo posebno razmotriti.

U 112 ciklusa je $112 \cdot 8 = 896$ sekundi svijetlio točno jedan svjetionik. U 10 sekundi od početka sljedećeg ciklusa imamo četiri stupca u kojima se nalazi jedan 💡 i jedan ✕.

Ukupno je $896 + 4 = 900$ sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

## 5. Umnožak

Ako je $\overline{ab} \cdot \overline{cb} = \overline{ddd}$, koliko je $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ?

***Rezultat:*** 378

**Rješenje.**

Broj $\overline{ddd} = d \cdot 111$, a $111 = 3 \cdot 37$, pa jedan od dvaju brojeva $\overline{ab}$ ili $\overline{cb}$ treba biti djeljiv s 37. Jedini dvoznamenkasti brojevi djeljivi s 37 su 37 i $2 \cdot 37 = 74$. Drugi faktor treba biti djeljiv s 3.

*Prvi slučaj.*

Neka je jedan od faktora $\overline{ab}$ i $\overline{cb}$ jednak 37. Drugi faktor treba biti dvoznamenkasti broj koji je djeljiv s 3, a znamenka jedinica mu je 7. Njihov umnožak treba biti oblika $\overline{ddd}$.

Ako je znamenka desetica 1, umnožak $37 \cdot 17$ nije djeljiv s 3.

Ako je znamenka desetica 2, dobivamo umnožak $37 \cdot 27 = 999$ koji je željenog oblika.

Ako je znamenka desetica veća od 2, umnožak bi bio veći od 999, što znači da ne bi bio troznamenkast broj pa za faktor 37 nema drugih rješenja.

*Drugi slučaj.*

Ako je jedan od faktora $\overline{ab}$ i $\overline{cb}$ jednak 74, drugom faktoru znamenka jedinica treba biti također 4, a njihov umnožak treba biti oblika $\overline{ddd}$.

Ako je znamenka jedinica 1, dobivamo umnožak $74 \cdot 14 = 1036$, što nije troznamenkast broj.

Ako bi znamenka jedinica drugog faktora bila veća od 1, umnožak bi bio veći od 1036.

Prema tome, jedine mogućnosti su $37 \cdot 27 = 27 \cdot 37 = 999$, što znači da je $d = 9$, $b = 7$, a znamenke $a$ i $c$ imaju vrijednost 3 i 2, pa je traženi umnožak $a \cdot b \cdot c \cdot d = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 = 378$.

## 6. Aritmetička sredina

Vedran je izračunao aritmetičku sredinu svih četveroznamenkastih brojeva koji se zapisuju pomoću znamenki 1, 4, 6 i 9 tako da se svaka znamenka koristi točno jedanput. Koliki je umnožak svih znamenki broja koji je Vedran izračunao?

***Rezultat:*** 625

**Prvo rješenje.**

Neka je $\overline{abcd}$ četveroznamenkasti broj. Za njegov zapis, prema uvjetu zadatka, koristimo različite znamenke iz skupa $\{1, 4, 6, 9\}$.

Znamenku $a$ možemo izabrati na 4 načina. Nakon što smo izabrali znamenku $a$, preostale su nam još tri slobodne znamenke pa znamenku $b$ možemo izabrati na 3 načina, znamenku $c$ na 2 načina, a znamenka $d$ je jedina preostala znamenka iz skupa $\{1, 4, 6, 9\}$.

Dakle, traženih četveroznamenkastih brojeva ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

U svim se tim brojevima svaka od znamenki 1, 4, 6 i 9 pojavljuje po 6 puta na mjestima znamenki tisućica, stotica, desetica i jedinica, pa vrijedi da je zbroj svih tih brojeva

$$(6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 9) \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 120 \cdot 1111.$$

Aritmetička sredina svih traženih brojeva je $120 \cdot 1111 : 24 = 5 \cdot 1111 = 5555$.

Umnožak svih znamenki te aritmetičke sredine je $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

**Drugo rješenje.**

Aritmetička sredina četveroznamenkastih brojeva, također je četveroznamenkasti broj.

U svim četveroznamenkastim brojevima napisanim znamenkama 1, 4, 6 i 9, svaka od tih znamenki pojavljuje se jednak broj puta na mjestu jedinica, desetica, stotica i tisućica. Stoga će aritmetička sredina biti broj čije su sve četiri znamenke jednake.

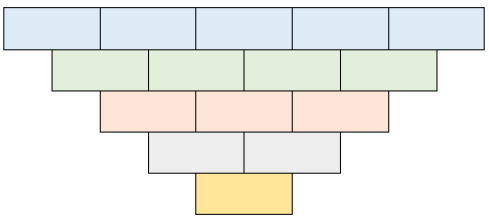
Ta znamenka će biti jednaka aritmetičkoj sredini brojeva 1, 4, 6, 9, što iznosi

$$(1 + 4 + 6 + 9) : 4 = 20 : 4 = 5.$$

Dakle, aritmetička sredina svih tih četveroznamenkastih brojeva je 5555, a umnožak njegovih znamenki iznosi $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

## 7. Najveći broj

U gornji redak lika na slici treba rasporediti brojeve 8, 9, 10, 11 i 12, po jedan broj u svaki pravokutnik. Zatim se redom popunjavaju ostali pravokutnici, redak po redak. U svaki se pravokutnik upisuje zbroj brojeva iz dvaju pravokutnika prethodnog retka koji su tom pravokutniku susjedni. Koji je najveći mogući broj u pravokutniku u posljednjem retku?



