



Trigonometrijske supstitucije

Okvirna razina: JBMO / SŠ A var. državno

Lekciju priredio: doc. dr. sc. Matko Ljulj

Datum objave: 12. listopada 2026.

1. Teorija i primjeri

U ovoj lekciji obradit ćemo neke zadatke iz algebre koji nisu iskazani pomoću trigonometrijskih funkcija, no odgovarajuće supstitucije olakšat će rješavanje tih zadataka. Cilj je pokazati koje supstitucije možemo koristiti, te kako prepoznati zadatke u kojima je ta supstitucija potrebna.

Naravno, da bismo mogli iskoristiti trigonometrijske supstitucije, potrebno je imati odgovarajuće predznanje. U ovoj lekciji na početku ćemo ponoviti neke osnovne identitete, no pretpostavlja se da čitatelj barata i drugim identitetima i vještinama vezanim za trigonometrijske zadatke.

Za proizvoljne realne brojeve x i y vrijedi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (\text{osnovni trigonometrijski identitet}),$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{za sve } x \text{ takve da } \cos x \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{za sve } x \text{ takve da } \sin x \neq 0,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{adicijske formule}),$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x} \quad (\text{adicijske formule}).$$

Koristeći prva tri identiteta svaku trigonometrijsku funkciju možemo izraziti pomoću druge koristeći sljedeću tablicu:

Funkcija	pomoću $\sin x$	pomoću $\cos x$	pomoću $\operatorname{tg} x$	pomoću $\operatorname{ctg} x$
$\sin x =$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$
$\cos x =$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{ctg} x}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x =$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\operatorname{ctg} x =$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{ctg} x$

Kao što smo najavili, ovo su samo neki identiteti koje ćemo koristiti. Pored ovih identiteta, bilo bi dobro da čitatelj barata i drugim identitetima (formule za dvostruki kut, formule za polovični kut, formule

pretvorbe iz umnoška u zbroj i obratno), da zna kako izgledaju grafovi trigonometrijskih funkcija, te da zna rješavati osnovne trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.

Pogledajmo neke uvodne primjere.

Primjer 1

Odredi sve realne brojeve x, y za koje vrijedi

$$\begin{aligned} y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} &= \frac{1}{2}, \\ (1-2y^2)\sqrt{1-x^2} + 2xy\sqrt{1-y^2} &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje. Iako se ovaj zadatak možda može riješiti i bez trigonometrijske supstitucije, izrazi koji uključuju korijen motiviraju nas da uvedemo supstitucije oblika $x = \cos \alpha$ i $y = \cos \beta$. Smijemo ih supstituirati na taj način jer su x i y po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednaki 1 (inače izrazi pod korijenom ne bi bili dobro definirani). Kako bismo postigli sve vrijednosti iz intervala $[-1, 1]$, dovoljno je tražiti da su $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Nakon supstitucije dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta), \\ 1 &= -\cos(2\beta) \sin \alpha + \sin(2\beta) \cos \alpha = \sin(2\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Druga jednakost je zadovoljena za $2\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. Uzimajući u obzir da su $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, dobivamo $2\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$. Slično promatramo i prvu jednakost, odakle dobivamo dvije mogućnosti: $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ ili $\alpha - \beta = \frac{5\pi}{6}$. Rješavajući ta dva sustava dobivamo samo jedno rješenje: $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$, odakle dobivamo $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $y = -\frac{1}{2}$. $\square$

Promotrimo i jedan zadatak s hrvatskih natjecanja (Županijsko natjecanje iz matematike 1998., treći razred).

Primjer 2

Koristeći se pogodnom supstitucijom odredi broj rješenja jednadžbe

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1.$$

Rješenje. Druga zagrada podsjeća nas na formulu dvostrukog kuta. To nas motivira da uvedemo supstituciju $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$. Tada je $1 - 2x^2 = -\cos(2t)$. Međutim, negativna treća zagrada upravo je dvostruka kvadrirana druga zagrada umanjena za jedan, pa ćemo i za nju moći primijeniti formulu dvostrukog kuta:

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 2(1 - 2x^2)^2 - 1 = 2(-\cos(2t))^2 - 1 = \cos(4t).$$

Zato se izraz s lijeve strane jednakosti iz zadatka može zapisati kao

$$-8 \cos t \cos(2t) \cos(4t).$$

Množenjem sa $\sin t$ (vidimo da slučaj $t = 0$, tj. $x = \pm 1$ ne vodi rješenju) primjenjujemo tri formule

dvostrukog kuta za $\sin$ i dobivamo

$$\sin(8t) = -\sin t = \sin(-t)$$

Za rješenja ove jednadžbe imamo dva slučaja:

- $8t = -t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: odavde je $t = \frac{2k\pi}{9}$, a uzimajući u obzir domen, dobivamo $t = \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$;
- $8t = \pi + t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: odavde je $t = \frac{(2k+1)\pi}{7}$, a uzimajući u obzir domen, dobivamo $t = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$.

Dobivene vrijednosti za t daju sve različite vrijednosti za x , pa ova jednadžba ima 7 različitih rješenja u intervalu $[-1, 1]$. Do ovog trenutka ne znamo ima li jednadžba još realnih rješenja van tog intervala. Međutim, jednadžba iz zadatka je polinomijalna jednadžba (razlika lijeve i desne strane je polinom sedmog stupnja), pa ova jednadžba ima najviše sedam kompleksnih rješenja zbrajajući i njihove kratnosti. Kako smo našli sedam različitih realnih rješenja, to su ujedno i sva rješenja. $\square$

Navedimo sada neke identitete koji nisu dio standardnog srednjoškolskog kurikuluma, a motiviraju nas u uvođenju trigonometrijskih supstitucija.

Neka su α, β, γ realni brojevi takvi da je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Tada vrijedi

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma, \quad (1)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1, \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, \quad (4)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1. \quad (5)$$

Zadatak 1. Dokaži gornje identitete.

Uputa. Prvi identitet dokaži tako da izraziš jedan kut pomoću preostala dva. Sljedeća tri možeš dokazati analogno ili koristeći odgovarajuće transformacije. Za posljednji ponovno izrazi jedan kut pomoću preostala dva.

Rješenje. Izražavanjem kuta γ preko ostalih, dobivamo

$$\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\pi - \gamma) = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Množenjem cijele jednadžbe s nazivnikom slijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \gamma (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

Nakon distributivnosti i prebacivanjem članova s desne na lijevu stranu jednakosti dobivamo identitet

(1):

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Primjenom $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ dobivamo jednakost (2).

Identitet (4) dokazujemo uvođenjem transformacije kutova $x = \frac{\pi-\alpha}{2}$, $y = \frac{\pi-\beta}{2}$, $z = \frac{\pi-\gamma}{2}$. Njihov zbroj iznosi

$$x + y + z = \frac{3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} = \frac{3\pi - \pi}{2} = \pi,$$

pa i za te kutove vrijedi (1). Kako je $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, direktno dobivamo (4). Nakon toga primjenom $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ u (4) jednakost (3).

Zadnji identitet dokazujemo slično kao prvi: izrazimo kut γ preko ostalih:

$$\cos \gamma = \cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta) = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

odakle sređivanjem dobivamo

$$\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta.$$

Kvadriranjem obje strane jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta &= (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) \\ \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= 1, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Ukoliko u zadatku uočimo da dane tri varijable zadovoljavaju neki od gornjih identiteta, možemo pokušati s odgovarajućom supstitucijom. Naravno, ta supstitucija nije čarobni štapić, nego moramo i dalje imati dobro znanje rješavanja trigonometrijskih zadataka. Riješimo jedan primjer koji se pojavio na Državnom natjecanju iz matematike 2004.

