

Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 7. listopada 2026.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. Borna skuplja sličice koje se prodaju u tri vrste paketića. U paketiću mogu biti tri, četiri ili pet sličica. Od bake je dobio 33 paketića s ukupno 118 sličica. Među tim paketićima je dvostruko više onih s tri sličice nego svih ostalih paketića zajedno. Koliko je paketića svake vrste Borna dobio?

Rješenje.

Budući da je Borna dobio dvostruko više paketića s tri sličice nego svih paketića s četiri ili pet sličica zajedno, zaključujemo da jednu trećinu ukupnog broja paketića čine paketići s četiri ili pet sličica, a dvije trećine su paketići s tri sličice. Paketića s četiri ili pet sličica ima $33 : 3 = 11$, a paketića s tri sličice ima $2 \cdot 11 = 22$.

U 22 paketića od tri sličice nalazi se $22 \cdot 3 = 66$ sličica, a u preostalih 11 paketića $118 - 66 = 52$ sličice.

Kad bi svih 11 paketića sadržavalo po četiri sličice, zajedno bi sadržavali $11 \cdot 4 = 44$ sličice.

Kako je ukupan broj sličica 52, razlika $52 - 44 = 8$ znači da se u 8 paketića nalazi po pet sličica, a u $11 - 8 = 3$ paketića nalaze se po četiri sličice.

Borna je dobio 22 paketića od tri sličice, 3 paketića od četiri sličice i 8 paketića od pet sličica.

2. U računalnom programu za uređivanje teksta napisan je broj 12345654321. Neka je N najmanji broj znamenaka koje treba obrisati kako bi preostale znamenke, bez promjene redoslijeda, tvorile broj djeljiv brojem 36.

a) Odredi broj N .

b) Odredi sve brojeve djeljive brojem 36 koji se mogu dobiti na opisani način brisanjem N znamenaka.

Rješenje.

a) Kako bi broj bio djeljiv s 36, mora biti djeljiv s 4 i s 9. Kako bi broj bio djeljiv s 4, njegove posljednje dvije znamenke moraju tvoriti broj djeljiv s 4, a kako bi broj bio djeljiv s 9, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv s 9.

Broj 12345654321 nije paran, pa posljednju znamenku 1 sigurno treba obrisati. Tako dobivamo broj 1234565432, koji završava s 32, a broj 32 djeljiv je s 4.

Zbroj znamenaka broja 1234565432 iznosi 35, pa taj broj nije djeljiv s 9.

Budući da je 35 za 8 veće od najbližega manjeg višekratnika broja 9, potrebno je zbroj znamenaka smanjiti za još najmanje 8. To nije moguće postići brisanjem samo još jedne znamenke.

Brisanjem dviju znamenaka to je moguće. Npr. brisanjem dviju znamenaka 4 dobije se broj 12356532 koji je djeljiv s 36.

Budući da nakon brisanja znamenke 1 treba obrisati još najmanje dvije znamenke, potrebno je obrisati najmanje tri znamenke da bi dobiveni broj bio djeljiv s 36. Traženi je broj $N = 3$.

b) Osim posljednje znamenke 1, broju 1234565432 čiji je zbroj znamenaka 35 potrebno je obrisati još dvije znamenke tako da rezultat bude djeljiv s 36.

Zbroj dviju znamenaka tog broja je najviše $6 + 5 = 11$, pa treba obrisati dvije znamenke čiji je zbroj jednak 8. To su sljedeći parovi znamenaka: 2 i 6, 3 i 5 ili 4 i 4. Razmatramo tri slučaja.

I.) Brišemo znamenke 2 i 6.

Ne možemo obrisati posljednju znamenku 2 jer bi tada broj završavao znamenkama 43, a broj 43 nije djeljiv s 4. Zato moramo obrisati prvu znamenku 2 i znamenku 6. Dobivamo broj 13455432.

II.) Brišemo znamenke 3 i 5.

Ne možemo obrisati znamenku 3 koja se nalazi neposredno ispred završne znamenke 2 jer bi tada broj završavao znamenkama 42, a broj 42 nije djeljiv s 4. Zato moramo obrisati prvu znamenku 3 i jednu od dviju znamenaka 5. Tako dobivamo brojeve 12465432 i 12456432.

III.) Brišemo obje znamenke 4.

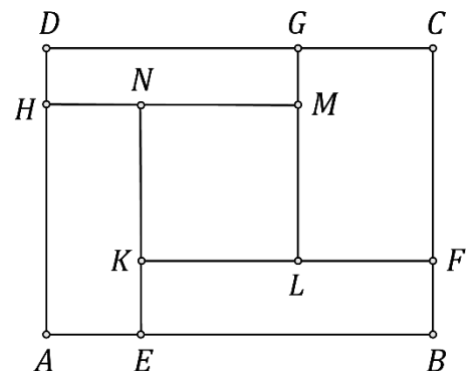
Brisanjem obje znamenaka 4 dobivamo broj 12356532. Taj broj i dalje završava znamenkama 32, pa je djeljiv s 4.