***Rezultat:*** 173

**Rješenje.**

Označimo brojeve upisane u gornjem retku redom: ①, ②, ③, ④, ⑤. To su dakle, nekim redom, brojevi 8, 9, 10, 11 i 12.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ① | ② | ③ | ④ | ⑤ |

U prvom polju drugog retka je zbroj brojeva ① i ②, u drugom polju je zbroj brojeva ② i ③, u trećem zbroj brojeva ③ i ④, a u četvrtom zbroj brojeva ④ i ⑤. Zbrojeve u drugom retku možemo prikazati grafički:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ①② | ②③ | ③④ | ④⑤ |

Na sličan način, u trećem su retku zbrojevi ovih brojeva:

| | | |
|---|---|---|
| ①②②③ | ②③③④ | ③④④⑤ |

u četvrtom:

| | |
|---|---|
| ①②②②<br>③③③④ | ②③③③<br>④④④⑤ |

a u petom retku, u polju na dnu lika, upisan je zbroj brojeva:

① ②②②② ③③③③③③ ④④④④ ⑤

Primijetimo da se brojevi ① i ⑤ pojavljuju samo jednom, brojevi ② i ④ po četiri puta, a broj ③ čak šest puta. U donjem polju lika bit će upisan broj

$$① + 4 \cdot ② + 6 \cdot ③ + 4 \cdot ④ + ⑤ = (① + ⑤) + 4 \cdot (② + ④) + 6 \cdot ③$$

Taj će zbroj biti najveći ako je ③ najveći broj, a brojevi ① i ⑤ dva najmanja broja.

Dakle, da bismo dobili najveći mogući broj u donjem polju, potrebno je u prvom retku u srednje (treće) polje upisati broj 12, u prvo i zadnje (peto) polje brojeve 8 i 9, a u preostala polja (drugo i četvrto) brojeve 10 i 11.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 10 | 12 | 11 | 9 |
| 8 | 11 | 12 | 10 | 9 |
| 9 | 10 | 12 | 11 | 8 |
| 9 | 11 | 12 | 10 | 8 |

U svakom od ta četiri rasporeda, zbroj će biti isti:

$$(8 + 9) + 4 \cdot (10 + 11) + 6 \cdot 12 = 17 + 4 \cdot 21 + 6 \cdot 12$$
$$= 17 + 84 + 72 = 173.$$

## 8. Oko stola

Oko stola treba sjesti sedmero prijatelja. Prvi je sjeo Neven. Na koliko se načina može rasporediti ostalih šestero prijatelja tako da Iris i Marta sjede jedna do druge, a nijedna od njih ne sjedi pored Nevena?

***Rezultat:*** 144

**Rješenje.**

Označimo šest mjesta brojevima od 1 do 6, redom, počevši od prvog mjesta pokraj Nevena (svejedno s koje njegove strane).

Iris i Marta mogu sjediti na mjestima 2 i 3, 3 i 4 ili 4 i 5, ali unutar svakog od tih triju slučajeva njih dvije mogu zamijeniti mjesta, što znači da postoji $2 \cdot 3 = 6$ načina za smještaj Iris i Marte.

Za svaki mogući način smještanja Iris i Marte, ostalih četvero prijatelja može se smjestiti na preostala 4 mjesta na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina.

Prijatelji se mogu rasporediti na $6 \cdot 24 = 144$ različita načina.

## 9. Jedanaest boja

Na dvjema prozirnim folijama nacrtane su identične slike sastavljene od 11 paralelnih dužina različitih boja. Zrinka je položila te folije jednu na drugu tako da dužine na slikama budu okomite i tvore tablicu dimenzija $10 \times 10$. U svako polje te tablice Zrinka je upisala ukupan broj različitih boja na njegovom rubu. Koliki je zbroj svih 100 brojeva koje je Zrinka upisala?

Na slici je tablica dimenzija $2 \times 2$ nastala na isti način koristeći tri različite boje.

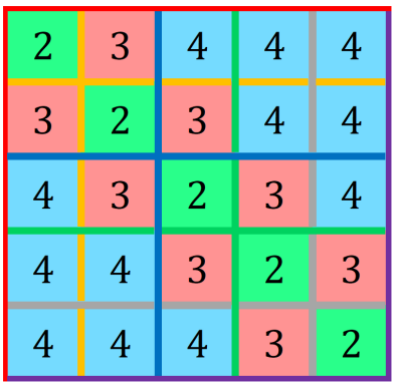
| | |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |

***Rezultat:*** 362

**Rješenje.**

Promotrimo tablicu dimenzija $5 \times 5$ nastalu koristeći šest različitih boja.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |




Obojimo li sva polja s istim brojem jednom bojom, kao na desnoj slici, možemo uočiti da je u svakom polju na dijagonali upisan broj 2, u njima susjednim poljima broj 3, a u svim ostalim poljima broj 4.

Objasnimo zašto je tako.

Svako je polje omeđeno s četiri dužine. Najmanji broj koji može biti upisan u pojedino polje je 2, a najveći 4. Dvije dužine iste boje uvijek se sijeku na dijagonali. Zato polja na dijagonali (zelena polja) imaju vertikalne stranice obojane istim dvjema bojama kojima su obojane njihove horizontalne stranice. U svim poljima na dijagonali upisan je broj 2.

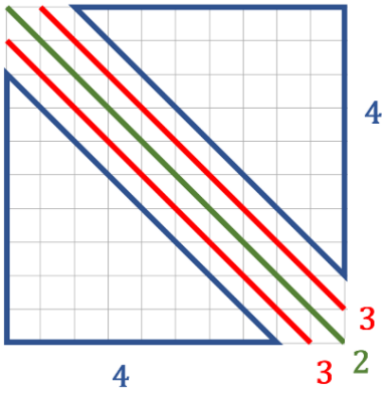
Polja koja su susjedna poljima na dijagonali (crvena polja) imaju po jedan vrh na dijagonali u kojem se sijeku istobojne dužine. Zato su rubovi takvih polja obojani s ukupno tri različite boje pa su u njima upisani brojevi 3. Sva ostala polja imaju četiri stranice različitih boja te su u njima upisani brojevi 4.

Isto vrijedi i za Zrinkinu tablicu dimenzija $10 \times 10$.

U deset zelenih polja na dijagonali, Zrinka je upisala broj 2.

U sva crvena polja, a ima ih $9 + 9 = 18$, Zrinka je upisala broj 3.

U sva plava polja Zrinka je upisala broj 4.