Primjer 3

Nizovi realnih brojeva $(x_n), (y_n), (z_n), n \in \mathbb{N}$, definirani su formulama

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, \quad z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1},$$

a početni članovi su $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ i z_1 takav da vrijedi $x_1 y_1 z_1 = x_1 + y_1 + z_1$.

a) Provjeri da su za svaki $n \in \mathbb{N}$ zadovoljeni uvjeti: $x_n^2 \neq 1$, $y_n^2 \neq 1$, $z_n^2 \neq 1$.

b) Postoji li $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k + y_k + z_k = 0$?

Rješenje. Uvjet koji trojke brojeva zadovoljavaju motivira nas da uvedemo supstituciju $x_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $y_1 = \operatorname{tg} \beta$, $z_1 = \operatorname{tg} \gamma$. Tada je $x_1 y_1 z_1 = x_1 + y_1 + z_1$ ekvivalentno $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$, što je identitet (1) za $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Formule za $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ možemo zapisati pomoću formule za dvostruki kut, pa indukcijom dokažujemo da vrijedi $x_n = (-1)^{n-1} \operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha)$, $y_n = (-1)^{n-1} \operatorname{tg}(2^{n-1}\beta)$, $z_n = (-1)^{n-1} \operatorname{tg}(2^{n-1}\gamma)$. Baza indukcije je jasna, a u koraku dobivamo

$$x_{n+1} = \frac{(-1)^{n-1} \operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha)}{\operatorname{tg}^2(2^{n-1}\alpha) - 1} = (-1)^n \operatorname{tg}(2 \cdot 2^{n-1}\alpha) = (-1)^{n-1} \operatorname{tg}(2^n\alpha),$$

te analogno za ostale kutove.

Za $n > 1$ za zbroj argumenata tangensa vrijedi

$$(-1)^{n-1} (2^{n-1}\alpha + 2^{n-1}\beta + 2^{n-1}\gamma) = (-1)^{n-1} 2^{n-1}\pi,$$

te identitet (1) i dalje vrijedi, odnosno slijedi $x_n + y_n + z_n = x_n y_n z_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Sada možemo početi odgovarati na pitanja iz zadatka. Jedan način za riješiti a) dio zadatka je primijetiti da kada bi neki (bez smanjenja općenitosti) x_n bio jednak ± 1 , da bi tada x_{n-1} bio rješenje jednadžbe

$$1 = x_n = \frac{2x_{n-1}}{x_{n-1}^2 - 1} \iff x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} - 1 = 0.$$

Ta jednadžba ima rješenja $x_{n-1} = 1 \pm \sqrt{2}$, što su iracionalni brojevi. Međutim, svi članovi nizova $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ su racionalni. To očito vrijedi za prve članove niza $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$, a za niz $(z_n)_n$ vrijedi $z_1 = \frac{6}{7}$. Za sve ostale članove nizova lako se indukcijom dokaže da su svi članovi niza racionalni, što dovršava a) dio zadatka.

Za b) dio zadatka, pretpostavimo da je za neki n zadovoljeno $x_n + y_n + z_n = 0$, i pretpostavimo da je n najmanji takav. Očito $n > 1$. Kako je zbroj tih članova niza za svaki $n \in \mathbb{N}$ upravo jednak umnošku članova tih niza, slijedi da je $x_n y_n z_n = 0$. To znači da je barem jedan član niza jednak nuli. Međutim, iz formule za x_{n+1}, y_{n+1} i z_{n+1} slijedi da ako je neki član niza jednak nuli, da je i prethodni član niza također jednak nuli, što znači da vrijedi

$$x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1} = x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} = 0,$$

što dovodi do kontradikcije s pretpostavkom da je n najmanji takav. □

Primjer 4

Nađi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) takve da vrijedi

$$3 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 4 \left(y + \frac{1}{y} \right) = 5 \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

$$xy + yz + zx = 1.$$

Rješenje. Primijetimo da ako je (x, y, z) rješenje ovog sustava da isto vrijedi i za trojku s promijenjenim predznacima: $(-x, -y, -z)$. Također, primijetimo iz prve jednadžbe da su svi članovi istog predznaka. Zato bez smanjenja općenitosti pretpostavimo prvo da su sve varijable x, y, z pozitivne.

Uvjet $xy + yz + zx = 1$ sugerira trigonometrijsku supstituciju kao u (3). Zato uvedimo supstituciju:

neka su α, β iz $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ takvi da je

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Onda definiramo $\gamma := \pi - \alpha - \beta$ te se uvjerimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \\ &= \frac{1 - xy}{x + y} = \frac{yz + zx}{x + y} = \frac{z(y + x)}{x + y} = z. \end{aligned}$$

Kako je $\gamma = \pi - \alpha - \beta > \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$, a tangens njegove polovične vrijednosti je jednak $z > 0$, nužno je $\gamma \in \langle 0, \pi \rangle$, pa kutove α, β, γ možemo promatrati kao kutove trokuta.

Pojedinačni izrazi iz prve jednadžbe transformiraju se na sljedeći način:

$$x + \frac{1}{x} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}.$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo:

$$\frac{6}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin \beta} = \frac{10}{\sin \gamma} \implies \frac{\sin \alpha}{3} = \frac{\sin \beta}{4} = \frac{\sin \gamma}{5}.$$

Prema poučku o sinusima, stranice ovog trokuta odnose se kao 3 : 4 : 5, pa je riječ o pravokutnom trokutu s pravim kutom $\gamma = \frac{\pi}{2}$, pa je $z = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Primijetimo posebno da su tada α i β manji od γ , pa time i x i y manji od z .

Tada je $5 \left(z + \frac{1}{z} \right) = 10$, pa x i y tražimo kao rješenja jednadžbi

$$3 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 10 \quad \text{i} \quad 4 \left(y + \frac{1}{y} \right) = 10.$$

Rješavanje vodi na kvadratne jednadžbe. U svakoj dobivamo dva rješenja za x i y , ali odbacujemo ona za koja su x i y veća od $z = 1$, budući da je tangens polovice pravog kuta veći od tangensa polovica preostalih kutova u pravokutnom trokutu. Zato je $x = \frac{1}{3}$ i $y = \frac{1}{2}$.

Ovime smo našli rješenje sustava s pozitivnim varijablama. Koristeći raniju primjedbu (ako je (x, y, z) rješenje, tada je i $(-x, -y, -z)$ rješenje), zaključujemo da su konačna rješenja:

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1 \right) \right\}.$$

□

Na početku primjera uveli smo supstituciju $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Inače bismo u svim zadacima to trebali napraviti s oprezom. Naime, u identitetu (3) imamo tvrdnju u jednom smjeru: za vrijednosti $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ (gdje su α, β, γ kutovi trokuta) vrijedi identitet $xy + yz + zx = 1$. Međutim, nama treba tvrdnja u drugom smjeru: ako za realne brojeve x, y, z vrijedi $xy + yz + zx = 1$, tada postoje kutovi trokuta α, β, γ takvi da je $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Prilikom svake supstitucije budi oprezan možeš li to napraviti. Jedan način je kao gore: definirali smo prvo α i β , a zatim γ preko njih, te smo za sve kutove komentirali da su pozitivni zbog svojstava i dodatnih pretpostavki na x, y, z . Bez nekih dodatnih pretpostavki to često nije moguće. Recimo, postoje realni brojevi x, y, z koji

zadovoljavaju $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$, no za koje ne možemo uvesti supstituciju $x = \cos \alpha$, $y = \cos \beta$, $z = \cos \gamma$ jer ti x, y, z nisu iz intervala $[-1, 1]$; to možemo napraviti tek ako dodatno znamo da su x, y, z nenegativni. To sve sugerira da treba biti oprezan s trigonometrijskim supstitucijama.

