Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 7. listopada 2026.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Karlo, Bojan i Emil rješavali su četiri zadatka iz matematike. Svaki od njih je dva zadatka riješio točno, a dva netočno. Jedan od učenika točno je riješio 1. i 2. zadatak. U tablici su prikazani rezultati koje su učenici dobili u pojedinim zadatcima.

	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

Odredi točan rezultat svakog zadatka.

Prvo rješenje.

Znamo da je jedan od učenika točno riješio 1. zadatak.

Ako je točan rezultat na 1. zadatku 161, onda je Emil točno riješio taj zadatak, a Karlo i Bojan nisu. Zaključujemo da je Emil točno riješio 1. i 2. zadatak, a nije točno riješio 3. i 4. zadatak. Iz toga slijedi da Karlo nije točno riješio 2. zadatak jer mu je rezultat drugačiji od Emilovog, a nije riješio ni 4. zadatak jer mu je rezultat isti kao Emilov. Dakle, Karlo nije točno riješio barem tri zadatka, što nije moguće.

	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

Dakle, točan rezultat na 1. zadatku je 158.

Ako u 4. zadatku ni 209 ni 211 nisu točan rezultat, onda je Emil netočno riješio 1. i 4. zadatak, pa je točno riješio 2. i 3. zadatak. To znači da ni Karlo ni Emil nisu točno riješili 2. zadatak, što je nemoguće jer tada nitko od učenika nije točno riješio prvi i drugi zadatak.

	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

Ako je točan rezultat 4. zadatka 209, onda je Bojan točno riješio 1. i 4. zadatak, a netočno 2. i 3. zadatak. Karlo mora biti učenik koji je riješio točno 1. i 2. zadatak, pa je netočno riješio 3. i 4. zadatak. Slijedi da je Emil netočno riješio 1., 2. i 4. zadatak, što ne može biti.

	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

Dakle, točan rezultat na 4. zadatku je 211.

Budući da je 158 točan rezultat 1. zadatka, a 211 točan rezultat 4. zadatka, slijedi da je Karlo točno riješio 1. i 4. zadatak, a netočno 2. i 3. zadatak.

	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

Emil nije točno riješio 1. zadatak, a Bojan jest, pa Bojan mora biti učenik koji je riješio točno 1. i 2. zadatak. Emil je točno riješio 4. zadatak, a nije 1. i 2. zadatak, pa je on točno riješio 3. zadatak.

	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

Točni su rezultati redom po zadatcima: 158, 36, 75 i 211.

Drugo rješenje.

Razlikujemo tri slučaja, ovisno o tome tko je točno riješio prvi i drugi zadatak.

(a) Emil je točno riješio 1. i 2. zadatak

U tom slučaju točan je rezultat prvog zadatka 161, a drugog zadatka 37. Ni Karlo ni Bojan nisu točno riješili prvi ni drugi zadatak, pa bi njihovi rezultati trećeg i četvrtog zadatka trebali biti točni. Međutim, njihovi rezultati se razlikuju, pa nije moguće da su obojica točno riješili.

(a)	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

(b) Karlo je točno riješio 1. i 2. zadatak

U tom je slučaju točan rezultat prvog zadatka 158, a drugog zadatka 41. U četvrtom zadatku Karlov rezultat nije točan, a to znači da ni Emil nije točno riješio četvrti zadatak. Međutim, Emil nije točno riješio ni prvi ni drugi zadatak, pa Emil ne može imati dva točno riješena zadatka.

(b)	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

(c) Bojan je točno riješio 1. i 2. zadatak

U tom je slučaju točan rezultat prvog zadatka 158, a drugog zadatka 36.

(c)	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

Emil nije točno riješio ni 1. ni 2. zadatak, pa su njegovi rezultati 3. i 4. zadatka točni.
Vidimo da je Karlo točno riješio 1. i 4. zadatak.

(c)	1. zadatak	2. zadatak	3. zadatak	4. zadatak
Karlo	158	41	77	211
Bojan	158	36	76	209
Emil	161	37	75	211

Točni su rezultati redom po zadatcima: 158, 36, 75 i 211.

Treće rješenje.

U tablici je ukupno 12 brojeva. U retku za svakog učenika nalaze se točno 2 točna rezultata i točno 2 netočna rezultata, pa je ukupno 6 točnih i 6 netočnih rezultata.

U stupcima za 2. i 3. zadatak nalaze se različiti brojevi, pa se u svakom od tih stupaca može nalaziti najviše jedan točan rezultat. Kako bi u tablici bilo 6 točnih rezultata, u stupcima za 1. i 4. zadatak moraju se nalaziti po 2 točna rezultata, što je moguće samo ako je na 1. zadatku točan rezultat 158, a na 4. zadatku točan rezultat 211. Karlo je točno riješio 1. i 4. zadatak, a netočno 2. i 3. zadatak.

Dalje zaključujemo kao u prvom rješenju da je Bojan riješio točno 1. i 2. zadatak, a netočno 3. i 4. zadatak, dok je Emil točno riješio 3. i 4. zadatak, a netočno 1. i 2. zadatak.

Točni su rezultati redom po zadatcima: 158, 36, 75 i 211.

2. Mia skuplja sličice koje se prodaju u tri vrste paketića. U paketiću mogu biti tri, četiri ili pet sličica. Od bake je dobila 33 paketića s ukupno 118 sličica. Među tim paketićima je dvostruko više onih s tri sličice nego svih ostalih paketića zajedno. Koliko je paketića svake vrste Mia dobila?

Rješenje.

Budući da je Mia dobila dvostruko više paketića s tri sličice nego svih paketića s četiri ili pet sličica zajedno, zaključujemo da jednu trećinu ukupnog broja paketića čine paketići s četiri ili pet sličica.

Paketići s 3 sličice	Paketići s 4 ili 5 sličica

Paketića s četiri ili pet sličica ima $33 : 3 = 11$, a paketića s tri sličice ima $2 \cdot 11 = 22$.

U 22 paketića od tri sličice nalazi se $22 \cdot 3 = 66$ sličica, a u preostalih 11 paketića $118 - 66 = 52$ sličice.

Kad bi svih 11 paketića sadržavalo po četiri sličice, zajedno bi sadržavali $11 \cdot 4 = 44$ sličice.

Kako je ukupan broj sličica 52, razlika $52 - 44 = 8$ znači da se u 8 paketića nalazi po pet sličica, a u $11 - 8 = 3$ paketića nalaze se po četiri sličice.

Mia je dobila 22 paketića od tri sličice, 3 paketića od četiri sličice i 8 paketića od pet sličica.

3. Iris je u prvom retku napisala troznamenkasti broj kojemu je zbroj znamenaka 12. U drugom je retku napisala troznamenkasti broj kojemu je znamenka stotica ista kao prvom broju, a znamenke desetica i jedinica su u obrnutom poretku. Oba je broja pomnožila brojem 7. Umnožak u prvom retku je za 189 veći od umnoška u drugom retku. Koji je troznamenkasti broj Iris napisala u prvom retku? Odredi sve mogućnosti.

Rješenje.

Broj 189 jednak je razlici dvaju umnožaka koje je Iris izračunala. Budući da su oba troznamenkasta broja pomnožena brojem 7, dijeljenjem $189 : 7 = 27$ dobivamo njihovu razliku. Dakle, broj u prvom retku je za 27 veći od broja u drugom retku, tj. od broja koji nastane kada znamenke na mjestima desetica i jedinica zamijene mjesta.

Zbog premještanja znamenke s mjesta jedinica na mjesto desetica, broj se povećava za deveterostruku vrijednost te znamenke. Zbog premještanja znamenke s mjesta desetica na mjesto jedinica, broj se smanjuje za deveterostruku vrijednost te znamenke.

Zato se pri toj zamjeni mjesta znamenaka broj mijenja za deveterostruku vrijednost razlike tih znamenaka. Da bi se broj smanjio za 27, znamenka desetica mora biti za 3 veća od znamenke jedinica. Tada se zamjenom mjesta broj gube 3 desetice i dobivaju 3 jedinice, što daje ukupno smanjenje za $30 - 3 = 27$.