Takvih je polja

$$100 - (10 + 18) = 72.$$

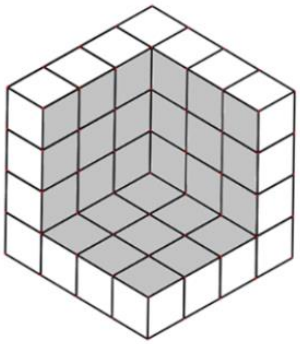
Ukupan zbroj svih upisanih brojeva je

$$10 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 72 \cdot 4 = 20 + 54 + 288 = 362.$$

***Napomena.***

Do rješenja možemo doći i tako da odredimo za koliko je zbroj brojeva manji od $4 \cdot 100 = 400$ (to bi bio zbroj da je u svakom polju upisan broj 4). U deset polja na dijagonali upisan je broj 2, pa treba oduzeti $10 \cdot 2$, a u 18 polja ispod i iznad dijagonale je upisan broj 3 pa treba oduzeti još $18 \cdot 1$. Zato je zbroj svih upisanih brojeva jednak $400 - 20 - 18 = 362$.

## 10. Tijelo od kockica



Na stranama igraće kockice nalaze se brojevi od 1 do 6. Nasuprot broja 1 je broj 6, nasuprot broja 2 nalazi se broj 5, a nasuprot broja 3 broj 4. Iz kocke koja je sastavljena od 64 takve kockice uklonjeno je 27 kockica koje također tvore kocku. Tako dobiveno tijelo prikazano je na slici. Zbroj brojeva na sivo obojenim poljima tijela je 27. Koliki je najveći mogući zbroj svih brojeva na stranama tako dobivenog tijela koje nisu sivo obojene?

***Rezultat:*** 375

**Rješenje.**

Strane igraće kockice nazivamo poljima. Na tijelu je 27 polja obojeno sivom bojom, a zbroj brojeva koji su na njima zapisani je 27. To znači da je na svakom od sivih polja zapisan broj 1. Kako bi zbroj brojeva na stranama tijela bio najveći mogući, na poljima koja nisu siva, a nalaze se na stranama tijela moraju biti zapisani najveći mogući brojevi.

Promotrimo najprije kockice koje imaju jednu sivu stranu i brojeve koji su zapisani na njihovim vidljivim stranama.

- Ako je na kockici vidljiva jedna strana koja nije siva, na njoj je zapisan broj 6. Takvih je kockica 12 pa je zbroj brojeva koji su zapisani na vidljivim stranama tih kockica jednak $12 \cdot 6 = 72$.
- Ako su na kockici vidljive dvije strane koje nisu sive, na njima su zapisani brojevi 5 i 6. Takvih je kockica 12 pa je zbroj $12 \cdot (5 + 6) = 132$.
- Ako su na kockici vidljive tri strane koje nisu sive, na njima su zapisani brojevi 4, 5 i 6. Takve su kockice 3 pa je zbroj $3 \cdot (4 + 5 + 6) = 45$.

Preostaju nam kockice koje nemaju niti jednu sivu stranu. Takvih je kockica 10.

- Na njih 4 su vidljive 3 strane s brojevima 4, 5 i 6 pa je zbroj $4 \cdot (4 + 5 + 6) = 60$.
- Na njih 6 su vidljive 2 strane s brojevima 5 i 6 pa je zbroj $6 \cdot (5 + 6) = 66$.

Najveći mogući zbroj svih brojeva na vidljivim stranama koje nisu sivo obojene tako dobivenog tijela je $72 + 132 + 45 + 60 + 66 = 375$.

**Hrvatsko matematičko društvo**

# HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

**prvo kolo – subota, 23. svibnja 2026.**

## Rješenja zadataka za grupu C (6. razred)

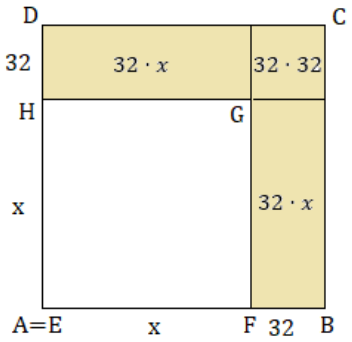
### 1. Dva kvadrata

Duljina stranice većeg i duljina stranice manjeg kvadrata razlikuju se za 32 cm, a površine tih dvaju kvadrata razlikuju se za 6528 cm$^2$. Kolika je, u centimetrima, duljina stranice većeg kvadrata?

***Rezultat:*** 118

**Rješenje.**

Neka je $ABCD$ veći, a $EFGH$ manji kvadrat. Nacrtajmo ih tako da je $A = E$ te da točka $F$ pripada dužini $\overline{AB}$, a točka $H$ dužini $\overline{AD}$. Neka je $|EF| = x$.




Površina kvadrata $ABCD$ veća je od površine kvadrata $EFGH$ za površinu dvaju pravokutnika kojima su duljine susjednih stranica $x$ i 32 cm, te za površinu kvadrata čija je stranica duljine 32 cm.

Vrijedi:

$$2 \cdot 32 \cdot x + 32 \cdot 32 = 6528$$

$$64x + 1024 = 6528$$
$$64x = 5504$$
$$x = 86$$

Dakle, duljina stranice kvadrata $EFGH$ je 86 cm, a stranica kvadrata $ABCD$ dulja je za 32 cm pa je njena duljina $86 + 32$, tj. 118 cm.

## 2. Dva svjetionika

Crveni svjetionik naizmjence svijetli 5 sekundi, pa 4 sekunde ne svijetli. Zeleni svjetionik naizmjence svijetli 4 sekunde, pa 2 sekunde ne svijetli. Točno u 19 sati oba su svjetionika započela svijetliti. Koliko je sekundi tijekom idućih 2026 sekundi svijetlio točno jedan svjetionik?

***Rezultat:*** 900

**Rješenje.**

Crveni svjetionik svijetli 5 sekundi, a ne svijetli 4 sekunde. To je ciklus od 9 sekundi.

Zeleni svjetionik svijetli 4 sekunde, a ne svijetli 2 sekunde. To je ciklus od 6 sekundi.

Unutar 18 sekundi crveni svjetionik ponovit će ciklus 2 puta jer je $9 \cdot 2 = 18$, a zeleni svjetionik ponovit će ciklus 3 puta jer je $6 \cdot 3 = 18$. To znači da se svakih 18 sekundi ponavljaju isti ciklusi.