1.1. Klasične trigonometrijske nejednakosti

Riješimo sada malo drugačiji zadatak.

Primjer 5: Južna Koreja, 1998.

Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c koji zadovoljavaju $a + b + c = abc$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Rješenje. Opet inspirirani postojećim trigonometrijskim identitetima tražimo odgovarajuću supstituciju. Zbog uvjeta $a + b + c = abc$ uzet ćemo $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ takve da je $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \operatorname{tg} \beta$, $c = \operatorname{tg} \gamma$ (u duhu (1)). Kutovi α, β i γ kutovi su šiljastokutnog trokuta (jer su a, b, c pozitivni). Za izraze s lijeve strane nejednakosti vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \cos \alpha$$

(te analogno za ostale članove). Zato je zadatak pokazati da za kutove šiljastokutnog trokuta vrijedi

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Na prva dva člana zbroja primijenimo formulu za pretvorbu iz zbroja u umnožak, a za preostali član primijenimo formulu za dvostruki kut:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \gamma \\ &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju $x := \sin \frac{\gamma}{2}$, $t := \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ($|t| \leq 1$). S desne strane primjećujemo kvadratnu funkciju po x s parametrom t :

$$-2x^2 + 2xt + 1.$$

Kako joj je vodeći koeficijent negativan, maksimum se postiže u vrhu parabole, za vrijednost $x = \frac{t}{2}$. Zbog toga taj maksimum iznosi

$$-2 \left(\frac{t}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{t}{2} \right) t + 1 = \frac{t^2}{2} + 1 \leq \frac{3}{2}.$$

Maksimum se postiže za $t = 1$, odnosno $\alpha = \beta$, te za $x = \frac{1}{2}$, odnosno $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Time je nejednakost dokazana, a jednakost se postiže kad su sve varijable α, β, γ (odnosno a, b, c) međusobno jednake. $\square$

Prošli primjer otvara novu klasu zadataka: trigonometrijska nejednakost poput $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$ koja se može smatrati klasičnim zadatkom (laički rečeno: već je nekome prije palo na pamet baviti se i dokazati tu nejednakost) skrivena je dodatnom trigonometrijskom supstitucijom. Time se dobiva novi zadatak koji možda i ima direktno rješenje (pokušaj sam riješiti gornji zadatak bez trigonometrijske supstitucije), no u ovoj skripti bavit ćemo se trigonometrijskim pristupima.

Da bismo mogli sustavno pristupiti trigonometrijskim nejednakostima, prvo popišimo što više klasičnih trigonometrijskih nejednakosti.

Primjer 6: Klasične trigonometrijske nejednakosti

Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} 1 &< \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}, \\ 0 &< \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ 3\sqrt{3} &\leq \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma < +\infty, \quad (\text{za šiljastokutne trokute}) \\ \sqrt{3} &\leq \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma < +\infty, \\ 2 &< \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ 1 &< \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}, \\ \sqrt{3} &\leq \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} < +\infty, \\ 3\sqrt{3} &\leq \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} < +\infty. \end{aligned}$$

Svi izrazi odozgo poprimaju svoje ekstremne vrijednosti kada su svi kutovi jednaki, ili kada je trokut degeneriran (sve tri stranice međusobno paralelne).

Većinu nejednakosti iz Primjera 6 možemo dokazati slično kao u Primjeru 5, no jednostavnije je iskoristiti malo napredniju teoriju i dva jaka teorema.

Definicija 1

Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna ako za sve $x, y \in [a, b]$ i $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je konkavna ako je $-f$ konveksna, ili drugim riječima, ako za sve $x, y \in [a, b]$ i $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Konveksnost i konkavnost su pojmovi koje si možda čuo na satima fizike i sugeriraju zakrivljenost. U matematici, neprecizno rečeno, funkcija je konveksna ili konkavna na svojoj domeni ako je njezin graf na jednak način „zakrivljen”. Još manje precizno rečeno, funkcija je konveksna ako je njezin graf „zakrivljen

prema gore”, a konkavna ako je njezin graf „zakrivljen prema dolje”. Kada bi sila teža djelovala prema gore (suprotno logici, ali u smjeru y -osi), konkavna funkcija bi bila ona u koju se može uliti kava. Preciznije rečeno, dapače, ekvivalentno definiciji, funkcija je konveksna ako je njezin graf iznad svih dužina koje spajaju dvije točke na grafu, a konkavna ako je njezin graf ispod svih dužina koje spajaju dvije točke na grafu.



Slika 1: Prikaz konveksne i konkavne funkcije s označenim područjima.

U našim primjerima funkcija f uvijek će biti i neprekidna (laički rečeno, graf funkcije je „bez prekida”). U tom slučaju, konveksnost se može provjeriti samo u polovištu ($\lambda = 1/2$): funkcija je konveksna ako i samo ako za sve $x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (6)$$

Za one koji znaju ili žele znati više, funkcija je konveksna ako je njezina druga derivacija nenegativna, a konkavna ako je druga derivacija nepozitivna. Oni čitatelji koji poznaju derivacije mogu na taj način provjeravati konveksnost i konkavnost funkcija koje se pojavljuju u ovoj skripti, no u ovoj skripti to će se raditi na prije opisane načine.

Za konveksne i konkavne funkcije vrijede i sljedeći teoremi.

Teorem 2: Jensenova nejednakost

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada za sve $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Ako je f konkavna funkcija, tada za sve $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Jednakost se postiže ako su svi x_i jednaki.

Teorem 3: Karamatina nejednakost

Neka su $x_1, \dots, x_n$ i $y_1, \dots, y_n$ takvi da niz x_i -jeva *majorizira* niz y_i -jeva, odnosno da vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 &\geq x_2 \geq \dots \geq x_n, \\ y_1 &\geq y_2 \geq \dots \geq y_n, \\ x_1 + \dots + x_k &\geq y_1 + \dots + y_k \quad \text{za sve } k = 1, \dots, n-1, \\ x_1 + \dots + x_n &= y_1 + \dots + y_n. \end{aligned}$$

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada vrijedi

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + \dots + f(y_n).$$

Ako je f konkavna funkcija, tada vrijedi

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \leq f(y_1) + \dots + f(y_n).$$

Karamatina nejednakost je generalizacija Jensenove nejednakosti, te je manje poznata, ali će nam ovdje pomoći da dokažemo obje strane nejednakosti.

Rješenje (Primjer 6). Sumu kosinusa riješili smo u Primjeru 5. Primijeti da iako su zbog pozitivnosti a, b, c kutovi u tom primjeru bili šiljasti, na isti način nejednakost se dokazuje i za tupokutne trokute. Sve ostale riješit ćemo direktnom primjenom Karamatine nejednakosti. Bez smanjenja općenitosti neka je $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Budući da niz $(\pi, 0, 0)$ (odnosno $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$) u slučaju šiljastokutnih trokuta majorizira sve moguće trojke kutova (α, β, γ) , a također sve te trojke majoriziraju trojku $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, čim dokažemo da su funkcije

$$\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}, \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

konveksne ili konkavne na $\langle 0, \pi \rangle$, direktno iz Karamatine nejednakosti slijede sve preostale tvrdnje. $\square$

Napomena

Nepreciznost u dokazu kada evaluiramo funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ u točkama u kojima nisu definirane možemo zamijeniti tako da za proizvoljno mali realni broj $m > 0$ primjenjujemo Karamatinu nejednakost za trojke $(\pi - 2m, m, m)$ odnosno $(\frac{\pi}{2} - m, \frac{\pi}{2} - m, 2m)$ koje majoriziraju svaku drugu za dovoljno mali m .