Zaključujemo da je znamenka desetica za 3 veća od znamenke jedinica.

Dodatni je uvjet da je zbroj znamenaka broja u prvom retku 12.

Rješenja ćemo tražiti redom tako da u prvom stupcu ispisujemo sve moguće znamenke jedinica, u drugom stupcu pišemo odgovarajuću znamenku desetica (za 3 veća od znamenke jedinica), a u trećem znamenku stotica (tako da zbroj znamenaka bude 12).

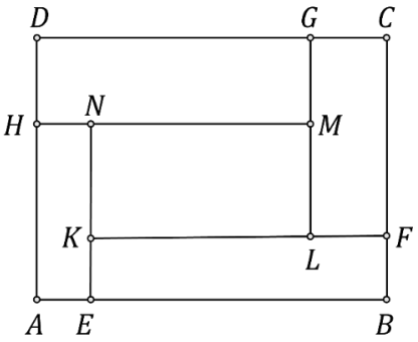
J	D	S	broj u prvom retku	broj u drugom retku
0	3	9	930	903
1	4	7	741	714
2	5	5	552	525
3	6	3	363	336
4	7	1	174	147
5	8	–		
6	9	–		
7	–			
8	–			
9	–			

Iris je u prvom retku napisala jedan od brojeva 930, 741, 552, 363 i 174.

Napomena: Do zaključka da je znamenka desetica za točno 3 veća od znamenke jedinica možemo doći i promatranjem pisanog oduzimanja brojeva u prvom i drugom retku.

4. Pravokutnik $ABCD$ opsega 52 cm podijeljen je na pet pravokutnika kao na slici. Dužina $\overline{EB}$ ima duljinu 12 cm, dužina $\overline{FC}$ duljinu 8 cm, dužina $\overline{GD}$ duljinu 11 cm, a dužina $\overline{HA}$ duljinu 9 cm.

Koliki je opseg pravokutnika $KLMN$?



Prvo rješenje.

Dužine $\overline{DG}$ i $\overline{EB}$ su usporedne, a zbroj njihovih duljina je $11 + 12 = 23$ cm.

Prikažimo taj zbroj na drugi način:

$|DG| + |EB| = |HM| + |EB|$ jer su duljine stranica $\overline{DG}$ i $\overline{HM}$ pravokutnika $DHMG$ jednake

$= (|HN| + |NM|) + |EB|$ jer je N točka na dužini $\overline{HM}$

$= |AE| + |NM| + |EB|$ jer su duljine stranica $\overline{HN}$ i $\overline{AE}$ pravokutnika $AENH$ jednake

$= (|AE| + |EB|) + |NM|$

$= |AB| + |NM|.$ jer je E točka na dužini $\overline{AB}$

Zato je $|AB| + |NM| = 23$ cm.

I dužine $\overline{AH}$ i $\overline{FC}$ su usporedne, a zbroj njihovih duljina je $9 + 8 = 17$ cm.

Taj zbroj možemo prikazati ovako:

$$|AH| + |FC| = |EN| + |FC| = (|EK| + |KN|) + |FC|$$
$$= |BF| + |KN| + |FC| = (|BF| + |FC|) + |KN| = |BC| + |KN|,$$

pa je $|BC| + |KN| = 17$ cm.

Zbrajanjem dobivenih jednakosti dobivamo

$$(|AB| + |NM|) + (|BC| + |KN|) = 23 + 17 = 40 \text{ cm},$$

što možemo zapisati i ovako:

$$(|AB| + |BC|) + (|NM| + |KN|) = 40 \text{ cm}.$$

Opseg pravokutnika $ABCD$ jednak je 52 cm, pa je $|AB| + |BC| = 26$ cm.

Zato je $|NM| + |KN| = 40 - 26 = 14$ cm.

Konačno, opseg pravokutnika $KLMN$ jednak je $2 \cdot 14 = 28$ cm.

Drugo rješenje.

Iz $2 \cdot (|AB| + |BC|) = 52$ cm, slijedi $|AB| + |BC| = 26$ cm.

Stoga je

$$26 = |AB| + |BC| = |AE| + |EB| + |BF| + |FC| = |AE| + 12 + |BF| + 8 = |AE| + |BF| + 20,$$

iz čega slijedi $|AE| + |BF| = 26 - 20 = 6$ cm.

Uočavajući pravokutnike $BFKE$, $MLNK$ i $ENHA$ slijedi

$$|BF| + |ML| = |EK| + |KN| = |EN| = |AH| = 9 \text{ cm},$$

dok uočavajući pravokutnike $AENH$, $KLMN$ i $HMGD$ slijedi

$$|AE| + |KL| = |HN| + |NM| = |HM| = |DG| = 11 \text{ cm}.$$

Zbrajanjem jednakosti $|BF| + |ML| = 9$ cm i $|AE| + |KL| = 11$ cm, dobivamo

$$|BF| + |ML| + |AE| + |KL| = 20 \text{ cm}.$$

Budući da je $|AE| + |BF| = 6$ cm, slijedi

$$|ML| + |KL| = 20 - 6 = 14 \text{ cm}.$$

Konačno, opseg pravokutnika $KLMN$ jednak je

$$2 \cdot (|ML| + |KL|) = 2 \cdot 14 = 28 \text{ cm}.$$

5. U kutiji je 25 karata označenih različitim brojevima od 1 do 25. Sanja je iz kutije uzela 12 karata, Igor četiri i Ana tri karte, a šest je karata ostalo u kutiji. Nakon što je svatko pogledao svoje karte, poveo se razgovor.

Sanja: Igore, sigurna sam da je zbroj brojeva na tvojim kartama paran.

Igor: Aha! Sada znam da zbroj brojeva na Aninim kartama nije veći od 45.

Koje su karte kod Igora? Obrazloži.

Rješenje.

Sanja zna samo kojih je 12 karata kod nje, a sigurna je da je zbroj brojeva na Igorove četiri karte paran. Promotrimo kako je to moguće.

Zbroj četiri broja je paran ako su sva četiri broja parna, ako su među njima dva parna i dva neparna broja i ako su sva četiri broja neparna.

Kada bi među kartama koje nisu kod Sanje bilo i parnih i neparnih, Igor bi mogao imati ili jednu kartu s parnim brojem i tri karte s neparnim brojevima ili tri karte s parnim brojevima i jednu s neparnim brojem, a u tim slučajevima zbroj bi bio neparan.

Sanja je dakle sigurna da su sva četiri broja na Igorovim kartama iste parnosti, tj. da su svi parni ili svi neparni.

Među brojevima od 1 do 25 nalazi se 13 neparnih (1, 3, 5, ..., 25) i 12 parnih brojeva (2, 4, 6, ..., 24).

Kako Sanja ima 12 karata, slijedi je svih 12 karata s parnim brojevima kod nje.

Igor to također zna nakon što je Sanja izjavila da je Igorov zbroj paran.

Preostale su karte s brojevima

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

Igor ima četiri od tih karata, a Ana tri.

Ako su kod Igora četiri karte s najvećim (neparnim) brojevima, 25, 23, 21 i 19, onda zbroj brojeva na Aninim kartama može biti najviše $17 + 15 + 13 = 45$.

Da su kod Igora neke karte s manjim brojevima od 25, 23, 21 i 19, onda bi se kod Ane mogle nalaziti neke karte s većim brojevima od 17, 15 i 13, te bi zbroj Aninih karata mogao biti veći.

Dakle, kod Igora su karte s brojevima 19, 21, 23 i 25.

Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 7. listopada 2026.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. Borna skuplja sličice koje se prodaju u tri vrste paketića. U paketiću mogu biti tri, četiri ili pet sličica. Od bake je dobio 33 paketića s ukupno 118 sličica. Među tim paketićima je dvostruko više onih s tri sličice nego svih ostalih paketića zajedno. Koliko je paketića svake vrste Borna dobio?

Rješenje.