Oba svjetionika započinju svoje cikluse u istom trenutku.

| sekunde | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| crveni svjetionik | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ | ✕ | ✕ | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ | ✕ | ✕ |
| zeleni svjetionik | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ | 💡 | 💡 | 💡 | 💡 | ✕ | ✕ |

✕ označava 1 sekundu u kojoj svjetionik ne svijetli

💡 označava 1 sekundu u kojoj svjetionik svijetli

Budući da trebamo odrediti koliko je sekundi svijetlio točno jedan svjetionik, tražimo one stupce u kojima se na jednom mjestu nalazi 💡, a na drugom ✕. Ima ih sveukupno 8 – to su 5., 7., 8., 9., 11., 12., 15. i 16. stupac. Dakle, tijekom svakih 18 sekundi, 8 je sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

Izračunajmo koliko je dugo tijekom 2026 sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

Kako je $2026 : 18 = 112$ i ostatak 10, 112 se puta ponavljaju ciklusi od 18 sekundi, a početnih 10 sekundi sljedećeg ciklusa još trebamo posebno razmotriti.

U 112 ciklusa je $112 \cdot 8 = 896$ sekundi svijetlio točno jedan svjetionik. U 10 sekundi od početka sljedećeg ciklusa imamo četiri stupca u kojima se nalazi jedan 💡 i jedan ✕. Ukupno je $896 + 4 = 900$ sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

## 3. Umnožak

Ako je $\overline{ab} \cdot \overline{cb} = \overline{ddd}$, koliko je $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ?

***Rezultat:*** 378

**Rješenje.**

Broj $\overline{ddd} = d \cdot 111$, a $111 = 3 \cdot 37$, pa jedan od dvaju brojeva $\overline{ab}$ ili $\overline{cb}$ treba biti djeljiv s 37. Jedini dvoznamenkasti brojevi djeljivi s 37 su 37 i $2 \cdot 37 = 74$. Drugi faktor treba biti djeljiv s 3.

*Prvi slučaj.*

Neka je jedan od faktora $\overline{ab}$ i $\overline{cb}$ jednak 37. Drugi faktor treba biti dvoznamenkasti broj koji je djeljiv s 3, a znamenka jedinica mu je 7. Njihov umnožak treba biti oblika $\overline{ddd}$.

Ako je znamenka desetica 1, umnožak $37 \cdot 17$ nije djeljiv s 3.

Ako je znamenka desetica 2, dobivamo umnožak $37 \cdot 27 = 999$ koji je željenog oblika.

Ako je znamenka desetica veća od 2, umnožak bi bio veći od 999, što znači da ne bi bio troznamenkast broj pa za faktor 37 nema drugih rješenja.

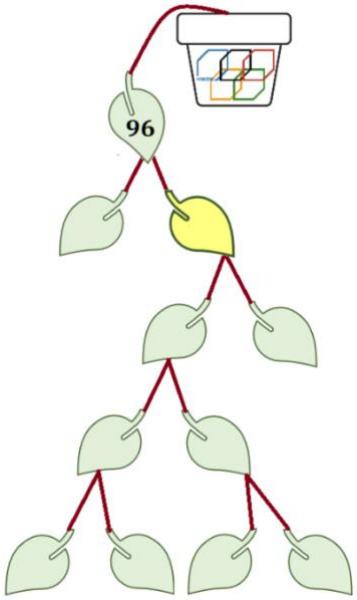
*Drugi slučaj.*

Ako je jedan od faktora $\overline{ab}$ i $\overline{cb}$ jednak 74, drugom faktoru znamenka jedinica treba biti također 4, a njihov umnožak treba biti oblika $\overline{ddd}$.

Ako je znamenka jedinica 1, dobivamo umnožak $74 \cdot 14 = 1036$, što nije troznamenkast broj.

Ako bi znamenka jedinica drugog faktora bila veća od 1, umnožak bi bio veći od 1036.

Prema tome, jedine mogućnosti su $37 \cdot 27 = 27 \cdot 37 = 999$, što znači da je $d = 9$, $b = 7$, a znamenke $a$ i $c$ imaju vrijednost 3 i 2, pa je traženi umnožak $a \cdot b \cdot c \cdot d = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 = 378$.

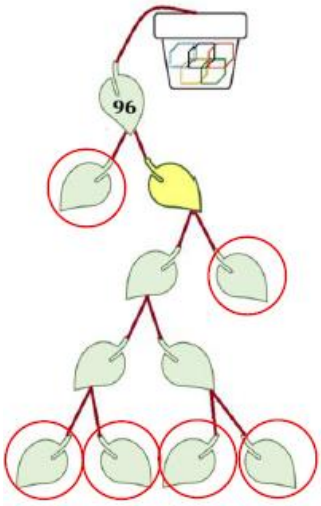



## 4. Brojevi u listovima

U svaki prazan list biljke na slici treba upisati po jedan prirodni broj veći od 1 pri čemu broj u listu treba biti umnožak brojeva u dvama listovima neposredno ispod njega ako je s njima povezan granama. Odredi sve moguće načine popunjavanja listova, a zatim izračunaj zbroj brojeva upisanih u žuti list u svim tim načinima. Koliki je taj zbroj?

***Rezultat:*** 272

**Rješenje.**




Uočimo da je na slici šest „krajnjih“ listova (zaokruženi su na slici), te da je broj 96 jednak umnošku brojeva u tim listovima.

S druge je strane, vrijedi $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Kako je u tom rastavu šest brojeva (koliko je i krajnjih listova), a u listove se smiju upisivati samo prirodni brojevi veći od 1, slijedi da u krajnje listove upisujemo pet dvojki i jednu trojku iz rastava broja 96 na proste faktore.

Krajnji list u koji ćemo upisati broj 3 možemo izabrati na šest načina. U sve preostale krajnje listove upisujemo broj 2, a ostali listovi se popunjavaju na jedinstven način kako je uvjetima zadatka opisano.

U pet od tih šest mogućnosti, u zelenom listu neposredno ispod broja 96 je broj 2, a tada je u žutom listu broj $96 : 2 = 48$.