Napomena

Za zbroj kosinusa također možemo primijeniti Karamatinu nejednakost, ali samo za šiljastokutne trokute, jer je funkcija $\cos x$ konkavna samo na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Zato u općenitom slučaju moramo tražiti alternativni dokaz, kao što smo to učinili u Primjeru 5.

Zadatak 2. Koristeći (6), dokaži da su sve funkcije

$$\begin{aligned}\sin x &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, & \cos x &: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \\ \operatorname{tg} x &: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, & \operatorname{ctg} x &: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \\ \sin \frac{x}{2} &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, & \cos \frac{x}{2} &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} &: [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, & \operatorname{ctg} \frac{x}{2} &: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

konveksne ili konkavne, te na taj način dovrši rješenje Primjera 6.

Uputa. Dovoljno je dokazati konveksnost za prve četiri funkcije. Gledaj relaciju u polovištu (6). Za funkcije $\sin$ i $\cos$ koristi formulu za pretvorbu iz zbroja u umnožak, a za tg i ctg definicije preko omjera sinusa i kosinusa.

Rješenje. Primijetimo da je dovoljno dokazati konveksnost/konkavnost za prve četiri funkcije: $\sin$ na domeni $[0, \pi]$, $\cos$ na domeni $[0, \frac{\pi}{2}]$, tg na domeni $[0, \frac{\pi}{2})$ te ctg na domeni $\langle 0, \pi \rangle$. Ostale četiri konveksnosti/konkavnosti direktne su posljedice tih tvrdnji.

Za funkciju sinus, u duhu (6) potrebno je dokazati nejednakost $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}$. Krećemo od desne strane i koristimo formulu pretvorbe iz zbroja u umnožak:

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Kosinus svakog kuta je broj manji ili jednak 1, a zbroj sinusa s argumentima na $[0, \pi]$ je nenegativan, pa je nejednakost dokazana.

Za funkciju kosinus, opet koristimo formulu pretvorbe iz zbroja u umnožak:

$$\frac{\cos x + \cos y}{2} = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Isti argumenti (kosinus je manji ili jednak jedan, a zbroj kosinusa s argumentima u domeni $[0, \frac{\pi}{2}]$ je nenegativan) dokazuju konveksnost kosinusa.

Za funkciju tangens, koristimo definiciju pomoću omjera sinusa i kosinusa, pa svodimo na zajednički nazivnik:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}\right) = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{2 \cos x \cos y} \\ &= \frac{\sin(x+y)}{2 \cos x \cos y} = \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos x \cos y}\end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}.$$

Zato, da bismo dokazali da je tangens konveksan na najavljenom domeni, ekvivalentno je dokazati nejednakost

$$\cos x \cos y \leq \cos^2 \left(\frac{x+y}{2} \right).$$

Na lijevoj strani iskoristimo formulu za pretvorbu umnoška kosinusa u zbroj, a na desnoj formulu za polovični kut:

$$\frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \leq \frac{1}{2} (1 + \cos(x+y))$$

Ponovno, kosinus svakog kuta manji je od 1, pa je nejednakost dokazana.

Postupak za dokazivanje konkavnosti kotangensa analogan je postupku od tangensa. Iz raspisa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} \right) = \frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{2 \sin x \sin y} \\ &= \frac{\sin(x+y)}{2 \sin x \sin y} = \frac{\sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x+y}{2} \right)}{\sin x \sin y} \end{aligned}$$

i

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{x+y}{2} \right) = \frac{\cos \left(\frac{x+y}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x+y}{2} \right)},$$

ekvivalentno je dokazati da je

$$\sin x \sin y \leq \sin^2 \left(\frac{x+y}{2} \right).$$

Na lijevoj strani iskoristimo formulu za pretvorbu umnoška sinusa u zbroj, a na desnoj formulu za polovični kut:

$$\frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \leq \frac{1}{2} (1 - \cos(x+y)),$$

odakle opet slijedi tvrdnja. □

Riješimo još jedan zadatak sa starih hrvatskih natjecanja. Riječ je o zadatku koji se pojavio na Županijskom natjecanju iz matematike 2006. godine.

Primjer 7

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $ab + bc + ca = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Rješenje. Kao prvo, zapišimo nejednakost u ekvivalentnom obliku prebacivanjem članova s desne strane jednadžbe na lijevu:

$$\frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-ca}{c+a} \geq \sqrt{3}.$$

Uvjet koji a, b, c zadovoljavaju prema (3) motivira supstituciju $a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $b = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $c = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, gdje su α, β, γ kutovi trokuta (pozitivni, te im je suma jednaka π). Pogledajmo sada članove na lijevoj strani

(ekvivalentne) nejednakosti:

$$\frac{1-ab}{a+b} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right)^{-1} = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Dakle, preostaje nam dokazati da za kutove trokuta α, β, γ vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3},$$

što je upravo donja ograda za zbroj tangensa polovina kutova iz Primjera 6. □

Nejednakosti koje uključuju funkcije tangens i kotangens mogli smo riješiti i algebarski, bez Jensenove i Karamatine nejednakosti. To ćemo dokazati u sklopu sljedećeg primjera u kojem ćemo dokazati i neke druge klasične nejednakosti koje uključuju te dvije funkcije.

Primjer 8

Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} 9 &\leq \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma < +\infty, & (\text{za šiljastokutne trokute}) \\ 1 &\leq \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma < +\infty, \\ 1 &\leq \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} < +\infty, \\ 9 &\leq \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} < +\infty, \\ 3\sqrt{3} &\leq \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma < +\infty, & (\text{za šiljastokutne trokute}) \\ -\infty &< \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{9}, \\ 0 &< \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}, \\ 3\sqrt{3} &\leq \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} < +\infty. \end{aligned}$$

Kao i u Primjeru 6, ekstremne vrijednosti se postižu kada su svi kutovi jednaki, odnosno kada je trokut degeneriran.

Rješenje (djelomično). Dokažimo samo nejednakosti kod kojih se jednakosti postižu kada su svi kutovi međusobno jednaki.

Za nejednakosti koje uključuju tangense kutova trokuta ili kotangense polovičnih kutova te članove supstituiramo s pozitivnim realnim x, y, z koji prema (1) odnosno (4) zadovoljavaju $x + y + z = xyz$. Na taj uvjet prvo primjenjujemo A–G nejednakost:

$$\frac{xyz}{3} = \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \implies x + y + z = xyz \geq 3\sqrt{3}.$$

Time smo dokazali nejednakost za sumu tangensa i sumu kotangensa polovičnih kutova iz Primjera 6,

ali i za njihove umnoške iz ovog primjera. Opet iz A–G nejednakosti dalje slijedi

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \geq 3,$$

odakle je $x^2 + y^2 + z^2 \geq 9$, što dokazuje nejednakosti za sumu kvadrata tangensa i kotangensa polovičnih kutova.