Budući da je Borna dobio dvostruko više paketića s tri sličice nego svih paketića s četiri ili pet sličica zajedno, zaključujemo da jednu trećinu ukupnog broja paketića čine paketići s četiri ili pet sličica, a dvije trećine su paketići s tri sličice. Paketića s četiri ili pet sličica ima $33 : 3 = 11$, a paketića s tri sličice ima $2 \cdot 11 = 22$.

U 22 paketića od tri sličice nalazi se 22· 3 = 66 sličica, a u preostalih 11 paketića 118 – 66 = 52 sličice.

Kad bi svih 11 paketića sadržavalo po četiri sličice, zajedno bi sadržavali $11 \cdot 4 = 44$ sličice.

Kako je ukupan broj sličica 52, razlika $52 - 44 = 8$ znači da se u 8 paketića nalazi po pet sličica, a u $11 - 8 = 3$ paketića nalaze se po četiri sličice.

Borna je dobio 22 paketića od tri sličice, 3 paketića od četiri sličice i 8 paketića od pet sličica.

2. U računalnom programu za uređivanje teksta napisan je broj 12345654321. Neka je N najmanji broj znamenaka koje treba obrisati kako bi preostale znamenke, bez promjene redoslijeda, tvorile broj djeljiv brojem 36.

a) Odredi broj N.

b) Odredi sve brojeve djeljive brojem 36 koji se mogu dobiti na opisani način brisanjem N znamenaka.

Rješenje.

a) Kako bi broj bio djeljiv s 36, mora biti djeljiv s 4 i s 9. Kako bi broj bio djeljiv s 4, njegove posljednje dvije znamenke moraju tvoriti broj djeljiv s 4, a kako bi broj bio djeljiv s 9, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv s 9.

Broj 12345654321 nije paran, pa posljednju znamenku 1 sigurno treba obrisati.

Zbroj znamenaka broja 1234565432 iznosi 35, pa taj broj nije djeljiv s 9.

Budući da je 35 za 8 veće od najbližega manjeg višekratnika broja 9, potrebno je zbroj znamenaka smanjiti za još najmanje 8. To nije moguće postići brisanjem samo još jedne znamenke.

Brisanjem dviju znamenaka to je moguće. Npr. brisanjem dviju znamenaka 4 dobije se broj 12356532 koji je djeljiv s 9. Taj je broj djeljiv brojem 4 pa je djeljiv s 36.

Budući da nakon brisanja znamenke 1 treba obrisati još najmanje dvije znamenke, potrebno je obrisati najmanje tri znamenke da bi dobiveni broj bio djeljiv s 36. Traženi je broj $N = 3$.

b) Osim posljednje znamenke 1, broju 1234565432 čiji je zbroj znamenaka 35 potrebno je obrisati još dvije znamenke tako da rezultat bude djeljiv s 36.

Zbroj dviju znamenaka tog broja je najviše $6 + 5 = 11$, pa treba obrisati dvije znamenke čiji je zbroj jednak 8. To su sljedeći parovi znamenaka: 2 i 6, 3 i 5 ili 4 i 4. Razmatramo tri slučaja.

I.) Brišemo znamenke 2 i 6.
Ne možemo obrisati posljednju znamenku 2 jer bi tada broj završavao znamenkama 43, a broj 43 nije djeljiv s 4. Zato moramo obrisati prvu znamenku 2 i znamenku 6. Dobivamo broj 13455432.

II.) Brišemo znamenke 3 i 5.
Ne možemo obrisati znamenku 3 koja se nalazi neposredno ispred završne znamenke 2 jer bi tada broj završavao znamenkama 42, a broj 42 nije djeljiv s 4. Zato moramo obrisati prvu znamenku 3 i jednu od dviju znamenaka 5. Tako dobivamo brojeve 12465432 i 12456432.

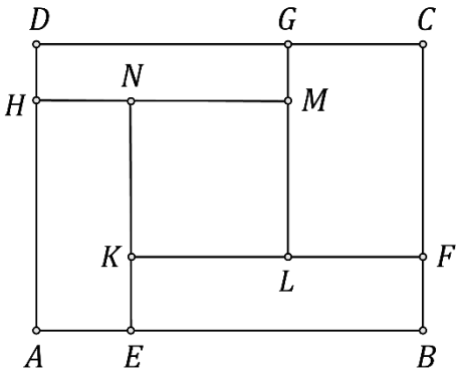
III.) Brišemo obje znamenke 4.
Brisanjem obiju znamenaka 4 dobivamo broj 12356532. Taj broj završava znamenkama 32, pa je djeljiv s 4.

Ukupno postoje četiri broja djeljiva brojem 36 koja se mogu dobiti brisanjem triju znamenaka: 13455432, 12465432, 12456432 i 12356532.

3. Pravokutnik $ABCD$ podijeljen je na pet pravokutnika kao na slici, pri čemu je $KLMN$ kvadrat.

Ako je $|AE| = 6$, $|BF| = 5$, $|DH| = 3$

i ako je površina pravokutnika $AENH$ jednaka 84, a površina pravokutnika $CGLF$ jednaka 120, odredi površinu pravokutnika $ABCD$.



Rješenje.

Površina pravokutnika $AENH$ iznosi 84, a njegova stranica $\overline{AE}$ ima duljinu 6. Zato je duljina druge stranice $|AH| = |EN| = 84 : 6 = 14$.

Stoga je $|AD| = |AH| + |HD| = 14 + 3 = 17$ i naravno $|BC| = |AD| = 17$.

Slijedi $|CF| = |BC| - |BF| = 17 - 5 = 12$.

Duljina stranice kvadrata $KLMN$ je $|KL| = |KN| = |EN| - |EK| = |AH| - |BF| = 14 - 5 = 9$.

Površina pravokutnika $CGLF$ iznosi 120, a jedna njegova stranica $\overline{CF}$ ima duljinu 12. Zato je duljina druge stranice $|LF| = |GC| = 120 : 12 = 10$.

Vrijedi $|EB| = |KF| = |KL| + |LF| = 9 + 10 = 19$, pa je $|AB| = |AE| + |EB| = 6 + 19 = 25$.

Površina pravokutnika $ABCD$ je

$$|AB| \cdot |AD| = 25 \cdot 17 = 425.$$

4. Svaki od 24 učenika u razredu voli barem jedan od predmeta: Matematika, Priroda, Geografija i Engleski jezik. Ukupno 13 učenika voli Matematiku, 8 učenika Prirodu, 10 učenika Geografiju i 6 učenika Engleski jezik. Ukupno 4 učenika vole Matematiku i Prirodu, 5 učenika voli Matematiku i Geografiju, 3 učenika vole Prirodu i Geografiju, a 2 učenika vole sva četiri predmeta. Nijedan učenik ne voli točno tri predmeta. Broj učenika koji vole samo Engleski jezik jednak je broju učenika koji vole samo Geografiju. Koliko učenika voli Matematiku i niti jedan drugi predmet?

Prvo rješenje.

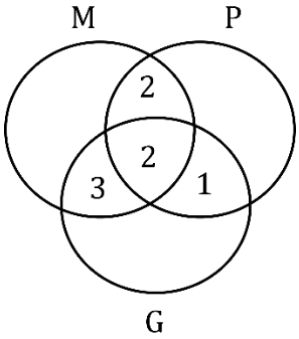
Umjesto punih naziva predmeta pisat ćemo kratko M, P, G, E.

Dva učenika vole sva četiri predmeta, a nijedan učenik ne voli točno tri predmeta.

Odredimo koliko učenika voli po dva predmeta.

Učenika koji vole M i P, a ne vole G i E ima $4 - 2 = 2$, jer su među 4 učenika koji vole M i P uključeni i učenici koji vole sva četiri predmeta. Učenika koji vole M i G, a ne vole P i E ima $5 - 2 = 3$, a učenika koji vole P i G, a ne vole M i E ima $3 - 2 = 1$.