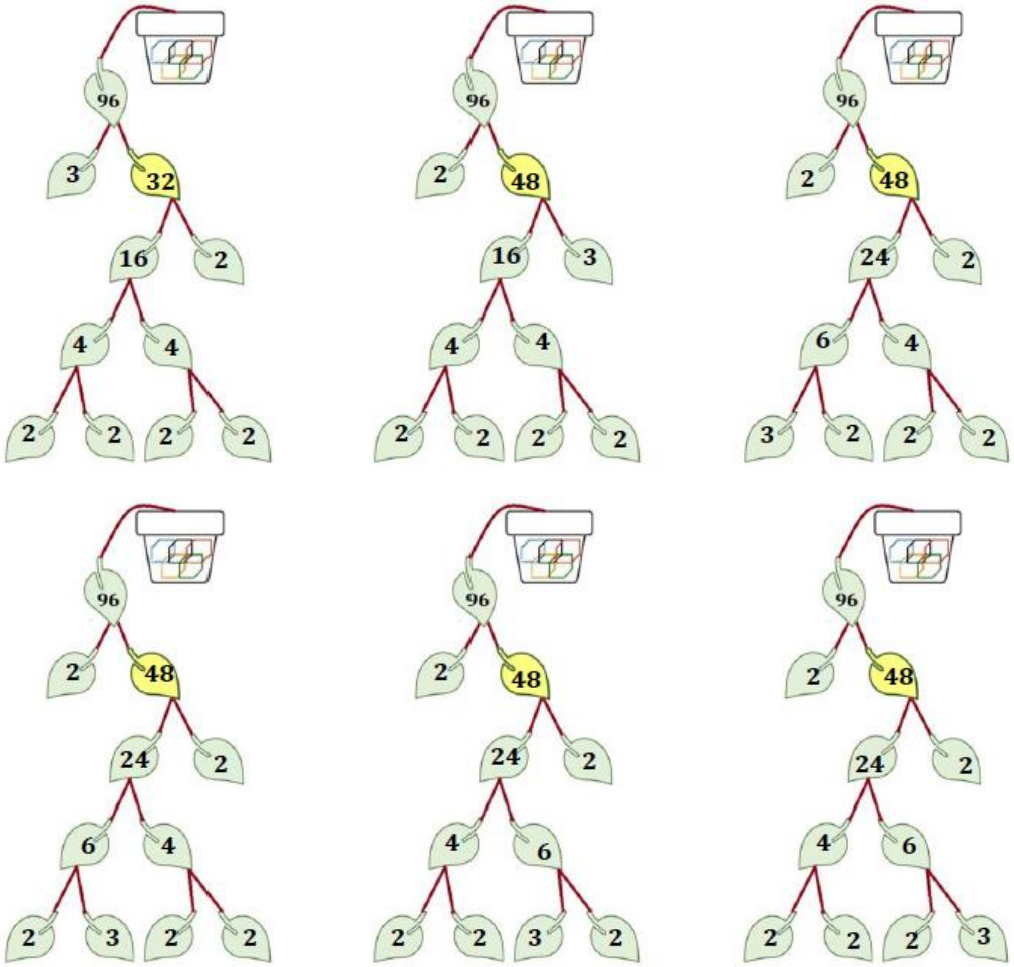
U preostalom, šestom, slučaju, u zelenom listu neposredno ispod broja 96 je broj 3, a u žutom listu broj $96 : 3 = 32$.

Zbroj brojeva upisanih u žuti list u svim mogućim načinima popunjavanja je

$$5 \cdot 48 + 32 = 240 + 32 = 272.$$

***Napomena:***

Na sljedećim slikama prikazano je svih šest mogućih načina popunjavanja listova:




## 5. Aritmetička sredina

Vedran je izračunao aritmetičku sredinu svih četveroznamenkastih brojeva koji se zapisuju pomoću znamenki 1, 4, 6 i 9 tako da se svaka znamenka koristi točno jedanput. Koliki je umnožak svih znamenki broja koji je Vedran izračunao?

***Rezultat:*** 625

**Prvo rješenje.**

Neka je $\overline{abcd}$ četveroznamenkasti broj. Za njegov zapis, prema uvjetu zadatka, koristimo različite znamenke iz skupa $\{1, 4, 6, 9\}$.

Znamenku $a$ možemo izabrati na 4 načina. Nakon što smo izabrali znamenku $a$, preostale su nam još tri slobodne znamenke pa znamenku $b$ možemo izabrati na 3 načina, znamenku $c$ na 2 načina, a znamenka $d$ je jedina preostala znamenka iz skupa $\{1, 4, 6, 9\}$.

Dakle, traženih četveroznamenkastih brojeva ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

U svim se tim brojevima svaka od znamenki 1, 4, 6 i 9 pojavljuje po 6 puta na mjestima znamenki tisućica, stotica, desetica i jedinica, pa vrijedi da je zbroj svih tih brojeva

$$(6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 9) \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 120 \cdot 1111.$$

Aritmetička sredina svih traženih brojeva je $120 \cdot 1111 : 24 = 5 \cdot 1111 = 5555$.

Umnožak svih znamenki te aritmetičke sredine je $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

**Drugo rješenje.**

Aritmetička sredina četveroznamenkastih brojeva, također je četveroznamenkasti broj.

U svim četveroznamenkastim brojevima napisanim znamenkama 1, 4, 6 i 9, svaka od tih znamenki pojavljuje se jednak broj puta na mjestu jedinica, desetica, stotica i tisućica. Stoga će aritmetička sredina biti broj čije su sve četiri znamenke jednake.

Ta znamenka će biti jednaka aritmetičkoj sredini brojeva 1, 4, 6, 9, što iznosi

$$(1 + 4 + 6 + 9) : 4 = 20 : 4 = 5.$$

Dakle, aritmetička sredina svih tih četveroznamenkastih brojeva je 5555, a umnožak njegovih znamenki iznosi $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

## 6. Trapez

Dijagonala jednakokračnog trapeza dijeli taj trapez na dva jednakokračna trokuta koja nisu sukladna. Kolika je, u stupnjevima, mjera tupog kuta tog trapeza?

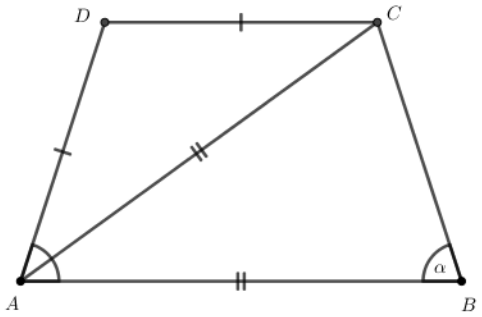
***Rezultat:*** 108

**Prvo rješenje.**

Neka je promatrani trapez $ABCD$, neka su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ njegove osnovice, pri čemu je $|AB| > |CD|$.