Za nejednakosti koje uključuju kotangense kutova trokuta ili tangense polovičnih kutova te članove supstituiramo s realnim brojevima x, y, z koji prema (2) odnosno (3) zadovoljavaju $xy + yz + zx = 1$. Koristeći klasičnu nejednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \iff (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

prvo dobivamo da vrijedi

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 1 + 2 = 3 \implies x + y + z \geq \sqrt{3},$$

što dokazuje nejednakosti za sumu kotangensa i sumu tangensa polovičnih kutova iz Primjera 6. Za sumu kvadrata imamo direktnije

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 1,$$

što dokazuje nejednakosti za sumu kvadrata kotangensa i tangensa polovičnih kutova iz ovog primjera. Za umnožak dokazujemo na sljedeći način: ako nisu svi x, y, z pozitivni, to je samo ako je neki od kutova α, β, γ tup, ali tada je točno jedna od varijabli x, y, z negativna, pa je umnožak negativan i trivijalno odozgo omeđen s $\frac{\sqrt{3}}{9}$. Ako su pak svi x, y, z pozitivni, iz A–G nejednakosti slijedi

$$\frac{1}{3} = \frac{xy + yz + zx}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \implies xyz \leq \frac{\sqrt{3}}{9},$$

što dokazuje zadnje dvije preostale nejednakosti iz ovog primjera. □

Napomena

U gornjem rješenju dokazali smo samo po jednu ogradu u svakoj nejednakosti (onu koja se ostvaruje za jednakostranične trokute). Dokaze za druge ograde u ovoj skripti preskačemo. I gornje i donje ograde za nejednakosti za sumu kvadrata cijelih i polovičnih kutova iz prošlog primjera mogli smo dokazati i direktnom primjenom Karamatine nejednakosti. Razmisli sam kako bi proveo takve dokaze.

Završimo glavni teorijski dio tako da iskažemo i dokažemo analogne nejednakosti za produkte sinusa i kosinusa polovičnih i cijelih kutova, te njihove sume kvadrata.

Zadatak 3. Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &< \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}, \\ \frac{3}{4} &\leq \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma < 3, \\ \frac{3}{4} &\leq \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} < 1, \\ 2 &< \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}, \\ 0 &< \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}, \\ -1 &< \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8}, \\ 0 &< \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}, \\ 0 &< \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Kao i u Primjeru 6, ekstremne vrijednosti se postižu kada su svi kutovi jednaki, odnosno kada je trokut degeneriran.

Uputa. Dokaži opet samo ograde koje se ostvaruju za jednakostranične trokute. Sve umnoške možeš riješiti s A–G nejednakosti (samo za umnožak kosinusa kutova trokuta treba komentirati što ako je trokut tupokutan). Drugu nejednakost riješi pomoću (5), treću pomoću formule za polovični kut, a onda preostale dvije nejednakosti slijede pomoću osnovnog trigonometrijskog identiteta.

Rješenje. Za sve umnoške funkcija primijenit ćemo A–G nejednakost. Za to se trebamo samo uvjeriti da su svi članovi nenegativni. Jedini članovi koji bi mogli biti negativni su neki od $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$. No, ako je neki od tih faktora negativan, onda je točno jedan negativan (onaj za koji je odgovarajući kut tupi), pa je umnožak negativan i očito manji od gornje ograde koju želimo dokazati. Dakle, primjenom A–G nejednakosti i Primjera 6 dobivamo

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma &\leq \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma &\leq \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{3}{2 \cdot 3} \right)^3 = \frac{1}{8}, \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} &\leq \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{3}{2 \cdot 3} \right)^3 = \frac{1}{8}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} &\leq \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Time smo dokazali posljednje 4 nejednakosti. Iz dokazane nejednakosti za umnožak kosinusa te (5)

slijedi

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4},$$

dok iz osnovnog trigonometrijskog identiteta onda slijedi

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = (1 - \cos^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \beta) + (1 - \cos^2 \gamma) \leq 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

Formula za polovični kut sinusa je $\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}$. Zato iz Primjera 6 dobivamo

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} (3 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma) \geq \frac{1}{2} \left(3 - \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4},$$

dok preostalu nejednakost za sumu kvadrata kosinusa dobivamo ponovno iz temeljnog trigonometrijskog identiteta. □

Prilikom dokaza zadatka odozgo mogu (ali i ne moraju pomoći) i sljedeće tvrdnje:

Neka su α, β, γ pozitivni realni brojevi takvi da je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Tada vrijedi

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \quad (7)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (8)$$

Zadatak 4. Dokaži gornje identitete.

Uputa. Uputa slična kao u prvom zadatku.

Rješenje. Za prvi identitet, sumu prva dva sumanda prebacimo u umnožak, dok za zadnji sumand primijenimo formulu dvostrukog kuta za γ , te za taj kut koristimo vezu s α i β .

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\gamma}{2} \left[\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \\ &= 2 \cos \frac{\gamma}{2} \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{-\beta}{2} \right] = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Za drugi identitet slično:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\
 &= 1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\
 &= 1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left[\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \\
 &= 1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left[-2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{-\beta}{2} \right] = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Za kraj pokažimo još jednu nejednakost.

Primjer 9

Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xy + yz + zx = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}.$$

Rješenje. Ponovno zbog (3) uvodimo supstituciju $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, gdje su α, β i γ kutovi trokuta (posebno, zbroj im je π). Kako je

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{1+x^2} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sin \alpha, \\
 \frac{1-x^2}{1+x^2} &= \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos \alpha,
 \end{aligned}$$

analognim raspisom za y, z primjećujemo da je početna nejednakost ekvivalentna s

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \gamma &\leq \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \beta + \frac{1}{2} \sin \gamma \\
 \iff \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &\leq \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma.
 \end{aligned}$$

Na desnoj strani iskoristit ćemo identitet (7). I za lijevu stranu postoji jedan sličan identitet, koji ćemo ovim putem dokazati. Naime, uvedimo supstituciju $\tilde{\alpha} = \pi - 2\alpha$, $\tilde{\beta} = \pi - 2\beta$, $\tilde{\gamma} = \pi - 2\gamma$. Za

nove kutove vrijedi identitet $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = \pi$, pa onda za njih vrijedi i (7). Zato imamo

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha + \sin 2\gamma + \sin 2\beta &= \sin(\pi - \tilde{\alpha}) + \sin(\pi - \tilde{\gamma}) + \sin(\pi - \tilde{\beta}) \\ &= \sin \tilde{\alpha} + \sin \tilde{\beta} + \sin \tilde{\gamma} \\ &= 4 \cos \frac{\tilde{\alpha}}{2} \cos \frac{\tilde{\beta}}{2} \cos \frac{\tilde{\gamma}}{2} \\ &= 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \\ &= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$

Koristeći izvedeni identitet i (7), ekvivalentno je dokazati nejednakost

$$4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

a to je pak ekvivalentno (nakon primjene formule dvostrukog kuta i prebacivanja na jednu stranu nejednakosti)

$$0 \leq 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \left(1 - 8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right),$$

što je očito istina budući da su svi faktori nenegativni (koristimo i tvrdnju za umnožak polovičnih sinusa iz Zadatka 3). Jednakost se postiže kada je trokut s kutovima α, β, γ jednakostraničan, odnosno kada je $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$. □

Zadaci za samostalnu vježbu

1. Riješi sustav jednačbi u skupu realnih brojeva:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 4x^3 - 3x = y.$$

2. Dana su četiri različita realna broja iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$. Dokaži da među njima postoje dva broja, x i y , takva da vrijedi

$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

3. Odredi najmanju i najveću vrijednost izraza

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

za realne brojeve $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Riješi u skupu realnih brojeva sustav jednačbi

$$\frac{3x-y}{x-3y} = x^2, \quad \frac{3y-z}{y-3z} = y^2, \quad \frac{3z-x}{z-3x} = z^2.$$

5. Dani su pozitivni realni brojevi x, y, z takvi da je $x + y + z = xyz$. Dokaži da postoje pozitivni realni brojevi a, b, c takvi da je

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Vrijedi li obrat: možemo li za svaki izbor pozitivnih realnih brojeva a, b, c pronaći (pozitivne) realne x, y, z koji zadovoljavaju sve četiri gornje jednakosti?