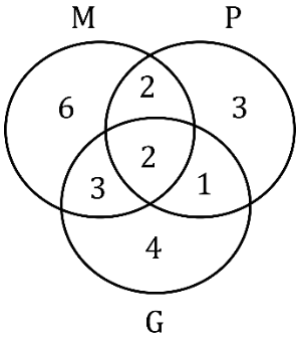
Budući da još ne možemo odrediti koliko je učenika koji vole samo M i E, samo P i E, odnosno samo G i E, promotrimo Vennov dijagram za Matematiku, Prirodu i Geografiju, neovisno o Engleskom jeziku. Upišimo brojeve koje znamo:



Od 13 učenika koji vole Matematiku, $2 + 2 + 3 = 7$ ih je već upisano u Vennov dijagram jer vole i P ili G (ili i P i G). Još je $13 - 7 = 6$ učenika koji vole samo M ili samo M i E.

Od 8 učenika koji vole Prirodu, $2 + 2 + 1 = 5$ ih je već upisano u Vennov dijagram jer vole i M ili G (ili i M i G). Još je $8 - 5 = 3$ učenika koji vole samo P ili samo P i E.

Od 10 učenika koji vole Geografiju, $2 + 1 + 3 = 6$ ih je već upisano u Vennov dijagram jer vole i M ili P (ili i M i P). Još je $10 - 6 = 4$ učenika koji vole samo G ili samo G i E.



U Vennovom dijagramu ukupno je 21 učenik koji voli barem jedan od tri promatrana predmeta.

U razredu su ukupno 24 učenika, a preostala $24 - 21 = 3$ učenika vole samo E.

Prema uvjetu zadatka, broj učenika koji vole samo G je također 3.

Dakle, od 4 učenika koja vole G, a ne vole M niti P, tri su učenika koja vole samo G, dok jedan učenik voli G i E.

Znamo da Engleski jezik voli 6 učenika. Među njima su dva učenika koji vole sva četiri predmeta, tri učenika koji vole samo E i jedan učenik koji voli E i G – a to je ukupno 6 učenika. To su dakle svi učenici koji vole E.

To znači da od 6 učenika koji vole M, a ne vole P i G, nijedan ne voli E.

Dakle, 6 učenika voli Matematiku i niti jedan drugi predmet.

Drugo rješenje.

Prikažimo učenike i njihove omiljene predmete tablicom. Učenike označimo brojevima od 1 do 24, predmete koje vole označimo s M, P, G i E.

Najprije označimo dva učenika koji vole sva četiri predmeta, a zatim još 11 učenika koji vole M.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Matematika	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Priroda	P	P																						
Geografija	G	G																						
Engleski jezik	E	E																						

Preostali učenici ne vole M.

Od četiri učenika koji vole M i P, dva vole sva četiri predmeta, a dva vole samo M i P (nemoguće je da vole još jedan predmet, jer nema učenika koji vole tri predmeta).

Slično, od pet učenika koji vole M i G, dva vole sva četiri predmeta, a dva vole samo M i G.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Matematika	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Priroda	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-	-	-											
Geografija	G	G	-	-	G	G	G	-	-	-	-	-	-											
Engleski jezik	E	E	-	-	-	-	-																	

Preostalih 6 učenika koji vole M, ne vole ni P ni G. Za sada ne znamo vole li oni E ili ne.

Prema uvjetima zadatka, tri učenika vole P i G. Dva od njih su učenici koji vole sva četiri predmeta, a treći voli samo P i G. Osim njih, postoje još tri učenika koji vole P. Oni ne vole ni M ni G. Također, postoje još četiri učenika koja vole G, a ne vole ni M ni P.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Matematika	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Priroda	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-
Geografija	G	G	-	-	G	G	G	-	-	-	-	-	-	G	-	-	-	G	G	G	G	-	-	-
Engleski jezik	E	E	-	-	-	-	-							-										

Uočavamo da u razredu postoje još tri učenika koja ne vole ni M ni P ni G. Ti učenici vole samo E.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Matematika	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Priroda	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-
Geografija	G	G	-	-	G	G	G	-	-	-	-	-	-	G	-	-	-	G	G	G	G	-	-	-
Engleski jezik	E	E	-	-	-	-	-							-								E	E	E

Prema uvjetima zadatka, samo G vole također tri učenika. To znači da jedan učenik voli G i E.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Matematika	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Priroda	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-
Geografija	G	G	-	-	G	G	G	-	-	-	-	-	-	G	-	-	-	G	G	G	G	-	-	-
Engleski jezik	E	E	-	-	-	-	-							-				E	-	-	-	E	E	E

Sada možemo primijetiti da smo već označili 6 učenika koji vole E, pa preostali učenici ne vole E.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Matematika	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Priroda	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	P	P	P	P	-	-	-	-	-	-	-
Geografija	G	G	-	-	G	G	G	-	-	-	-	-	-	G	-	-	-	G	G	G	G	-	-	-
Engleski jezik	E	E	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	E	-	-	-	E	E	E

U razredu je šest učenika koji vole M, a ne vole ni P, ni G, ni E.

Treće rješenje.

Označimo redom e, m, p i g broj učenika koji vole *samo* Engleski jezik, *samo* Matematiku, *samo* Prirodu i *samo* Geografiju. Nadalje, označimo oznakama em, ep, eg, mp, mg i pg broj učenika koji vole samo po dva predmeta pri čemu oznaka sadrži prva slova tih dvaju predmeta.

Budući da svaki od 24 učenika voli barem jedan predmet, točno 2 učenika vole sva četiri predmeta, a nijedan učenik ne voli točno predmeta vrijedi

$$e + m + p + g + em + ep + eg + mp + mg + pg = 22.$$

Budući da Matematiku i Prirodu vole 4 učenika, slijedi $mp = 4 - 2 = 2$.

Slično, $mg = 5 - 2 = 3$, $pg = 3 - 2 = 1$.

Uvrštavanjem u prethodno dobivenu jednakost dobivamo

$$e + m + p + g + em + ep + eg = 22 - 2 - 3 - 1 = 16.$$

Budući da 13 učenika voli Matematiku, zaključujemo

$$m + em + mp + mg = 13 - 2 = 11.$$

Uvrštavanjem $mp = 2$ i $mg = 3$, dobivamo $m + em = 11 - 2 - 3 = 6$.

Na sličan način slijedi

$$p + ep = 8 - 2 - 2 - 1 = 3 \qquad \text{i} \qquad g + eg = 10 - 2 - 3 - 1 = 4.$$

Zbrajanjem $m + em = 6$, $p + ep = 3$ i $g + eg = 4$ slijedi

$$m + p + g + em + ep + eg = 6 + 3 + 4 = 13.$$

Uvrštavanjem u

$$e + m + p + g + em + ep + eg = 16$$

dobivamo $e = 16 - 13 = 3$. Sada možemo zaključiti $g = e = 3$ i $eg = 4 - g = 4 - 3 = 1$.

Budući da 6 učenika voli Engleski, zaključujemo

$$e + em + ep + eg = 6 - 2 = 4.$$

Budući da je $e = 3$ i $eg = 1$, slijedi $em + ep = 4 - 3 - 1 = 0$. Iz toga zaključujemo $em = ep = 0$.

Konačno, iz $m + em = 6$ i $em = 0$ zaključujemo $m = 6$.

Dakle, točno 6 učenika voli samo Matematiku.

5. U kutiji je 25 karata označenih različitim brojevima od 1 do 25. Sanja je iz kutije uzela 12 karata, Igor četiri i Ana tri karte, a šest je karata ostalo u kutiji. Nakon što je svatko pogledao svoje karte, poveo se razgovor.

Sanja: Igore, sigurna sam da je zbroj brojeva na tvojim kartama paran.

Igor: Aha! Sada znam da zbroj brojeva na Aninim kartama nije veći od 45.

Koje su karte kod Igora? Obrazloži.

Rješenje.

Sanja zna samo kojih je 12 karata kod nje, a sigurna je da je zbroj brojeva na Igorove četiri karte paran. Promotrimo kako je to moguće.

Zbroj četiri broja je paran ako su sva četiri broja parna, ako su među njima dva parna i dva neparna broja i ako su sva četiri broja neparna.