Budući da ga dijagonala dijeli na dva jednakokračna trokuta i vrijedi $|AB| > |CD|$, jedino je moguće da je $|AD| = |CD|$ te $|AB| = |AC|$.

Neka je mjera kuta uz osnovicu $\overline{AB}$ trapeza jednaka $\alpha$.




Promotrimo trokut $ABC$. To je jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{BC}$.

Dva su kuta, pri vrhovima $B$ i $C$, mjere $\alpha$ pa je treći kut tog trokuta $\sphericalangle BAC$ mjere $180° - 2\alpha$.

Promotrimo jednakokračni trokut $ACD$. Mjera kuta $\sphericalangle ADC$ jednaka je $180° - \alpha$ jer je suplementaran kutu $\sphericalangle BAD$ koji je mjere $\alpha$. Mjere preostalih dvaju kutova tog trokuta, pri vrhovima $A$ i $C$, jednake su i iznose $(180° - (180° - \alpha)) : 2 = \frac{\alpha}{2}$.

Promotrimo kut pri vrhu $A$ trapeza $ABCD$. Njegova je mjera $\alpha$ i ona je jednaka zbroju mjere kuta $\sphericalangle BAC$ (kut nasuprot osnovice trokuta $ABC$) i mjere kuta $\sphericalangle CAD$ (kut uz osnovicu trokuta $ACD$), to jest vrijedi:

$$\alpha = 180° - 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$$
$$\alpha + 2\alpha - \frac{\alpha}{2} = 180°$$
$$\frac{5}{2}\alpha = 180°$$
$$\alpha = 72°$$

Mjera tupog kuta trapeza je $180° - 72° = 108°$.

**Drugo rješenje.**

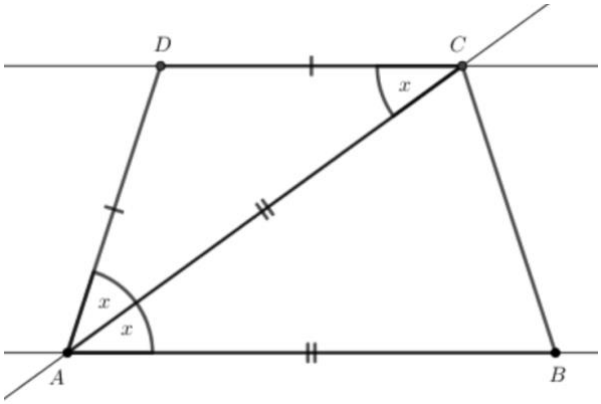
Neka je promatrani trapez $ABCD$, neka su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ njegove osnovice, pri čemu je $|AB| > |CD|$.

Budući da ga dijagonala dijeli na dva jednakokračna trokuta i vrijedi $|AB| > |CD|$, jedino je moguće da je $|AD| = |CD|$ te $|AB| = |AC|$.

Promotrimo trokut $ACD$. Neka je $|\sphericalangle CAD| = x$.

Kako je trokut $ACD$ jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$, vrijedi $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle CAD| = x$.

Pravac $AC$ je presječnica usporednih pravaca $AB$ i $CD$ pa je i $|\sphericalangle BAC| = x$.




Mjere šiljastih kutova jednakokračnog trapeza $ABCD$ su jednake, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBA| = 2x$.

Promotrimo jednakokračan trokut $ABC$.

Mjere kutova uz njegovu osnovicu $\overline{BC}$ su jednake, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CBA| = 2x$. Zbroj mjera unutarnjih kutova je $x + 2x + 2x = 180°$ pa je $x = 36°$.

Mjere tupih kutova jednakokračnog trapeza $ABCD$ su jednake i iznose

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DCB| = x + 2x = 3x = 3 \cdot 36° = 108°.$$

## 7. Jedanaest boja

Na dvjema prozirnim folijama nacrtane su identične slike sastavljene od 11 paralelnih dužina različitih boja. Zrinka je položila te folije jednu na drugu tako da dužine na slikama budu okomite i tvore tablicu dimenzija $10 \times 10$. U svako polje te tablice Zrinka je upisala ukupan broj različitih boja na njegovom rubu. Koliki je zbroj svih 100 brojeva koje je Zrinka upisala?

Na slici je tablica dimenzija $2 \times 2$ nastala na isti način koristeći tri različite boje.

| | |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |

***Rezultat:*** 362

**Rješenje.**

Promotrimo tablicu dimenzija $5 \times 5$ nastalu koristeći šest različitih boja.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 3 | 2 |

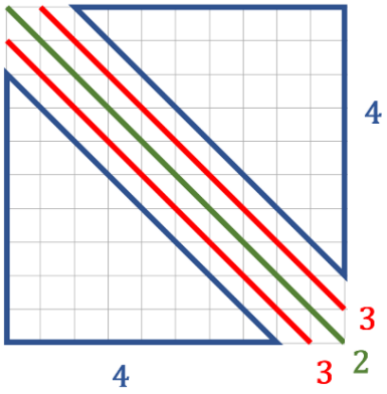
Obojimo li sva polja s istim brojem jednom bojom, kao na desnoj slici, možemo uočiti da je u svakom polju na dijagonali upisan broj 2, u njima susjednim poljima broj 3, a u svim ostalim poljima broj 4.

Objasnimo zašto je tako.

Svako polje omeđeno je s četiri dužine. Najmanji broj koji može biti upisan u pojedino polje je 2, a najveći 4. Dvije dužine iste boje uvijek se sijeku na dijagonali. Zato polja na dijagonali (zelena polja) imaju vertikalne stranice obojane istim dvjema bojama kojima su obojane njihove horizontalne stranice. U svim poljima na dijagonali upisan je broj 2.

Polja koja su susjedna poljima na dijagonali (crvena polja) imaju po jedan vrh na dijagonali u kojem se sijeku istobojne dužine. Zato su rubovi takvih polja obojani s ukupno tri različite boje pa su u njima upisani brojevi 3. Sva ostala polja imaju četiri stranice različitih boja te su u njima upisani brojevi 4.

Isto vrijedi i za Zrinkinu tablicu dimenzija $10 \times 10$.




U deset zelenih polja na dijagonali, Zrinka je upisala broj 2.

U sva crvena polja, a ima ih $2 \cdot 9 = 18$, Zrinka je upisala broj 3.

U sva plava polja Zrinka je upisala broj 4.

Takvih je polja

$$100 - (10 + 18) = 72.$$

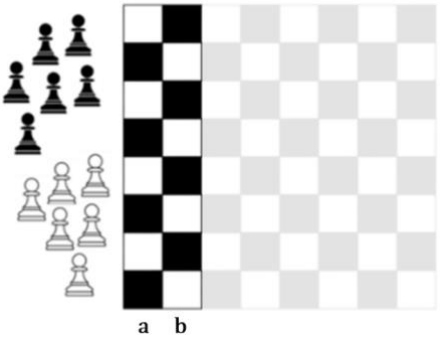
Ukupan zbroj svih upisanih brojeva je

$$10 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 72 \cdot 4 = 20 + 54 + 288 = 362.$$

***Napomena.***

Do rješenja možemo doći i tako da odredimo za koliko je zbroj brojeva manji od $4 \cdot 100 = 400$ (to bi bio zbroj da je u svakom polju upisan broj 4). U deset polja na dijagonali upisan je broj 2, pa treba oduzeti $10 \cdot 2$, a u 18 polja ispod i iznad dijagonale je upisan broj 3 pa treba oduzeti još $18 \cdot 1$. Zato je zbroj svih upisanih brojeva jednak $400 - 20 - 18 = 362$.

## 8. Pijuni




Šest crnih i šest bijelih pijuna postavljamo u stupce a i b šahovske ploče tako da crni pijuni budu na crnim poljima, a bijeli pijuni na bijelim poljima. U svakom stupcu treba biti po šest pijuna. Na koliko načina to možemo napraviti?

***Rezultat:*** 328

**Rješenje.**

Budući da u svakom stupcu postoje 4 crna i 4 bijela polja, u stupcu mogu biti najviše četiri pijuna iste boje.

Prebrojimo najprije moguće rasporede pijuna u jednom stupcu. U svakom stupcu treba biti šest pijuna, pa postoje tri mogućnosti: 4 bijela i 2 crna, 3 bijela i 3 crna, 2 bijela i 4 crna.

**4B 2C**

Ako u jednom stupcu želimo rasporediti četiri bijela i dva crna pijuna, bijeli pijuni će zauzimati sva četiri bijela polja, a od četiri crna polja biramo na koja dva ćemo postaviti crne pijune. Prvi pijun možemo staviti na bilo koje od četiri polja, a drugi na jedno od preostala tri.

Međutim, kako ne razlikujemo pijune, ukupan broj rasporeda 4 bijela i 2 crna pijuna u jednom stupcu je $(4 \cdot 3) : 2 = 6$.

**3B 3C**

Odredimo broj načina na koje možemo rasporediti tri bijela i tri crna pijuna u jednom stupcu po navedenim pravilima. Tri bijela pijuna na četiri bijela polja možemo rasporediti na četiri načina, jer možemo odabrati jedno od četiri bijela polja koje će ostati prazno, a na ostala tri staviti pijune. Isto vrijedi i za crne pijune, i njih možemo rasporediti na četiri načina.

Ukupan broj rasporeda 3 bijela i 3 crna pijuna je $4 \cdot 4 = 16$.

**2B 4C**

Broj rasporeda dva bijela i četiri crna pijuna isti je kao i broj rasporeda četiri bijela i dva crna pijuna, tj. 6.

Odredimo sada ukupan broj mogućih rasporeda u oba stupca.

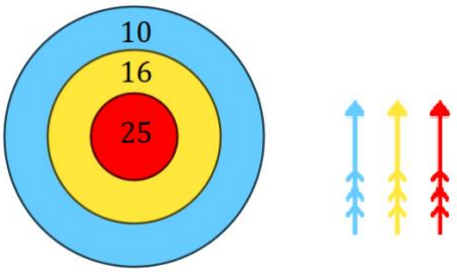
Ukupno treba rasporediti 6 bijelih i 6 crnih pijuna pa postoje tri slučaja:

- Ako su u prvom stupcu 4 bijela i 2 crna pijuna, onda su u drugom stupcu 2 bijela i 4 crna. Broj mogućih rasporeda je $6 \cdot 6 = 36$.
- Ako su u prvom stupcu 3 bijela i 3 crna pijuna, onda su i u drugom stupcu 3 bijela i 3 crna pijuna. Broj mogućih rasporeda je $16 \cdot 16 = 256$.
- Ako su u prvom stupcu 2 bijela i 4 crna pijuna, onda su u drugom stupcu 4 bijela i 2 crna pijuna. Broj mogućih rasporeda je ponovno $6 \cdot 6 = 36$.

Ukupan broj mogućih rasporeda je $36 + 256 + 36 = 328$.

## 9. Obojene strijele

Pavle ima po pet strijela u tri boje; plavoj, žutoj i crvenoj. Pogodak u plavi dio mete nosi 10 bodova, u žuti 16 bodova, a u crveni 25 bodova. Ako pogodi polje mete koje je iste boje kao i strijela, osvaja 45 % bodova više. Koliko je najviše bodova mogao osvojiti Pavle ako je tri puta pogodio u središte i pet puta promašio metu, a ukupan broj bodova je bio prirodni broj?




***Rezultat:*** 244

**Prvo rješenje.**

Promotrimo broj bodova koji Pavle osvaja pogocima u metu, ovisno o boji strijele i dijelu mete.

| | plavi dio mete | žuti dio mete | crveni dio mete |
|---|---|---|---|
| plava strijela | $10 + 0.45 \cdot 10 = 14.5$ | 16 | 25 |
| žuta strijela | 10 | $16 + 0.45 \cdot 16 = 23.2$ | 25 |
| crvena strijela | 10 | 16 | $25 + 0.45 \cdot 25 = 36.25$ |

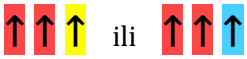
Svaki pogodak u crveni dio mete donosi više bodova od bilo kojeg pogotka u žuti dio, a svaki pogodak u žuti dio mete donosi više bodova od bilo kojeg pogotka u plavi dio.

Pavle je pet puta promašio metu, pa je s deset strijela pogodio metu.