6. Neka su x, y, z realni brojevi takvi da je $xy + yz + zx = 1$. Neka je

$$S = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}.$$

a) Ako su x, y, z pozitivni brojevi, dokaži da je $S < 1$.

b) Dokaži da je $S < 1$ ako i samo ako su x, y, z istog predznaka.

7. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da vrijedi $abc + a + c = b$. Pronađi najveću moguću vrijednost izraza

$$P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}.$$

8. Za realne brojeve $x, y, z \in \langle 0, 1 \rangle$ koji zadovoljavaju $xy + yz + zx = 1$, dokaži da vrijedi

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

9. Neka su $x, y, z > 0$ realni brojevi takvi da vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Dokaži da vrijedi nejednakost:

$$xy + yz + zx \leq \frac{3}{4}.$$

10. Dokaži da za sve realne brojeve $x_1, x_2, \dots, x_n$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

11. Za $a, b, c \in \mathbb{R}$, dokaži: $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (abc - a - b - c)^2$.

12. U ovoj skripti obradili smo mnoge nejednakosti koje su dane za tri realna broja s nekim uvjetom, za koje smo (do trenutka prije čitanja ove skripte možda i neočekivano) uvodili trigonometrijske supstitucije i na taj način dobili neku od klasičnih trigonometrijskih nejednakosti za kutove trokuta. Pokušaj i sam smisliti još nekoliko takvih zadataka, a onda i o „konvencionalnim” rješenjima takvih zadataka (bez trigonometrijskih supstitucija).

Upute za zadatke za samostalnu vježbu

1. Raspiši formulu za kosinus trostrukog kuta i izrazi ga isključivo pomoću kosinusa. Neka to bude hint za supstituciju.
2. Supstitucija je $\sin$ ili $\cos$. Uzmi najuži interval u domeni te trigonometrijske funkcije.
3. Kako x, y mogu biti proizvoljni realni brojevi, supstituirajmo ih s onim koji nemaju uvjet na vrijednost. Dakle $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$ (ili s kotangensima).
4. Raspiši kako bi glasila formula za tangens trostrukog kuta. Drugačije zapiši jednadžbe iz sustava da prepoznaš tu formulu.
5. U jednom smjeru se sjeti kosinusova poučka. U drugom smjeru se sjeti nejednakosti trokuta.
6. Supstitucija kotangensima. Primijetiti da ne mogu biti dva negativna kotangensa, pa treba biti pažljiviji. Iskoristiti još jedan za kutove trokuta.
7. Uvođenjem supstitucije za negativnu vrijednost jedne od varijable dobit ćeš jedan od identiteta za koji znamo koju supstituciju primijeniti. Izraz kojem treba odrediti maksimalnu vrijednost nije klasičan i simetričan kao ranije, ali mu pristupi slično kao kad smo dokazivali maksimalnu vrijednost za sumu kosinusa kutova trokuta.
8. Uvedi tangense polovina kutova trokuta. Je li trokut šiljastokutan?
9. Znamo koju ćemo supstituciju uzeti zbog uvjeta na nepoznanice. Dobivena nejednakost nije neka koju smo imali do sada, ali ju možemo ocijeniti nekom takvom.
10. Prvo pogledaj prvi sumand i smisli mu logičnu supstituciju (možda i jedinu logičnu obzirom na vrijednosti koje x_1 može poprimiti). Onda tu supstituciju uvrsti u drugi sumand i smisli logičnu supstituciju da opet dobiješ neki smisleni trigonometrijski izraz. Nastavi tako i za ostale sumande.
11. Desna strana hintira supstituciju (za ideju koju supstituciju odabrati, ponašaj se kao da je desna strana jednaka nuli).

Rješenja zadataka za samostalnu vježbu

1. Rapisujemo kosinus trostrukog kuta:

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos(2\alpha) - \sin \alpha \sin(2\alpha) \\ &= \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Prepoznavamo taj izraz na lijevoj strani druge jednadžbe. Uzimajući u obzir i prvu jednadžbu, uvodimo supstituciju $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Druga jednadžba tada postaje

$$\cos(3\alpha) = \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Rješenja dobivamo iz dva slučaja: $3\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ili $3\alpha = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

U prvom slučaju dobivamo

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \implies 4\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Uz ograničenje $\alpha \in [0, 2\pi)$, dobivamo četiri kuta:

$$\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \right\}.$$

U drugom slučaju dobivamo

$$3\alpha = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2k\pi \implies 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies \alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Uz ograničenje $\alpha \in [0, 2\pi)$, dobivamo dva kuta:

$$\alpha \in \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

Konačna rješenja $(x, y) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ čini sljedećih šest uređenih parova:

$$\begin{aligned}\left(\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}\right), \left(\cos \frac{5\pi}{8}, \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\cos \frac{9\pi}{8}, \sin \frac{9\pi}{8}\right), \\ \left(\cos \frac{13\pi}{8}, \sin \frac{13\pi}{8}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

2. Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 ta četiri realna broja. Kako se nalaze u $\langle 0, 1 \rangle$, postoje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ iz $\langle 0, \pi/2 \rangle$ takvi da je $x_i = \sin \alpha_i$ za $i = 1, 2, 3, 4$.

Pretpostavimo suprotno, za svaki par brojeva $x_i < x_j$ vrijedi uvjet iz zadatka. Taj izraz možemo pisati na sljedeći način:

$$x_j \sqrt{1 - x_i^2} - x_i \sqrt{1 - x_j^2} = \sin \alpha_j \cos \alpha_i - \sin \alpha_i \cos \alpha_j = \sin(\alpha_j - \alpha_i).$$

Iz pretpostavke, za taj par indeksa vrijedi $\sin(\alpha_j - \alpha_i) > 1/2$, odnosno $\alpha_j - \alpha_i > \frac{\pi}{6}$.

Zato podijelimo interval $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ na tri intervala jednake duljine $\frac{\pi}{6}$. Među četiri kuta $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ prema Dirichletovom principu postoje dva kuta α_i i α_j (bez smanjenja općenitosti $\alpha_i < \alpha_j$) koji se nalaze u istom podintervalu. Njihova je razlika zato manja od duljine tog intervala, odnosno $\alpha_j - \alpha_i < \frac{\pi}{6}$, pa prema gornjem računu vrijedi

$$0 < x_j \sqrt{1 - x_i^2} - x_i \sqrt{1 - x_j^2} = \sin(\alpha_j - \alpha_i) < \frac{1}{2},$$

čime smo dobili kontradikciju.