Kada bi među kartama koje nisu kod Sanje bilo i parnih i neparnih, Igor bi mogao imati ili jednu kartu s parnim brojem i tri karte s neparnim brojevima ili tri karte s parnim brojevima i jednu s neparnim brojem, a u tim slučajevima zbroj bi bio neparan.

Sanja je dakle sigurna da su sva četiri broja na Igorovim kartama iste parnosti, tj. da su svi parni ili svi neparni.

Među brojevima od 1 do 25 nalazi se 13 neparnih (1, 3, 5, ..., 25) i 12 parnih brojeva (2, 4, 6, ..., 24).

Kako Sanja ima 12 karata, slijedi je svih 12 karata s parnim brojevima kod nje.

Igor to također zna nakon što je Sanja izjavila da je Igorov zbroj paran.

Preostale su karte s brojevima

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

Igor ima četiri od tih karata, a Ana tri.

Ako su kod Igora četiri karte s najvećim (neparnim) brojevima, 25, 23, 21 i 19, onda zbroj brojeva na Aninim kartama može biti najviše $17 + 15 + 13 = 45$.

Da su kod Igora neke karte s manjim brojevima od 25, 23, 21 i 19, onda bi se kod Ane mogle nalaziti neke karte s većim brojevima od 17, 15 i 13, te bi zbroj Aninih karata mogao biti veći.

Dakle, kod Igora su karte s brojevima 19, 21, 23 i 25.

Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 7. listopada 2026.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Irena je u prvom retku ploče napisala neparan troznamenkasti broj kojemu je zbroj znamenaka 12. U drugom je retku napisala troznamenkasti broj istim znamenkama, ali u obrnutom poretku. Oba je broja pomnožila brojem 72. Umnožak u prvom retku je za 7128 veći od umnoška u drugom retku. Koji je troznamenkasti broj Irena napisala u prvom retku? Odredi sve mogućnosti.

Rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ neparni troznamenkasti broj takav da vrijedi $a + b + c = 12$.

Prema uvjetu zadatka je

$$72 \cdot \overline{abc} - 72 \cdot \overline{cba} = 7128$$

$$72 \cdot \left(\overline{abc} - \overline{cba}\right) = 7128$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 7128 : 72 = 99.$$

Prikažimo brojeve $\overline{abc}$ i $\overline{cba}$ u dekadskom zapisu:

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99.$$

Sređivanjem dobivamo $99a - 99c = 99$ i dalje $a - c = 1$. Dakle, $a = c + 1$.

Budući da je broj $\overline{abc}$ neparan, znamenka c mora biti neparna.

Rješenja ćemo tražiti redom tako da u prvom stupcu ispisujemo sve moguće znamenke jedinica, u drugom stupcu pišemo odgovarajuću znamenku stotica (za 1 veća od znamenke jedinica), a u trećem znamenku desetica (tako da zbroj znamenaka bude 12).

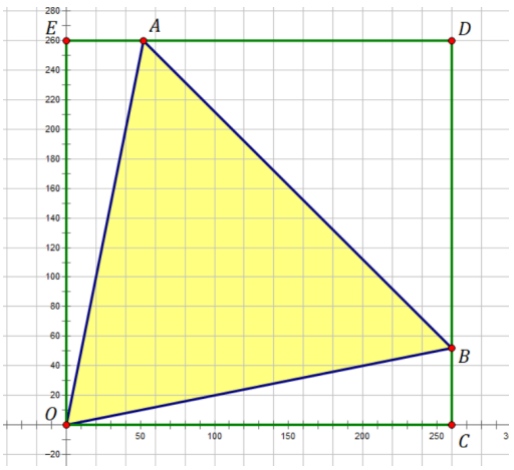
c	$a = c + 1$	$b = 12 - (a + c)$	broj u prvom retku
1	2	9	291
3	4	5	453
5	6	1	615
7	8	–	
9	–		

Traženi brojevi su 291, 453 i 615.

2. Točka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini je *zlatna točka* ako su joj koordinate prirodni brojevi čiji je zbroj 312, a najveći zajednički djelitelj 52.
Odredi površinu lika čiji su vrhovi ishodište i sve zlatne točke.

Rješenje.

Odredimo točke $T(x,y)$ za koje vrijedi $x+y=312$ i $D(x,y)=52$, pri čemu je $x,y\in\mathbb{N}$.



Kako je $D(x,y)=52$, brojevi x i y su višekratnici broja 52, tj. $x=52a$, $y=52b$, pri čemu je $a,b\in\mathbb{N}$, a brojevi a i b su relativno prosti, tj. $D(a,b)=1$.

Tada je $x+y=312$, $52a+52b=312$, $a+b=6$. Jedini prirodni brojevi čiji je zbroj 6, a koji su relativno prosti su 1 i 5. Stoga imamo dvije zlatne točke. Neka su to točke A i B.

Ako je $a=1$ i $b=5$, tada je $x=52$ i $y=260$, $A(52,260)$.

Ako je $a=5$ i $b=1$, tada je $x=260$ i $y=52$, $B(260,52)$.

Lik čiji su vrhovi ishodište i sve zlatne točke je trokut OBA.

Njegovu površinu možemo odrediti tako da od površine pravokutnika $OCDE$ oduzmemo površine trokuta OCB, OAE i BDA.

Pravokutnik $OCDE$ je kvadrat površine $260\cdot 260$, površine trokuta OCB i OAE su jednake i iznose

$$260\cdot 52:2=260\cdot 26,$$

a površina trokuta BDA je

$$(260-52)\cdot(260-52):2=208\cdot 208:2=208\cdot 104.$$

Stoga je tražena površina trokuta OBA jednaka

$$P=260\cdot 260-260\cdot 26-260\cdot 26-208\cdot 104$$
$$P=260\cdot(260-26-26)-104\cdot 208$$
$$P=260\cdot 208-104\cdot 208$$
$$P=(260-104)\cdot 208$$
$$P=156\cdot 208$$
$$P=32448.$$

3. Odredi koliko ima trojki uzastopnih četveroznamenkastih prirodnih brojeva manjih od 4500 takvih da istovremeno vrijedi:

- jedan od brojeva je djeljiv s 2, a nije djeljiv ni s 3 ni s 5,
- jedan od brojeva je djeljiv s 3, a nije djeljiv ni s 2 ni s 5,
- jedan od brojeva je djeljiv s 5, a nije djeljiv ni s 2 ni s 3.

Prvo rješenje.

Prema uvjetima zadatka u svakoj traženoj trojci je točno jedan broj paran, a preostala dva su neparna. Stoga je drugi broj u trojci paran.

Kako broj koji je djeljiv s 5 prema uvjetu zadatka ne smije biti djeljiv s 2, treba imati znamenku jedinica 5. On može biti prvi ili treći broj u trojci jer je drugi broj paran.

Preostali broj treba biti djeljiv s 3. Taj broj će sigurno biti jedini koji je djeljiv s 3 u traženoj trojci jer je među bilo koja tri uzastopna broja uvijek točno jedan djeljiv s 3.

Prema tome, sve tražene trojke mogu se zapisati na jedan od dvaju načina:

$(\overline{abc3}, \overline{abc4}, \overline{abc5})$, gdje je $\overline{abc3}$ djeljiv s 3

$(\overline{abc5}, \overline{abc6}, \overline{abc7})$, gdje je $\overline{abc7}$ djeljiv s 3

Prebrojimo trojke oblika $(\overline{abc3}, \overline{abc4}, \overline{abc5})$, gdje je $\overline{abc3}$ djeljiv s 3 i svi članovi trojke manji su od 4500. Zbroj $a + b + c + 3$ treba biti djeljiv s 3, a to će vrijediti ako je zbroj $a + b + c$ djeljiv s 3. Broj traženih brojeva $\overline{abc3}$ jednak je broju troznamenkastih brojeva $\overline{abc}$ djeljivih s 3 za koje vrijedi $100 \leq \overline{abc} \leq 449$. Najmanji takav broj je $102 = 34 \cdot 3$, a najveći $447 = 149 \cdot 3$, što znači da takvih brojeva ima $149 - 34 + 1 = 116$.