Tri su mete pogodile središte mete (crveni dio), a ostalih sedam strijela pogodilo je žuti ili plavi dio. Da bi broj bodova bio što veći, broj pogodaka u žuti dio mete treba biti što veći.

Od strijela koje su pogodile određeni dio mete, što veći broj trebaju biti strijele odgovarajuće boje.

Promotrimo moguće pogotke u središnji crveni dio mete.

| **pogoci** | **bodovi** |
|---|---|
|  | $3 \cdot 36.25 = 108.75$ |
|  | $2 \cdot 36.25 + 25 = 97.5$ |
|  | $36.25 + 2 \cdot 25 = 86.25$ |
|  | $3 \cdot 25 = 75$ |

Ukupan broj ostvarenih bodova je prirodni broj, a broj bodova za tri pogotka u crveni dio mete je 108.75, 97,5, 86.25 ili 75.

Prema prvoj tablici, broj bodova ostvaren pogocima u plavi dio mete može biti prirodni broj ili mu je decimalni dio .5, a broj bodova ostvaren pogocima u žuti dio mete može biti prirodni broj ili mu je decimalni dio .2, .4, .6 ili .8.

Zaključujemo da broj bodova ostvaren pogocima u crveni dio mete ne može biti 108.75 niti 86.25, a broj bodova ostvaren pogocima u žuti dio mete mora biti prirodni broj.

Broj pogodaka žutim strijelama u žuti dio mete je 0 ili prirodni višekratnik broja 5.

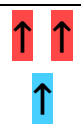
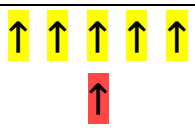
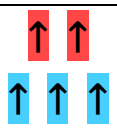
Provjerimo je li moguće da vrijedi

- pogocima u crveni dio ostvareno je 97.5 bodova
- svih pet žutih strijela pogodilo je žuti dio mete
- ukupan broj bodova je prirodni broj

te ako je to moguće, utvrdimo najveći mogući broj bodova uz te pretpostavke.

Kako bi ukupan broj bodova bio prirodni broj, u plavi je dio pogođeno neparnim brojem plavih strijela, pa je barem jedna plava strijela pogodila plavi dio mete. Pavle je sa sedam strijela pogodio žuti ili plavi dio. Zato je najviše šest strijela pogodilo žuti dio mete – pet žutih strijela i jedna strijela neke druge boje.

Da je to moguće, pokazuje sljedeća tablica u kojoj je raspoređeno po pet crvenih, žutih i plavih strijela.

| crveni dio mete | | žuti dio mete | | plavi dio mete | | promašaji | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***strijele*** | ***bodovi*** | ***strijele*** | ***bodovi*** | ***strijele*** | ***bodovi*** | ***strijele*** | ***ukupno bodova*** |
|  | 97.5 |  | 116 + 16 = 132 |  | 14.5 |  | 244 |

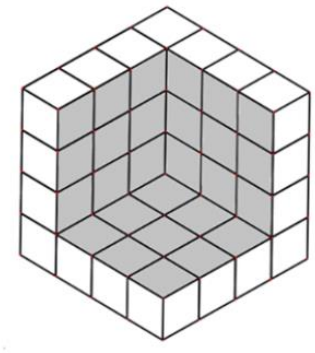
Pogoci u crveni dio mete donose (kako smo prije utvrdili) 97.5 bodova.

Pet pogodaka žutim strijelama u žuti dio mete donosi po 23.2 bodova, a dodatna strijela druge boje u taj dio još 16 bodova. Pogoci u žuti dio vrijede $5 \cdot 23.2 + 16 = 132$ boda.

Pogodak plavom strijelom u plavi dio mete donosi još 14.5 bodova.

Ukupan broj ostvarenih bodova je $97.5 + 132 + 14.5 = 244$.

## 10. Tijelo od kockica



Na stranama igraće kockice nalaze se brojevi od 1 do 6. Nasuprot broja 1 je broj 6, nasuprot broja 2 nalazi se broj 5, a nasuprot broja 3 broj 4. Iz kocke koja je sastavljena od 64 takve kockice uklonjeno je 27 kockica koje također tvore kocku. Tako dobiveno tijelo prikazano je na slici. Zbroj brojeva na sivo obojenim poljima tijela je 27. Koliki je najveći mogući zbroj svih brojeva na stranama tako dobivenog tijela koje nisu sivo obojene?

***Rezultat:*** 375

**Rješenje.**

Strane igraće kockice nazivamo poljima. Na tijelu je 27 polja obojeno sivom bojom, a zbroj brojeva koji su na njima zapisani je 27. To znači da je na svakom od sivih polja zapisan broj 1. Kako bi zbroj brojeva na stranama tijela bio najveći mogući, na poljima koja nisu siva, a nalaze se na stranama tijela moraju biti zapisani najveći mogući brojevi.

Promotrimo najprije kockice koje imaju jednu sivu stranu i brojeve koji su zapisani na njihovim vidljivim stranama.

- Ako je na kockici vidljiva jedna strana koja nije siva, na njoj je zapisan broj 6. Takvih je kockica 12 pa je zbroj brojeva koji su zapisani na vidljivim stranama tih kockica jednak $12 \cdot 6 = 72$.
- Ako su na kockici vidljive dvije strane koje nisu sive, na njima su zapisani brojevi 5 i 6. Takvih je kockica 12 pa je zbroj $12 \cdot (5 + 6) = 132$.
- Ako su na kockici vidljive tri strane koje nisu sive, na njima su zapisani brojevi 4, 5 i 6. Takve su kockice 3 pa je zbroj $3 \cdot (4 + 5 + 6) = 45$.

Preostaju nam kockice koje nemaju niti jednu sivu stranu. Takvih je kockica 10.

- Na njih 4 su vidljive 3 strane s brojevima 4, 5 i 6 pa je zbroj $4 \cdot (4 + 5 + 6) = 60$.
- Na njih 6 su vidljive 2 strane s brojevima 5 i 6 pa je zbroj $6 \cdot (5 + 6) = 66$.

Najveći mogući zbroj svih brojeva na vidljivim stranama koje nisu sivo obojene tako dobivenog tijela je $72 + 132 + 45 + 60 + 66 = 375$.