3. Neka su $\alpha, \beta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ takvi da je:

$$x = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \operatorname{tg} \beta$$

Sada se izraz može zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} &= \frac{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right) \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right)}{\left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) \left(1 + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}\right)} \\ &= \frac{(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)} \\ &= \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha + 2\beta). \end{aligned}$$

Budući da sinus kuta može biti iz intervala $[-1, 1]$ zaključujemo da izraz iz zadatka može poprimiti sve vrijednosti iz intervala $[-1/2, 1/2]$. Najveću vrijednost ostvaruje kada je primjerice $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = 0$ (odnosno $x = 1, y = 0$), a najmanju kada je primjerice $\alpha = -\frac{\pi}{4}, \beta = 0$ (odnosno $x = -1, y = 0$).

4. Prvo ćemo raspisati formulu za tangens trostrukog kuta:

$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(2\alpha)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(2\alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Nakon toga ćemo u svakoj jednadžbi izraziti na drugačiji način varijable. Izrazimo y preko x iz prve jednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{3x - y}{x - 3y} &= x^2 \\ 3x - y &= x^2(x - 3y) = x^3 - 3x^2y \\ (3x^2 - 1)y &= x^3 - 3x \\ y &= \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}. \end{aligned}$$

To motivira supstituciju: $x = \operatorname{tg} t$ za neki $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Prva jednadžba tada daje $y = \operatorname{tg}(3t)$. Kada na isti način transformiramo drugu i treću jednadžbu, dobivamo $z = \operatorname{tg}(9t)$, pa onda $x = \operatorname{tg}(27t)$. Dakle, dobili smo jednadžbu $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(27t)$. Za t tada vrijedi $t + k\pi = 27t \implies t = \frac{k\pi}{26}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. Uzimajući u obzir $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, dobivamo rješenja:

$$x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{26}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{3k\pi}{26}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{9k\pi}{26}, \quad k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12\}.$$

5. Neka su x, y, z pozitivni realni takvi da je $x + y + z = xyz$. Kao već ranije komentirano, tada postoje kutovi šiljastokutnog trokuta α, β i γ (a posebno, i neki takav trokut), takav da je $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$, $z = \operatorname{tg} \gamma$. Neka su a, b i c duljine stranice tog trokuta. Prema kosinusovom poučku, vrijedi

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

S druge strane, kako za sve kutove $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ vrijedi $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \cos t$, dokazali smo jedan smjer.

Obrat ne vrijedi. Ako su a, b i c proizvoljni prirodni brojevi, moguće je da ne postoje nikakvi realni x, y, z (a kamo li pozitivni) koji bi zadovoljavali gornje jednakosti. Primjerice, ako su a, b i c stranice tupokutnog trokuta (bez smanjenja općenitosti $\alpha > \frac{\pi}{2}$), tada je kosinus tog kuta negativan, pa ne postoji realan x takav da vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Drugi način za opravdati da takvi x, y, z ne moraju postojati je da svaki put kad takvi x, y, z postoje, postoje i a, b, c koji nužno zadovoljavaju nejednakosti trokuta (zbroj svake dvije od duljina nužno je veći od preostale). Zato u kontraprimjeru možemo naći neke a, b, c koji ne zadovoljavaju tu nejednakost. Recimo za $a = 2, b = c = 1$, imali bismo

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1+1-4}{2} = -1,$$

što očito opet ne može biti zadovoljeno.

6. Kao u hintu, koristimo supstituciju $x = \operatorname{ctg} \alpha, y = \operatorname{ctg} \beta, z = \operatorname{ctg} \gamma$ (zbog (2)). Ako su α, β, γ kutovi trokuta, tada x, y, z zadovoljavaju $xy + yz + zx = 1$. Međutim, u obratu treba biti pažljiv, jer ne možemo naći proizvoljne kutove trokuta α, β, γ takve da je jednakost $xy + yz + zx = 1$ zadovoljene za njihove kotangense, jer u trokutu samo jedan od kutova može biti tupi, pa onda i samo jedna od varijabli x, y, z može biti negativna.

Zato zadatku prvo pristupamo na sljedeći način: bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je najviše jedna od varijabli x, y, z negativna. Kada bi dvije ili sve tri varijable bile negativne, prvo radimo supstituciju $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$: tada dobivamo najviše jednu negativnu varijablu, uvjet $xy + yz + zx = 1$ i dalje je zadovoljen, a vrijednost S nepromijenjena.

Kako je

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 t}{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \cos^2 t$$

slijedi da je $S = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$. Nadalje, zbog (5), dalje možemo pisati

$$\begin{aligned} S - 1 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ &= 2(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma)(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) = 2xyz(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma). \end{aligned}$$

Kako su sinusi unutarnjih kutova trokuta uvijek pozitivni brojevi, zaključujemo da je $S < 1$ ako i samo ako su svi x, y, z pozitivni, što je i trebalo dokazati.

7. Uvođenjem supstitucije $b' = -b$, zadani uvjet $a - b + c + abc = 0$ prelazi u: $a + b' + c = ab'c$. Ovaj identitet motivira trigonometrijsku supstituciju (u duhu (1)): $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b' = \operatorname{tg} \beta$, $c = \operatorname{tg} \gamma$, za neke kutove α, β, γ kojima je zbroj jednak π .

Htjeli bismo da su α, β i γ dodatno i kutovi trokuta, odnosno da su pozitivni. U punoj općenitosti, to ne mora biti tako: uvjet $a + b' + c = ab'c$ mogu zadovoljiti tangensi nekih kutova kojima je zbroj jednak π , ali nisu nužno kutovi trokuta, ali to se može izbjeći malo detaljnijom analizom. Ako je među brojevima a, b' i c dva ili tri negativna broja, onda ih možemo zamijeniti njihovim negativnim verzijama $(-a, -b', -c)$. Izraz kojem treba naći maksimum ne mijenja vrijednost, te i dalje vrijedi da je umnožak varijabli jednak njegovom zbroju. S druge strane, sada postoje kutovi trokuta α, β, γ takvi da je $\operatorname{tg} \alpha = a$, $\operatorname{tg} \beta = b'$, $\operatorname{tg} \gamma = c$. Pokažimo to precizno. Kako su barem dvije varijable pozitivne, neka su to bez smanjenja općenitosti a i b' . Tada uzimamo $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ takvi da je $\operatorname{tg} \alpha = a$, $\operatorname{tg} \beta = b'$, te tek onda $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Za takav γ vrijedi identitet koji smo htjeli, te je sigurno iz intervala $\langle 0, \pi \rangle$.

Kako za svaki t vrijedi $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \cos^2 t$, izraz kojem treba odrediti maksimum sada postaje

$$2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta + 3 \cos^2 \gamma.$$

Zapišimo što više izraz pomoću kuta γ . Za prva dva člana imamo

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta &= (1 + \cos(2\alpha)) - (1 + \cos(2\beta)) = \cos(2\alpha) - \cos(2\beta) \\ &= -2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = -2 \sin \gamma \sin(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Uvođenjem supstitucije $X := \sin \gamma$, $t = \sin(\alpha - \beta)$ ($|t| \leq 1$), koristeći osnovni trigonometrijski identitet izraz koji treba maksimizirati postaje

$$-2Xt + 3(1 - X^2) = -3X^2 - 2t \cdot X + 3,$$

što je kvadratna funkcija po X . Kako joj je vodeći koeficijent negativan, maksimum postiže u tjemenu za $X = -\frac{t}{3}$ i iznosi

$$-3 \frac{t^2}{9} + 2 \frac{t^2}{3} + 3 = \frac{t^2}{3} + 3 \leq \frac{10}{3}.$$

Ostavljamo za vježbu da se uvjeriš da se taj maksimum $\frac{10}{3}$ zaista i ostvaruje, za trojke

$$(a, b, c) \in \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right\}.$$

8. U duhu (3) uvodimo kutove trokuta α, β i γ i supstituciju $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $c = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Kako su varijable manje od 1, tako su i tangensi polovina kutova manji od 1, pa su kutovi trokuta manji od $\frac{\pi}{2}$. Dakle, trokut je šiljastokutan (kao u prošlom rješenju možemo se uvjeriti da su zaista svi kutovi veći od nule).