Ukupno postoje četiri broja djeljiva brojem 36 koja se mogu dobiti brisanjem triju znamenaka: 13455432, 12465432, 12456432 i 12356532.

3. Pravokutnik $ABCD$ podijeljen je na pet pravokutnika kao na slici, pri čemu je $KLMN$ kvadrat.

Ako je $|AE| = 6$, $|BF| = 5$, $|DH| = 3$

i ako je površina pravokutnika $AENH$ jednaka 84, a površina pravokutnika $CGLF$ jednaka 120, odredi površinu pravokutnika $ABCD$.



Rješenje.

Površina pravokutnika $AENH$ iznosi 84, a njegova stranica $\overline{AE}$ ima duljinu 6. Zato je duljina druge stranice $|AH| = |EN| = 84 : 6 = 14$.

Stoga je $|AD| = |AH| + |HD| = 14 + 3 = 17$ i naravno $|BC| = |AD| = 17$.

Slijedi $|CF| = |BC| - |BF| = 17 - 5 = 12$.

Duljina stranice kvadrata $KLMN$ je $|KL| = |KN| = |EN| - |EK| = |AH| - |BF| = 14 - 5 = 9$.

Površina pravokutnika $CGLF$ iznosi 120, a jedna njegova stranica $\overline{CF}$ ima duljinu 12. Zato je duljina druge stranice $|LF| = |GC| = 120 : 12 = 10$.

Vrijedi $|EB| = |KF| = |KL| + |LF| = 9 + 10 = 19$, pa je $|AB| = |AE| + |EB| = 6 + 19 = 25$.

Površina pravokutnika $ABCD$ je

$$|AB| \cdot |AD| = 25 \cdot 17 = 425.$$

4. Svaki od 24 učenika u razredu voli barem jedan od predmeta: Matematika, Priroda, Geografija i Engleski jezik. Ukupno 13 učenika voli Matematiku, 8 učenika Prirodu, 10 učenika Geografiju i 6 učenika Engleski jezik. Ukupno 4 učenika vole Matematiku i Prirodu, 5 učenika voli Matematiku i Geografiju, 3 učenika vole Prirodu i Geografiju, a 2 učenika vole sva četiri predmeta. Nijedan učenik ne voli točno tri predmeta. Broj učenika koji vole samo Engleski jezik jednak je broju učenika koji vole samo Geografiju. Koliko učenika voli Matematiku i niti jedan drugi predmet?

Prvo rješenje.

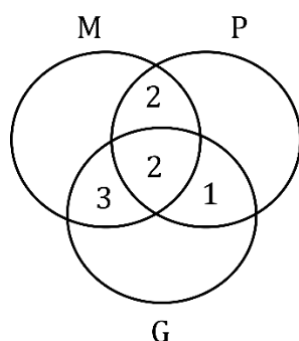
Umjesto punih naziva predmeta pisat ćemo kratko M, P, G, E.

Dva učenika vole sva četiri predmeta, a nijedan učenik ne voli točno tri predmeta.

Odredimo koliko učenika voli po dva predmeta.

Učenika koji vole M i P, a ne vole G i E ima $4 - 2 = 2$, jer su među 4 učenika koji vole M i P uključeni i učenici koji vole sva četiri predmeta. Učenika koji vole M i G, a ne vole P i E ima $5 - 2 = 3$, a učenika koji vole P i G, a ne vole M i E ima $3 - 2 = 1$.

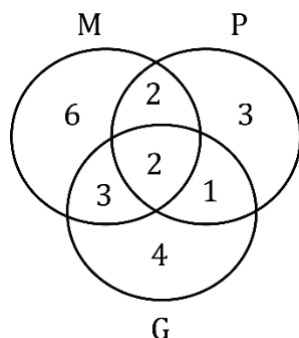
Budući da još ne možemo odrediti koliko je učenika koji vole samo M i E, samo P i E, odnosno samo G i E, promotrimo Vennov dijagram za Matematiku, Prirodu i Geografiju, neovisno o Engleskom jeziku. Upišimo brojeve koje znamo:



Od 13 učenika koji vole Matematiku, $2 + 2 + 3 = 7$ ih je već upisano u Vennov dijagram jer vole i P ili G (ili i P i G). Još je $13 - 7 = 6$ učenika koji vole samo M ili samo M i E.

Od 8 učenika koji vole Prirodu, $2 + 2 + 1 = 5$ ih je već upisano u Vennov dijagram jer vole i M ili G (ili i M i G). Još je $8 - 5 = 3$ učenika koji vole samo P ili samo P i E.

Od 10 učenika koji vole Geografiju, $2 + 1 + 3 = 6$ ih je već upisano u Vennov dijagram jer vole i M ili P (ili i M i P). Još je $10 - 6 = 4$ učenika koji vole samo G ili samo G i E.



U Vennovom dijagramu ukupno je 21 učenik koji voli barem jedan od tri promatrana predmeta.

U razredu su ukupno 24 učenika, a preostala $24 - 21 = 3$ učenika vole samo E.

Prema uvjetu zadatka, broj učenika koji vole samo G je također 3.

Dakle, od 4 učenika koja vole G, a ne vole M niti P, tri su učenika koja vole samo G, dok jedan učenik voli G i E.