Prebrojimo trojke oblika $(\overline{abc5}, \overline{abc6}, \overline{abc7})$, gdje je $\overline{abc7}$ djeljiv s 3 i svi članovi trojke manji su od 4500. Zbroj $a + b + c + 7$ treba biti djeljiv s 3, a to će vrijediti ako zbroj $a + b + c$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Broj traženih brojeva $\overline{abc7}$ jednak je broju troznamenkastih brojeva $\overline{abc}$ za koje vrijedi $100 \leq \overline{abc} \leq 449$ i koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2. Najmanji takav broj je $101 = 33 \cdot 3 + 2$, a najveći $449 = 149 \cdot 3 + 2$, što znači da takvih brojeva ima $149 - 33 + 1 = 117$.

Ukupan broj traženih trojki je $116 + 117 = 233$.

Drugo rješenje.

Broj 30 je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2, 3 i 5.

Ako je prirodni broj N djeljiv bilo kojim od brojeva 2, 3 i 5, onda će i broj $N + 30$ također biti djeljiv tim brojem. Također, ako N nije djeljiv nekim od tih brojeva, neće biti ni $N + 30$.

Iz toga zaključujemo da ako trojka $(N, N + 1, N + 2)$ zadovoljava sve uvjete zadatka, onda ih zadovoljava i trojka $(N + 30, N + 31, N + 32)$.

U trojci $(N, N + 1, N + 2)$ uzastopnih prirodnih brojeva koja zadovoljava uvjete zadatka točno je jedan broj paran, a preostala dva su neparna. Stoga je drugi broj paran.

Između bilo koja tri uzastopna prirodna broja točno jedan je djeljiv s 3, a u trojci $(N, N + 1, N + 2)$ koja zadovoljava uvjete zadatka to je ili prvi ili treći broj. Preostali broj treba biti djeljiv s 5.

Dakle, razlikujemo dvije vrste trojki $(N, N + 1, N + 2)$ koje zadovoljavaju uvjete zadatka.

U prvom slučaju N je neparan broj djeljiv s 3 koji nije djeljiv s 5 takav da je $N + 2$ višekratnik broja 5.

Promotrimo niz četveroznamenkastih višekratnika broja 3.

N	$N + 2$	**Komentar**
1002	1004	N je djeljiv s 2
1005	1007	N je djeljiv s 5
1008	1010	N je djeljiv s 2
1011	1013	$N + 2$ nije djeljiv s 5
1014	1016	N je djeljiv s 2
1017	1019	$N + 2$ nije djeljiv s 5
1020	1021	N je djeljiv s 2
1023	1025	zadovoljava sve uvjete
1026	1027	N je djeljiv s 2
1029	1032	$N + 2$ nije djeljiv s 5

Zaključujemo da je najmanji takav četveroznamenkasti broj 1023, te da nijedan drugi višekratnik broja 3 između 1000 i 1030 ne zadovoljava to svojstvo.

U ovom slučaju najmanja tražena trojka je (1023, 1024, 1025), a sve ostale dobivamo pribrajanjem broja 30 svim članovima trojke.

Pribrajanjem broja 30 dobivamo:

$$1023, \quad 1023 + 30 = 1053, \quad 1023 + 2 \cdot 30 = 1083,$$

$$1023 + 3 \cdot 30 = 1113, \quad \ldots, \quad 1023 + 100 \cdot 30 = 4023, \quad \ldots,$$

$$1023 + 110 \cdot 30 = 4323, \quad \ldots, \quad 1023 + 115 \cdot 30 = 4473, \quad 1023 + 116 \cdot 30 = 4503, \ldots$$

U tom nizu je 116 brojeva manjih od 4500, te stoga zaključujemo da u ovom slučaju imamo 116 trojki.

U drugom slučaju N je neparan broj djeljiv s 5 koji nije djeljiv s 3, a broj $N + 2$ je višekratnik broja 3.

Promotrimo niz četveroznamenkastih višekratnika broja 5.

N	$N + 2$	**Komentar**
1000	1002	N je djeljiv s 2
1005	1007	$N + 2$ nije djeljiv s 3
1010	1012	N je djeljiv s 2
1015	1017	Zadovoljava sve uvjete
1020	1022	N je djeljiv s 2
1025	1027	$N + 2$ nije djeljiv s 3

Zaključujemo da je najmanji takav četveroznamenkasti broj 1015, te da nijedan drugi višekratnik broja 5 između 1000 i 1030 ne zadovoljava to svojstvo.

U ovom slučaju najmanja tražena trojka je (1015, 1016, 1017), a sve ostale dobivamo pribrajanjem broja 30 svim članovima trojke.

Pribrajanjem broja 30 dobivamo:

$$1015, \quad 1015 + 30 = 1045, \quad 1015 + 2 \cdot 30 = 1075,$$

$$1015 + 3 \cdot 30 = 1105, \quad \ldots, \quad 1015 + 100 \cdot 30 = 4015, \quad \ldots,$$

$$1015 + 110 \cdot 30 = 4315, \quad \ldots, \quad 1015 + 116 \cdot 30 = 4495, \quad 1023 + 117 \cdot 30 = 4525, \ldots$$

U tom nizu je 117 brojeva manjih od 4500, te stoga zaključujemo da u ovom slučaju imamo 117 trojki.

Ukupno ima 116 + 117 = 233 trojki koje zadovoljavaju uvjete zadatka.

Treće rješenje.

Ako trojka zadovoljava uvjete zadatke, onda je jedan od brojeva djeljiv s 5, a nije djeljiv ni s 2 ni s 3. Pokažimo da svaki takav broj pripada točno jednoj trojci koja zadovoljava uvjete zadatka.

Promotrimo jedan takav broj N, te njegova dva prethodnika i dva sljedbenika:

$$N - 2 \qquad N - 1 \qquad N \qquad N + 1 \qquad N + 2$$

Brojevi $N - 1$ i $N + 1$ su parni jer N nije paran, pa ne mogu oba biti u trojci koja zadovoljava uvjete zadatka. Stoga jedino trojke $(N - 2, N - 1, N)$ i $(N, N + 1, N + 2)$ mogu zadovoljavati uvjete zadatka.

Od brojeva $N - 1$ i $N + 1$ točno jedan je djeljiv s 3.

Ako je $N - 1$ djeljiv s 3, onda je i $N + 2$ djeljiv s 3, a nije djeljiv ni s 2 ni s 5.

Tada trojka $(N, N + 1, N + 2)$ zadovoljava sve uvjete zadatka, a trojka $(N - 2, N - 1, N)$ ne zadovoljava te uvjete.

Ako je $N+1$ djeljiv s 3, onda je i $N-2$ djeljiv s 3, a nije djeljiv ni s 2 ni s 5.

Tada trojka $(N-2, N-1, N)$ zadovoljava sve uvjete zadatka, a trojka $(N, N+1, N+2)$ ne zadovoljava te uvjete.

Dakle, ukupan broj trojki koje zadovoljavaju uvjete zadatke jednak je broju četveroznamenkastih brojeva manjih od 4500 koji su djeljivi s 5, a nisu djeljivi ni s 2 ni s 3.

Promotrimo redom višekratnike broja 5. Počevši od 1000, svaki drugi je djeljiv s 2 (dodavanjem broja 10 ne mijenja se parnost), a počevši od 1005 svaki treći je djeljiv s 3 (dodavanjem broja 15 ne mijenja se ostatak pri dijeljenju s 3).

Zbog ove pravilnosti, kad odredimo jedan višekratnik broja 5 koji nije djeljiv ni s 2 ni s 3, svaki šesti višekratnik broja 5 također neće biti djeljiv ni s 2 ni s 3.

	1000	**1005**	**1010**	**1015**	**1020**	**1025**	**1030**
Djeljiv s 2	DA	NE	DA	NE	DA	NE	DA
Djeljiv s 3	NE	DA	NE	NE	DA	NE	NE
Djeljiv s 5	DA	DA	DA	DA	DA	DA	DA

Iz tablice vidimo da su među prvih šest višekratnika broja 5, točno dva takva da nisu djeljiva ni s 2 ni s 3, a to su 1015 i 1025. Oni redom daju tražene trojke (1015, 1016, 1017) i (1023, 1024, 1025).