Kako za proizvoljni kut vrijedi

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} t,$$

nejednakost postaje

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

koja vrijedi za šiljastokutne trokute prema Primjeru 6.

9. Budući da su $x, y, z > 0$, iz zadanog uvjeta direktno slijedi da su svi strogo manji od 1. Stoga možemo uvesti supstituciju $x = \cos \alpha$, $y = \cos \beta$, $z = \cos \gamma$, pri čemu su α, β, γ kutovi šiljastokutnog trokuta. Početna nejednakost prelazi u

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha \leq \frac{3}{4}.$$

Lijevu stranu ocijenit ćemo s (kvadriranom) ogradom na sumu kosinusa. Naime, iz klasične nejednakosti za proizvoljne realne a, b, c

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \iff (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0,$$

slijedi

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha \leq \frac{1}{3}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

gdje smo iskoristili ogradu na zbroj kosinusa dokazanu u Primjeru 5.

10. Kako je x_1 proizvoljan realni broj, pokušat ćemo sa supstitucijom $x_1 = \tan \phi_1$, $\phi_1 \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Prvi sumand tada postaje

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} = \frac{\frac{\sin \phi_1}{\cos \phi_1}}{1 + \frac{\sin^2 \phi_1}{\cos^2 \phi_1}} = \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1}{\cos^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_1} = \cos \phi_1 \sin \phi_1.$$

Posebno, vrijedi

$$1 + x_1^2 = x_1 \cdot \left(\frac{x_1}{1 + x_1^2} \right)^{-1} = \tan \phi_1 \cdot (\sin \phi_1 \cos \phi_1)^{-1} = \cos^{-2} \phi_1.$$

Uvrštavanjem u drugi sumand, dobivamo

$$\frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_2}{\cos^{-2} \phi_1 + x_2^2}.$$

U prvoj supstituciji umjesto $\cos^{-2} \phi_1$ imali smo broj 1. Kako bismo se približili toj supstituciji, uvest ćemo supstituciju $x_2 = \tan \phi_2 \cdot \cos^{-1} \phi_1$. Tada imamo

$$\frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} = \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_2.$$

Indukcijom dokazujemo da uvrštavanjem supstitucije

$$x_k = \frac{\tan \phi_k}{\cos \phi_1 \dots \cos \phi_{k-1}}$$

za k -ti sumand dobivamo

$$\frac{x_k}{1 + x_1^2 + \dots + x_k^2} = \cos \phi_1 \cos \phi_2 \dots \cos \phi_{k-1} \sin \phi_k \cos \phi_k.$$

Nakon što pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki k , u koraku imamo $x_{k+1} = \frac{\operatorname{tg} \phi_k}{\cos \phi_1 \dots \cos \phi_k}$. Iz pretpostavke slijedi

$$\begin{aligned} 1 + x_1^2 + \dots + x_k^2 &= x_k \left(\frac{x_k}{1 + x_1^2 + \dots + x_k^2} \right)^{-1} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \phi_k}{\cos \phi_1 \dots \cos \phi_{k-1}} \cdot \frac{1}{\cos \phi_1 \cos \phi_2 \dots \cos \phi_{k-1} \sin \phi_k \cos \phi_k} \\ &= \cos^{-2} \phi_1 \dots \cos^{-2} \phi_k, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1}}{1 + x_1^2 + \dots + x_k^2 + x_{k+1}^2} &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 \dots \cos \phi_k \frac{\operatorname{tg} \phi_{k+1}}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi_{k+1}} \\ &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 \dots \cos \phi_k \cos \phi_{k+1} \sin \phi_{k+1}. \end{aligned}$$

Preostalo je dokazati nejednakost

$$\sin \phi_1 \cos \phi_1 + \sin \phi_2 \cos \phi_2 \cos \phi_1 + \dots + \sin \phi_n \cos \phi_n \dots \cos \phi_1 < \sqrt{n}.$$

Mnogi kosinusi (ali i korijen na desnoj strani) sugeriraju korištenje K–A nejednakosti. Lijeva strana je manja ili jednaka od

$$\sqrt{n} (\sin^2 \phi_1 \cos^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_2 \cos^2 \phi_2 \cos^2 \phi_1 + \dots + \sin^2 \phi_n \cos^2 \phi_n \dots \cos^2 \phi_1).$$

Sada za svaki član sa sinusom iskoristimo temeljni trigonometrijski identitet, te uz korištenje $\cos^2 \phi_k \leq 1$ u svakom k -tom sumandu možemo teleskopirati. Sada je izraz iz zadatka manji ili jednak od

$$\begin{aligned} &\sqrt{n} (\sin^2 \phi_1 \cos^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_2 \cos^2 \phi_2 \cos^2 \phi_1 + \dots + \sin^2 \phi_n \cos^2 \phi_n \dots \cos^2 \phi_1) \\ &\leq \sqrt{n} ((1 - \cos^2 \phi_1) + (1 - \cos^2 \phi_2) \cos^2 \phi_1 + \dots + (1 - \cos^2 \phi_n) \cos^2 \phi_{n-1} \dots \cos^2 \phi_1) \\ &\leq \sqrt{n} ((1 - \cos^2 \phi_1) + (\cos^2 \phi_1 - \cos^2 \phi_2 \cos^2 \phi_1) + \dots \\ &\quad + (\cos^2 \phi_{n-1} \dots \cos^2 \phi_1 - \cos^2 \phi_n \cos^2 \phi_{n-1} \dots \cos^2 \phi_1)) \\ &= \sqrt{n} (1 - \cos^2 \phi_n \cos^2 \phi_{n-1} \dots \cos^2 \phi_1) < \sqrt{n}. \end{aligned}$$

- 11.** Koristimo supstituciju $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \operatorname{tg} \beta$, $c = \operatorname{tg} \gamma$, pri čemu su $\alpha, \beta, \gamma \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Međutim, budući da nemamo uvjet da je $abc = a + b + c$, za razliku od većine ostalih zadataka iz ove skripte **ne** pretpostavljamo da su to kutovi trokuta, odnosno da vrijedi da im je zbroj jednak π .

Kako za svaki realni broj t vrijedi da je $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, lijeva strana nejednakosti postaje

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}.$$

Na desnoj pristupamo kao u dokazu identiteta da je zbroj tangensa kutova trokuta jednak njihovom umnošku. Zbog

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{a + b}{1 - ab},$$

imamo

$$\begin{aligned}
 abc - a - b - c &= c(ab - 1) - (a + b) = c(ab - 1) + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(ab - 1) \\
 &= (ab - 1)(c + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)) \\
 &= \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{\sin \gamma \cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma \sin(\alpha + \beta)}{\cos \gamma \cos(\alpha + \beta)} \\
 &= -\frac{\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos(\alpha + \beta)} \\
 &= -\frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.
 \end{aligned}$$

Dakle, preostalo je dokazati

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha) \cos^2 \beta \cos^2 \gamma} \geq \frac{\sin^2(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma},$$

što je očito istina jer je $\sin^2 t \leq 1$ za sve t , pa posebno i za $t = \alpha + \beta + \gamma$.