Znamo da Engleski jezik voli 6 učenika. Među njima su dva učenika koji vole sva četiri predmeta, tri učenika koji vole samo E i jedan učenik koji voli E i G – a to je ukupno 6 učenika. To su dakle svi učenici koji vole E.

To znači da od 6 učenika koji vole M, a ne vole P i G, nijedan ne voli E.

Dakle, 6 učenika voli Matematiku i niti jedan drugi predmet.

Drugo rješenje.

Označimo redom e, m, p i g broj učenika koji vole *samo* Engleski jezik, *samo* Matematiku, *samo* Prirodu i *samo* Geografiju. Nadalje, označimo oznakama em, ep, eg, mp, mg i pg broj učenika koji vole samo po dva predmeta pri čemu oznaka sadrži prva slova tih dvaju predmeta.

Budući da svaki od 24 učenika voli barem jedan predmet, točno 2 učenika vole sva četiri predmeta, a nijedan učenik ne voli točno predmeta vrijedi

$$e + m + p + g + em + ep + eg + mp + mg + pg = 22.$$

Budući da Matematiku i Prirodu vole 4 učenika, slijedi $mp = 4 - 2 = 2$.

Slično, $mg = 5 - 2 = 3$, $pg = 3 - 2 = 1$.

Uvrštavanjem u prethodno dobivenu jednakost dobivamo

$$e + m + p + g + em + ep + eg = 22 - 2 - 3 - 1 = 16.$$

Budući da 13 učenika voli Matematiku, zaključujemo

$$m + em + mp + mg = 13 - 2 = 11.$$

Uvrštavanjem $mp = 2$ i $mg = 3$, dobivamo $m + em = 11 - 2 - 3 = 6$.

Na sličan način slijedi

$$p + ep = 8 - 2 - 2 - 1 = 3 \quad \text{i} \quad g + eg = 10 - 2 - 3 - 1 = 4.$$

Zbrajanjem $m + em = 6$, $p + ep = 3$ i $g + eg = 4$ slijedi

$$m + p + g + em + ep + eg = 6 + 3 + 4 = 13.$$

Uvrštavanjem u

$$e + m + p + g + em + ep + eg = 16$$

dobivamo $e = 16 - 13 = 3$. Sada možemo zaključiti $g = e = 3$ i $eg = 4 - g = 4 - 3 = 1$.

Budući da 6 učenika voli Engleski, zaključujemo

$$e + em + ep + eg = 6 - 2 = 4.$$

Budući da je $e = 3$ i $eg = 1$, slijedi $em + ep = 4 - 3 - 1 = 0$. Iz toga zaključujemo $em = ep = 0$.

Konačno, iz $m + em = 6$ i $em = 0$ zaključujemo $m = 6$.

Dakle, točno 6 učenika voli samo Matematiku.

5. U kutiji je 25 karata označenih različitim brojevima od 1 do 25. Sanja je iz kutije uzela 12 karata, Igor četiri i Ana tri karte, a šest je karata ostalo u kutiji. Nakon što je svatko pogledao svoje karte, poveo se razgovor.

Sanja: Igore, sigurna sam da je zbroj brojeva na tvojim kartama paran.

Igor: Aha! Sada znam da zbroj brojeva na Aninim kartama nije veći od 45.

Koje su karte kod Igora? Obrazloži.

Rješenje.

Sanja zna samo kojih je 12 karata kod nje, a sigurna je da je zbroj brojeva na Igorove četiri karte paran. Promotrimo kako je to moguće.

Zbroj četiri broja je paran ako su sva četiri broja parna, ako su među njima dva parna i dva neparna broja i ako su sva četiri broja neparna.

Kada bi među kartama koje nisu kod Sanje bilo i parnih i neparnih, Igor bi mogao imati ili jednu kartu s parnim brojem i tri karte s neparnim brojevima ili tri karte s parnim brojevima i jednu s neparnim brojem, a u tim slučajevima zbroj bi bio neparan.

Sanja je dakle sigurna da su sva četiri broja na Igorovim kartama iste parnosti, tj. da su svi parni ili svi neparni.

Među brojevima od 1 do 25 nalazi se 13 neparnih (1, 3, 5, ..., 25) i 12 parnih brojeva (2, 4, 6, ..., 24).

Kako Sanja ima 12 karata, slijedi je svih 12 karata s parnim brojevima kod nje.

Igor to također zna nakon što je Sanja izjavila da je Igorov zbroj paran.

Preostale su karte s brojevima

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

Igor ima četiri od tih karata, a Ana tri.

Ako su kod Igora četiri karte s najvećim (neparnim) brojevima, 25, 23, 21 i 19, onda zbroj brojeva na Aninim kartama može biti najviše $17 + 15 + 13 = 45$.

Da su kod Igora neke karte s manjim brojevima od 25, 23, 21 i 19, onda bi se kod Ane mogle nalaziti neke karte s većim brojevima od 17, 15 i 13, te bi zbroj Aninih karata mogao biti veći.

Dakle, kod Igora su karte s brojevima 19, 21, 23 i 25.