Stoga slijedi da među svakih šest uzastopnih višekratnika broja 5 postoji točno dva koja nisu djeljiva ni s 2 ni s 3.

Svih višekratnika broja 5 od 1000 do 4500 ima (4500 – 1000) : 5 + 1 = 701.

Budući da je 701 : 6 = 116 i ostatak 5, zaključujemo da će u nizu višekratnika broja 5 imati 116 uzastopnih šestorki, te još pet brojeva: 4480, 4485, 4490, 4495, 4500, od kojih samo 4495 nije djeljiv ni s 2 ni s 3.

Dakle, ukupno ima $2 \cdot 116 + 1 = 233$ četveroznamenkastih višekratnika broja 5 manjih od 4500 koji nisu djeljivi ni s 2 ni s 3, pa toliko ima i traženih trojki.

Napomena: Umjesto uočavanja pravilnosti, višekratnike broja 5 koji nisu djeljivi ni s 2 ni s 3 možemo prebrojiti na sljedeći način. Prvo odredimo broj četveroznamenkastih brojeva manjih od 4500 koji su djeljivi s 5. Prvi takav broj je 1000, a posljednji je 4495. Kako je $1000 = 200 \cdot 5$, a $4495 = 899 \cdot 5$, ima 899 – 200 + 1 = 700 četveroznamenkastih višekratnika broja 5 koji su manji od 4500.

Među tim višekratnicima nalaze se i oni koji su djeljivi i s 5 i s 2 (djeljivi su s 10) te oni koji su djeljivi i s 5 i s 3 (djeljivi su s 15). Njihov ćemo broj oduzeti od 700. Najmanji četveroznamenkasti višekratnik broja 10 je 1000, a najveći 4490. Kako je $1000 = 100 \cdot 10$, a $4490 = 449 \cdot 10$, ima 449 – 100 + 1 = 350 četveroznamenkastih višekratnika broja 10 manjih od 4500.

Najmanji četveroznamenkasti višekratnik broja 15 je 1005, najveći 4485. Kako je $1005 = 67 \cdot 15$, a $4485 = 299 \cdot 15$, ima 299 – 67 + 1 = 233 četveroznamenkastih višekratnika broja 15 manjih od 4500.

Dakle, kad od broja višekratnika broja 5 oduzmemo broj višekratnika brojeva 10 i 15 dobijemo

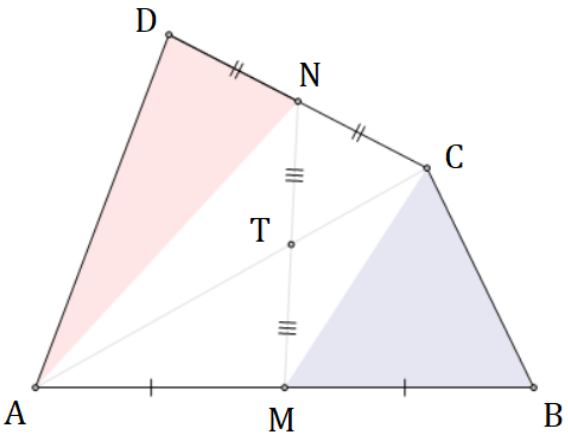
700 – 350 – 233 = 117.

Kako smo dvaput oduzeli brojeve koji su djeljivi i s 5 i s 2 i s 3 (djeljivi su s 30), broju 117 moramo dodati broj višekratnika broja 30. Najmanji četveroznamenkasti višekratnik broja 30 je 1020, najveći 4490. Kako je $1020 = 34 \cdot 30$, a $4470 = 149 \cdot 30$, ima 149 – 34 + 1 = 116 četveroznamenkastih višekratnika broja 30 koji su manji od 4500.

Stoga je ukupan broj četveroznamenkastih višekratnika broja 5 manjih od 4500 koji nisu djeljivi ni s 2 ni s 3 jednak 117 + 116 = 233.

4. Veličine svih unutarnjih kutova četverokuta $ABCD$ manje su od 180°. Točka M je polovište stranice $\overline{AB}$, a točka N polovište stranice $\overline{CD}$. Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli dužinu $\overline{MN}$ na dva sukladna dijela. Dokaži da trokuti MBC i NDA imaju jednake površine.

Prvo rješenje.



Neka je T sjecište dužina $\overline{MN}$ i $\overline{AC}$.

Trokuti MCT i TCN imaju sukladne stranice $\overline{NT}$ i $\overline{TM}$ te zajedničku visinu iz vrha C na te stranice pa imaju jednake površine, $P_{\Delta MCT} = P_{\Delta TCN} = P_1$.

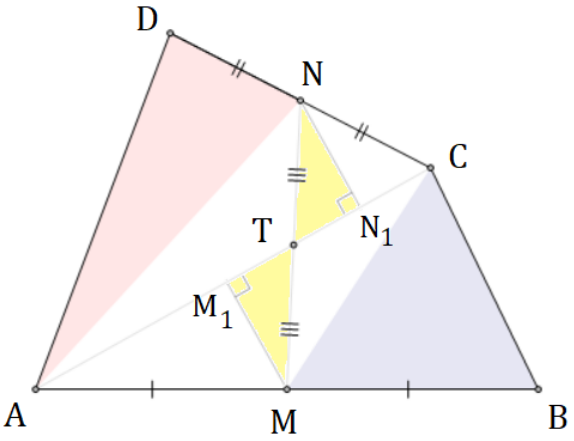
Trokuti AMT i ATN imaju sukladne stranice $\overline{NT}$ i $\overline{TM}$ te zajedničku visinu iz vrha A na te stranice pa imaju jednake površine, $P_{\Delta AMT} = P_{\Delta ATN} = P_2$.

Trokuti AMC i MBC imaju sukladne stranice $\overline{AM}$ i $\overline{MB}$ te zajedničku visinu iz vrha C na te stranice pa imaju jednake površine, $P_{\Delta AMC} = P_{\Delta MBC} = P_1 + P_2$.

Trokuti CNA i NDA imaju sukladne stranice $\overline{CN}$ i $\overline{ND}$ te zajedničku visinu iz vrha A na te stranice pa imaju jednake površine, $P_{\Delta CNA} = P_{\Delta NDA} = P_1 + P_2$.

Uočimo da je tada i $P_1 + P_2 = P_{\Delta MBC} = P_{\Delta NDA}$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

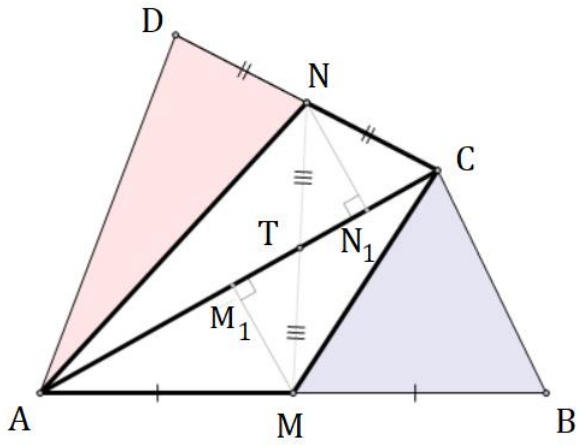


Neka je $\overline{MM_1}$ visina trokuta AMC, a $\overline{NN_1}$ visina trokuta ACN i neka je T sjecište dužina $\overline{MN}$ i $\overline{AC}$.

Promotrimo trokute TM_1M i TN_1N.

Oba trokuta su pravokutna, a kutovi pri vrhu T su sukladni jer su vršni. Budući da su im dva kuta sukladna i preostali, treći kutovi, su sukladni. Kako je i $|TM| = |TN|$, zaključujemo da su trokuti TM_1M i TN_1N sukladni prema KSK poučku.

Tada vrijedi i $|MM_1| = |NN_1|$.



Promotrimo trokute AMC i ACN.

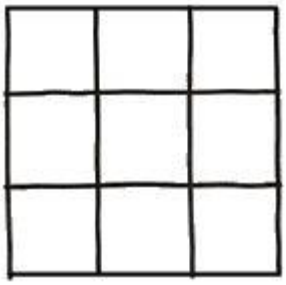
Stranica $\overline{AC}$ im je zajednička, a visine $\overline{MM_1}$ i $\overline{NN_1}$ su jednakih duljina. Tada su im i površine jednake, $P_{\Delta AMC} = P_{\Delta ACN}$.

Trokuti AMC i MBC imaju sukladne stranice $\overline{AM}$ i $\overline{MB}$ te zajedničku visinu iz vrha C na te stranice pa imaju jednake površine, $P_{\Delta AMC} = P_{\Delta MBC}$.

Trokuti ACN i NDA imaju sukladne stranice $\overline{CN}$ i $\overline{ND}$ te zajedničku visinu iz vrha A na te stranice pa imaju jednake površine, $P_{\Delta ACN} = P_{\Delta NDA}$.

Kako smo već dokazali da je $P_{\Delta AMC} = P_{\Delta ACN}$, tada je i $P_{\Delta MBC} = P_{\Delta NDA}$, što je i trebalo dokazati.

5. Na školskoj ploči je nacrtana tablica s devet polja kao na slici. Dva igrača igraju igru križić-kružić tako da naizmjence upisuju po jedan znak u prazno polje u tablici. U svakom potezu prvi igrač upisuje križić, a drugi igrač upisuje kružić. Igra završava ako su u tri polja u istom retku, stupcu ili na dijagonali upisani isti znakovi. Koliko postoji različitih završnih rasporeda križića i kružića ako je igra završila kada je upisan šesti znak?



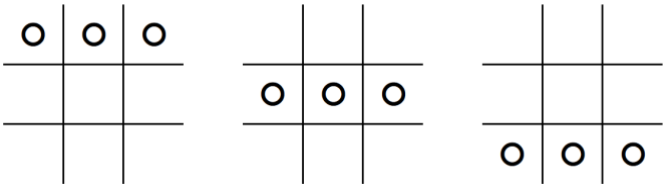
Rješenje.

Budući da igrači naizmjence upisuju križić i kružić, šest upisanih znakova moraju biti tri križića i tri kružića. Igra je završila kad je upisan šesti znak pa zaključujemo da je pobijedio drugi igrač, koji upisuje kružiće. To znači da prvi igrač nije upisao svoja tri križića u istom retku, stupcu ili na dijagonali, a drugi igrač uspio je upisati tri kružića u istom retku, stupcu ili na dijagonali.

Prebrojimo sve moguće završne rasporede upisanih znakova koji zadovoljavaju navedene uvjete.

1. slučaj: Tri kružića upisana u retku

Drugi igrač može upisati svoja tri kružića u bilo koji od 3 retka (gornji, srednji ili donji).



Recimo da su tri kružića u prvom retku. Prvi igrač morao je na tri od preostalih šest mjesta upisati križiće. Međutim, nije ih upisao u isti redak jer bi u tom slučaju on pobijedio.

To znači da su u jednom od dva retka upisana dva križića, a u preostalom retku jedan križić. Dva su retka, pa su i dvije mogućnosti za odabir retka s dva križića.

Dva je križića u isti redak mogao upisati na tri načina, a treći križić mogao je u preostali redak upisati također na tri načina. To je ukupno $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ načina.

Dakle, postoji 18 različitih konačnih rasporeda križića ako je drugi igrač upisao kružiće u prvi redak.

Budući da je drugi igrač mogao upisati kružiće u bilo koji od tri retka, ukupno su $18 \cdot 3 = 54$ rasporeda.

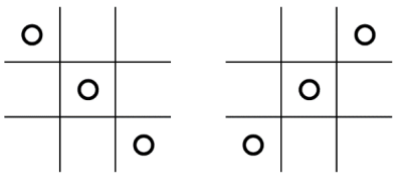
2. slučaj: Tri kružića upisana u stupcu

Drugi igrač može upisati svoja 3 kružića u bilo koji od 3 stupca (lijevi, srednji ili desni).

Jednakim zaključivanjem kao i za retke, prvi igrač je u svakom od tih slučaja imao 18 načina za upisati križiće. Ukupno su $18 \cdot 3 = 54$ rasporeda.

3. slučaj: Tri kružića upisana na dijagonali

Drugi igrač može pobijediti tako da upiše 3 kružića na jednu od dijagonala. Pretpostavimo da je drugi igrač postavio svoje kružiće kao što je prikazano na lijevoj slici.



Prvi igrač morao je na 3 od preostalih 6 mjesta upisati križiće. Možemo uočiti da među tih preostalih 6 mjesta nikoja tri mjesta nisu u istom retku ili stupcu, odnosno na istoj dijagonali.

Razlikujemo slučajeve prema tome koliko se križića nalazi iznad dijagonale.

Ako su iznad dijagonale sva tri križića, onda imamo jedan način za postavljanje križića.

Ako su iznad dijagonale dva križića, onda ispod dijagonale treba biti jedan križić. Mjesto križića ispod dijagonale možemo odrediti na tri načina, a moguće kombinacije pozicija dva križića iznad dijagonale također na tri načina, pa dobivamo ukupno $3 \cdot 3 = 9$ načina.

Ako je iznad dijagonale jedan križić, onda ispod dijagonale trebaju biti dva križića, te kao u prethodnom slučaju dobivamo ukupno $3 \cdot 3 = 9$ načina.

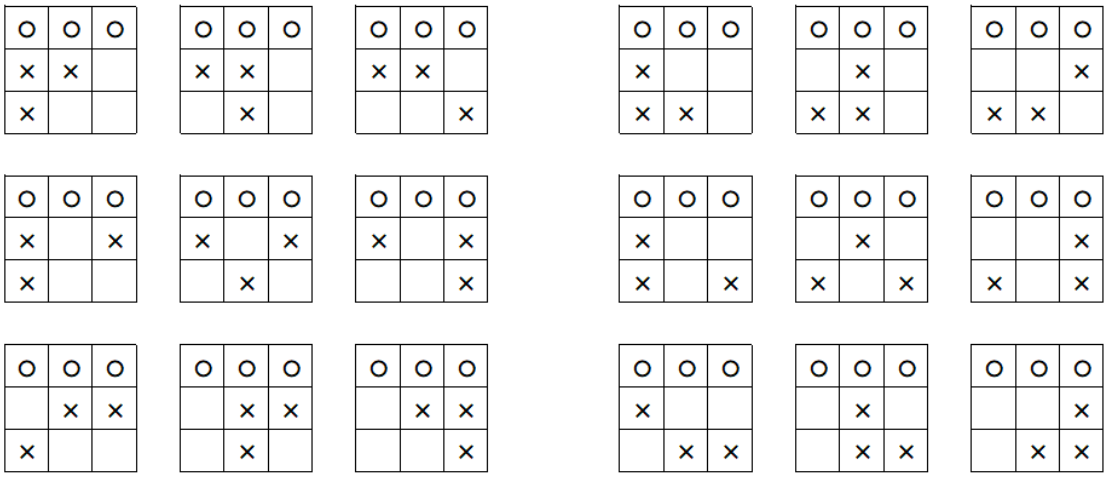
Konačno, ako iznad dijagonale nema križića, onda imamo samo jedan način – tako da svi križići budu ispod dijagonale.

Dakle, u ovom slučaju ima 1 + 9 + 9 + 1 = 20 načina.

Jednak je broj mogućih rasporeda i ako se kružići nalaze na drugoj dijagonali. Zato u ovom slučaju postoji ukupno $20 \cdot 2 = 40$ rasporeda.

Ukupan broj mogućih završnih rasporeda križića i kružića u sva tri slučaja je $54 + 54 + 40 = 148$.

Napomena. Broj rasporeda u slučaju da su kružići u npr. prvom retku možemo također odrediti ispisivanjem svih mogućnosti:



Broj rasporeda u slučaju da su kružići na jednoj dijagonali možemo odrediti također ispisivanjem:

