

HMD-ove lekcije o natjecateljskim temama

Potencija točke

Okvirna razina: JBMO / SŠ A var. državno

Lekciju priredio: Tadej Petar Tukara, mag. math.

Datum objave: 2. listopada 2026.

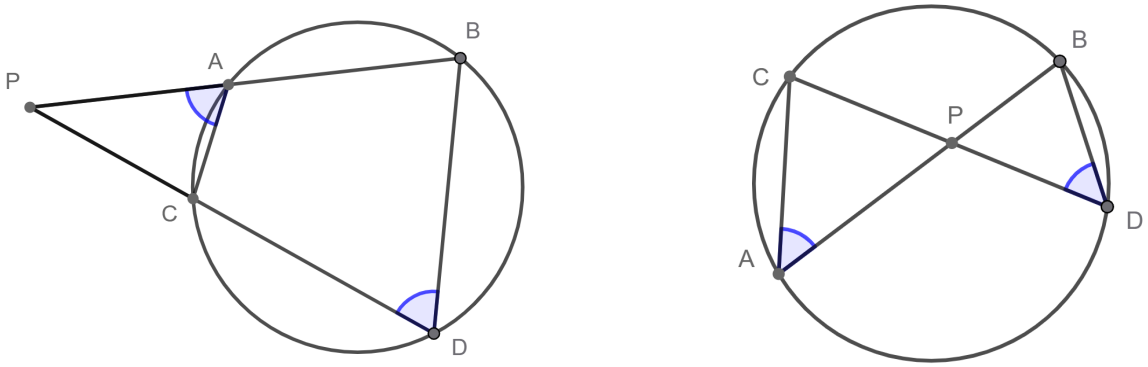
1. Teorija i primjeri

Potencija točke je često korišten alat u natjecateljskoj geometriji. U ovoj lekciji obradit ćemo osnovne činjenice o potenciji točke, radikalnim osima i radikalnom središtu, te ćemo naučiti kako se koriste pri rješavanju zadataka s natjecanja.

Teorem 1: Potencija točke

Neka je Γ kružnica i P točka. Neka pravac kroz P siječe Γ u točkama A i B, a drugi pravac kroz P siječe Γ u točkama C i D. Tada vrijedi

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|.$$



Slika 1: Potencija točke

Dokaz. Postoje dvije konfiguracije, ovisno o tome nalazi li se P unutar ili izvan kružnice.

Ako je P unutar kružnice, vrijedi $\sphericalangle PAC = \sphericalangle BDP$ i $\sphericalangle CPA = \sphericalangle DPB$, pa su trokuti PAC i PDB slični. Slijedi da je

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|},$$

odnosno $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

Ako je P izvan kružnice, analogno dobivamo isti rezultat. □

Vrijedi i sljedeći obrat, koji može biti koristan za dokazati da četiri točke leže na kružnici.

Teorem 2: Obrat teorema o potenciji točke

Neka su A, B, C, D četiri različite točke. Neka se pravci AB i CD sijeku u P. Pretpostavimo da:

- P leži na obje dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, ili
- P ne leži ni na jednoj od tih dužina.

Tada su A, B, C, D koncikličke ako i samo ako vrijedi

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|.$$

Dokaz. Jednadžba se može zapisati kao

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}.$$

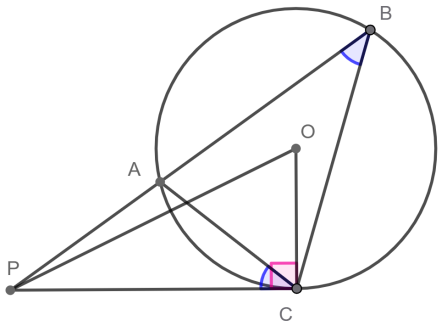
Vrijedi $\sphericalangle APD = \sphericalangle CPB$, pa su trokuti APD i CPB slični, odakle slijedi $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PCB$. Dakle, točke su koncikličke. □

Napomena

Ako je P izvan kružnice i PC tangenta, tada vrijedi

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2.$$

Dokaz ove tvrdnje je sličan dokazu teorema o potenciji točke. Koristimo poučak o kutu između tetive i tangente, po kojem je $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ABC$. Slijedi da su trokuti APC i CPB slični, odakle slijedi tvrdnja.

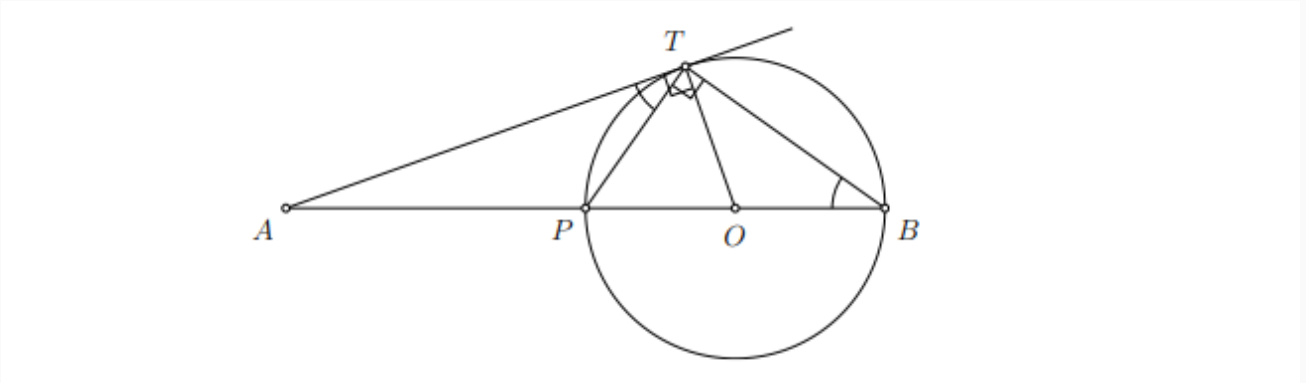


Slika 2: Potencija točke preko tangente

Zadatak 1. Točka P je polovište dužine $\overline{AB}$ duljine 2. Neka je T diralište tangente iz točke A na kružnicu promjera $\overline{PB}$. Odredi duljinu $|PT|$.

Uputa. Ovaj zadatak se pojavio na županijskom natjecanju 2019 za drugi razred. Možeš li uočiti sličnost koju smo upravo spomenuli? Pomoću potencije točke možemo odrediti $|AT|$.

Rješenje. Županijsko 2019. Zadatak A-2.4.



Neka je O polovište dužine $\overline{PB}$. Iz uvjeta zadatka je jasno da je $|AP| = |BP| = 1$. Iz potencije točke dobivamo da su trokuti $\triangle APT$ i $\triangle ATB$ slični, te vrijedi $|AT| = \sqrt{2}$. Odavde slijedi

$$\frac{|AT|}{|AB|} = \frac{|PT|}{|TB|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

odnosno $|BT| = \sqrt{2}|PT|$.

Trokut PTB je pravokutan po Talesovom poučku. U trokutu PTB vrijedi Pitagorin poučak:

$$|PT|^2 + |TB|^2 = |PB|^2 = 1.$$

Kako je $|PB| = 1$ i $|BT| = \sqrt{2}|PT|$, slijedi $1 = 3|PT|^2$, pa je $|PT| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Ako je točka O središte kružnice, po Pitagorinom poučku imamo da je $|PC|^2 = |PO|^2 - r^2$ (Slika 2). To nas navodi na sljedeću definiciju.

Definicija 3

Neka kružnica Γ ima središte O i polumjer r. Potencija točke P s obzirom na Γ definirana je kao

$$|PO|^2 - r^2.$$

Primijetimo da ova definicija ovisi samo o točki P i kružnici Γ. Ako se točka P nalazi unutar kružnice i pravac PO siječe kružnicu u A i B, tada vrijedi

$$|PO|^2 - r^2 = (|PO| - r)(|PO| + r) = -|PA| \cdot |PB|.$$

Napomena

Potencija točke

- je negativna je ako je P unutar kružnice,
- je pozitivna ako je P izvan kružnice,
- je jednaka kvadratu duljine tangente iz P ako je P izvan kružnice.

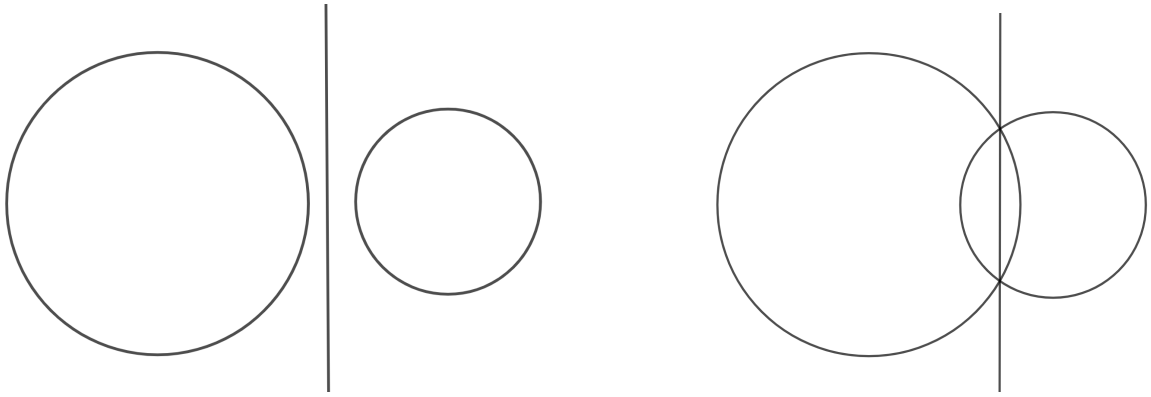
Definicija 4

Neka su Γ_1 i Γ_2 dvije kružnice sa središtima O_1, O_2 i polumjerima r_1, r_2.

Radikalna os kružnica Γ_1 i Γ_2 je skup svih točaka P koje imaju istu potenciju točke na Γ_1 i Γ_2, odnosno skup svih točaka za koje vrijedi

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2.$$

Radikalna os je pravac okomit na O_1O_2. Ako se kružnice sijeku u A i B, tada je radikalna os pravac AB.

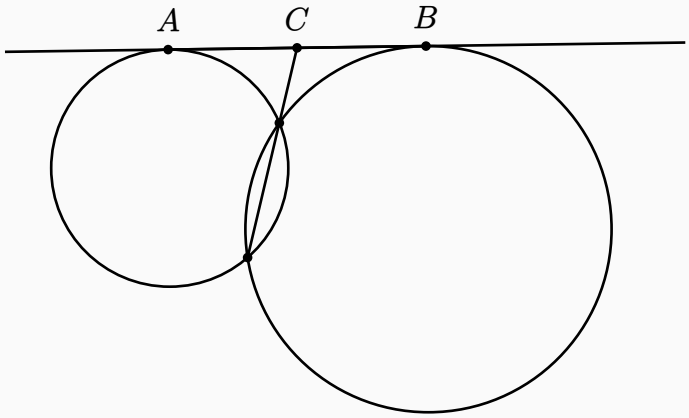


Slika 3: Radikalna os

Zadatak 2. Neka su k_1 i k_2 kružnice koje se sijeku u dvije točke. Njihova zajednička tangenta dodiruje k_1 u B i k_2 u A. Dokaži da produžetak njihove zajedničke tetive raspolavlja $\overline{AB}$.

Uputa. Zajednička tetiva je radikalna os danih kružnica.

Rješenje. Označimo sa A i B dirališta zajedničke tangente s kružnicama k_1 i k_2 redom, te neka je C sjecište zajedničke tetive i tangente AB. Budući da je zajednička tetiva radikalna os kružnica k_1 i k_2, potencija točke C na obje kružnice je ista. Vrijedi $|CA|^2 = |CB|^2$, odnosno $|CA| = |CB|$, dakle C je polovište dužine $\overline{AB}$.

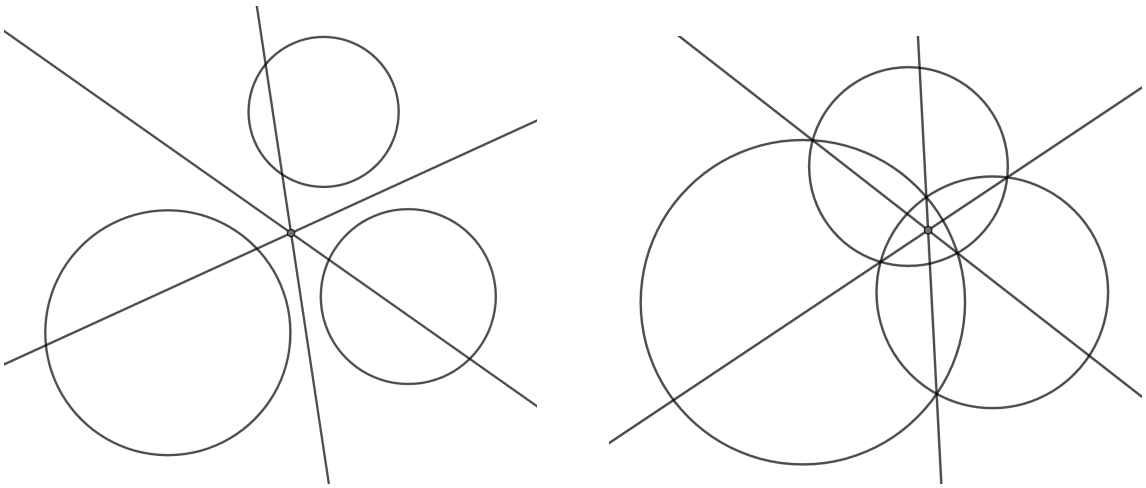


□

Teorem 5: Radikalno središte

Za tri kružnice koje nemaju isto središte, njihove tri radikalne osi se ili sijeku u jednoj točki, ili su paralelne. Ako se sijeku u jednoj točki, tu točku nazivamo radikalno središte.

Dokaz. Neka se dvije radikalne osi sijeku u X. Tada X ima jednaku potenciju u odnosu na sve tri kružnice, pa leži i na trećoj radikalnoj osi. Ako se nikoje dvije radikalne osi ne sijeku, to znači da su sve tri paralelne. □

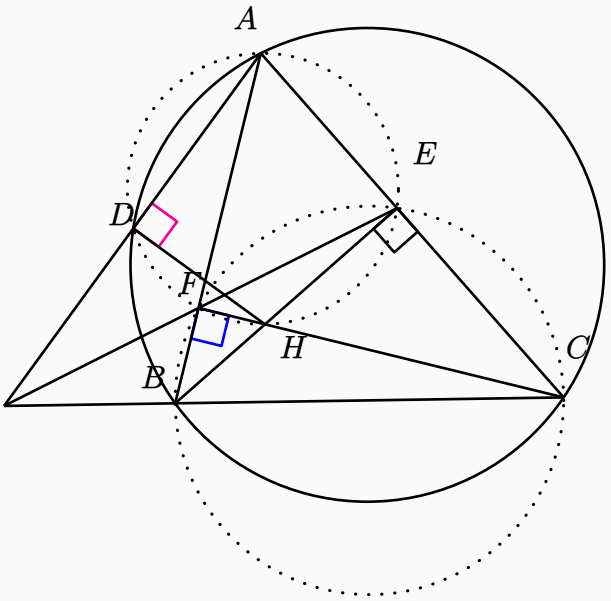


Slika 4: Radikalno središte

Zadatak 3. Dan je trokut ABC s ortocentrom H. Neka su E i F redom nožišta visina iz B i C . Neka je točka D na opisanoj kružnici trokuta ABC takva da je $HD \perp DA$. Dokaži da se pravci AD, EF i BC sijeku u jednoj točki.

Uputa. Pokaži da su ti pravci radikalne osi kružnica opisanih trokutima ABC, BCE i ADH.

Rješenje. Opisana kružnica k_1 trokuta ABC prolazi točkama A, B, C i D. Po Talesovom poučku, kružnica k_2 promjera $\overline{AH}$ sadrži točke D E i F. Kružnica k_3 promjera $\overline{BC}$ prolazi točkama B, C, E i F. Radikalna os kružnica k_1 i k_2 je pravac AD, radikalna os kružnica k_2 i k_3 je pravac EF, a radikalna os kružnica k_1 i k_3 je pravac BC. Po teoremu 5, ta tri pravca se sijeku u radikalnom središtu kružnica k_1, k_2 i k_3.



□

Prethodni zadatak je tipična primjena teorema o radikalnom središtu. Za kraju uvodnog dijela, pogledajmo jednu napredniju primjenu radikalnog središta.

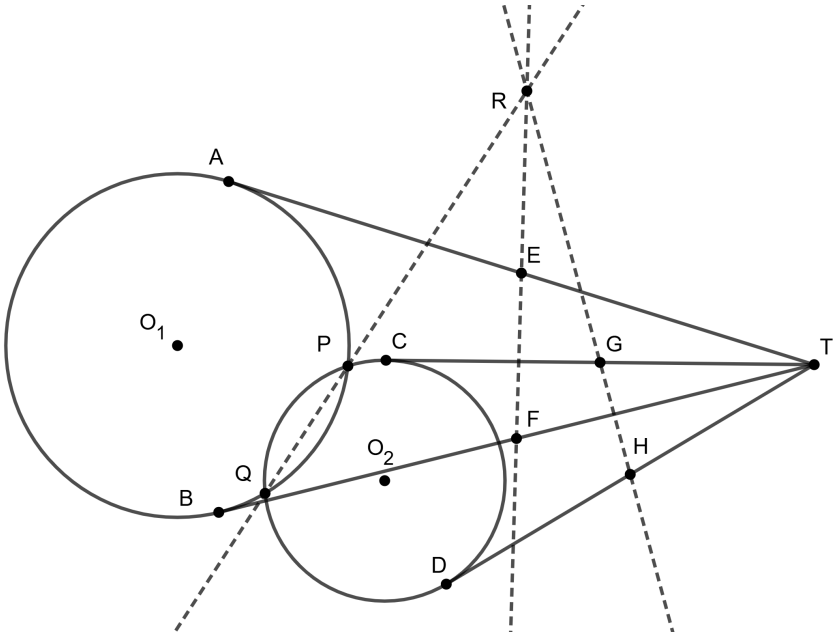
Primjer 1

Neka su Γ_1 i Γ_2 kružnice koje se sijeku u dvjema točkama, P i Q, te neka je T neka točka izvan tih kružnica. Neka tangente iz T na Γ_1 dodiruju tu kružnicu u točkama A i B, te neka tangente iz T na Γ_2 dodiruju tu kružnicu u točkama C i D. Neka su točke E, F, G i H polovišta dužina $\overline{TA}$, $\overline{TB}$, $\overline{TC}$ i $\overline{TD}$ redom. Neka je R sjecište pravaca EF i GH. Tada točke P, Q i R leže na pravcu.

Rješenje. Dokažimo ovu tvrdnju pomoću potencije točke. Razmišljamo o točki T kao o "degeneriranoj kružnici" s polumjerom 0 - sva svojstva potencije točke i dalje vrijede. Budući da je $|EA|^2 = |ET|^2$ i $|FB|^2 = |FT|^2$, točke E i F leže na radikalnoj osi, stoga je pravac EF upravo radikalna os kružnice Γ_1 i točke T. Analogno dobivamo da je GH radikalna os kružnice Γ_2 i točke T. Po Teoremu 5 slijedi da se pravcu EF, GH i PQ sijeku u jednoj točki, odnosno točka R je radikalno središte kružnica Γ_1, Γ_2 i T, te leži na pravcu PQ

□

Možemo također odrediti radikalno središte dvije točke i jedne kružnice - razmisli kako bismo ga konstruirali. Što ako uzmemo tri kružnice polumjera 0? Ako su to točke A, B i C, njihovo radikalno središte je središte opisane kružnice trokuta ABC.



Slika 5: Radikalno središte točke i dvije kružnice

Zadatak 4. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$. Točke E i F su nožišta visina iz B i C. Pravac koji je tangenta u točki A na opisanu kružnicu trokuta ABC siječe BC u točki P. Pravac paralelan s BC koji prolazi kroz točku A siječe EF u točki Q. Dokaži da je PQ okomit na težišnicu iz vrha A trokuta ABC.

Uputa. Dokaži da je PQ radikalna os točke A i kružnice nad promjerom $\overline{BC}$. Pokaži da je AQ tangenta na opisanu kružnicu trokuta AEF.

Rješenje. Poljska 2018.

Po Talesovom poučku, četverokut $BCEF$ je tetivan. Središte M tom četverokutu opisane kružnice je ujedno polovište dužine $\overline{BC}$. Promatramo radikalnu os kružnice sa središtem u A i polumjerom 0 (točka A) te kružnice opisane četverokutu $BCEF$.

PA je tangenta na kružnicu opisanu trokutu ABC, a jednostavno se pokaže da je QA tangenta na kružnicu opisanu trokutu AEF. Iz potencija točaka P i Q na spomenute kružnice slijedi

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC| \quad \text{i} \quad |QA|^2 = |QE| \cdot |QF|.$$

Stoga je pravac PQ radikalna os tih dviju kružnica, te je okomit na spojnicu njihovih središta. Prema tome, $PQ \perp AM$, što je i trebalo dokazati. □

Zadaci za samostalnu vježbu

1. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| < |BC|$ i $\sphericalangle BAC = 45°$. Tangente na kružnicu opisanu tom trokutu u točkama B i C sijeku se u točki D. Pravci AC i BD se sijeku u točki E te vrijedi $|EA| = 3$ i $|AC| = 8$. Odredi površinu trokuta CDE.

2. Neka je C točka na polukružnici promjera $\overline{AB}$ i D polovište luka nad tetivom $\overline{AC}$. Neka je E ortogonalna projekcija točke D na pravac BC i F sjecište pravca AE s polukružnicom. Dokaži da pravac BF raspolavlja dužinu $\overline{DE}$.

3. Dvije kružnice Γ_1 i Γ_2 sijeku se u dvjema točkama M i N. Neka je AB tangenta na te kružnice koja dodiruje Γ_1 i Γ_2 u točkama A i B, redom, tako da je točka M bliže pravcu AB nego N. Neka je CD pravac paralelan s AB koji prolazi kroz točku M, pri čemu je C na Γ_1, a D na Γ_2. Pravci AC i BD sijeku se u točki E; pravci AN i CD sijeku se u točki P; pravci BN i CD sijeku se u točki Q. Dokaži da je $|EP| = |EQ|$.

4. Neka su $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ koncentrične kružnice, pri čemu se $\mathcal{C}_2$ nalazi unutar $\mathcal{C}_1$. Iz točke A na $\mathcal{C}_1$ povučena je tangenta AB na $\mathcal{C}_2$ ($B \in \mathcal{C}_2$). Neka je C druga točka presjeka pravca AB s $\mathcal{C}_1$, a D polovište dužine $\overline{AB}$. Pravac kroz A siječe $\mathcal{C}_2$ u točkama E i F tako da se simetrale dužina $\overline{DE}$ i $\overline{CF}$ sijeku u točki M na AB. Odredi, uz dokaz, omjer $|AM| : |MC|$.

5. Dan je šiljastokutan trokut ABC s težištem T. Neka je $\overline{CN}$ njegova visina, $\overline{CP}$ težišnica i K polovište te težišnice. Simetrala dužine $\overline{PC}$ siječe pravac AB u točki L. Kružnica opisana trokutu LNT siječe pravac PC u točkama T i M. Dokaži da pravac AK raspolavlja dužinu $\overline{BM}$.

6. Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica promjera $\overline{AC}$ siječe dužinu $\overline{BD}$ u točki F. Kružnica promjera $\overline{AB}$ siječe pravac CE u točkama G i H, pri čemu je G između C i E. Ako je $\sphericalangle CHF = 12°$, odredi $\sphericalangle AGF$.

7. Dan je raznostraničan trokut ABC. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Okomica na pravac CP u točki P siječe pravce AC i BC redom u točkama X i Y, pri čemu je A između X i C te Y između B i C. Pretpostavimo da vrijedi $|AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC|$. Dokaži da je trokut ABC pravokutan.

8. (Eulerova formula) Dan je trokut ABC sa središtem opisane kružnice O i središtem upisane kružnice I. Ako su R i r redom polumjeri opisane i upisane kružnice tog trokuta, dokaži da vrijedi $|OI|^2 = R(R - 2r)$.

9. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u A. Neka je D nožište visine iz A na BC, te neka je E polovište dužine $\overline{DC}$. Opisana kružnica trokuta ABD ponovno siječe pravac AE u točki F. Neka je X sjecište pravaca AB i DF. Dokaži da je $|XD| = |XC|$.

10. Neka su A, B, C, D četiri različite točke na pravcu, tim redom. Kružnice nad promjerima $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točkama X i Y. Pravac XY siječe BC u točki Z. Neka je P točka na pravcu XY, različita od Z. Pravac CP siječe kružnicu nad promjerom $\overline{AC}$ u točkama C i M, a pravac BP siječe kružnicu nad promjerom $\overline{BD}$ u točkama B i N. Dokaži da se pravci AM, DN i XY sijeku u jednoj točki.

11. Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $|AB| > |AC|$. Neka je O središte kružnice opisane tom trokutu, te neka je $\overline{OQ}$ promjer kružnice opisane trokutu BOC. Pravac paralelan s pravcem BC kroz A siječe pravac CQ u točki M, a pravac paralelan s pravcem CQ kroz A siječe pravac BC u točki N. Neka je T presjek pravaca AQ i MN. Dokaži da točka T leži na kružnici opisanoj trokutu BOC.

12. Neka je ABC šiljastokutan trokut, te neka je O središte njemu opisane kružnice. Neka je D nožište visine iz A na $\overline{BC}$, a M polovište dužine $\overline{OD}$. Točke O_b i O_c su redom središta opisanih kružnica trokuta AOC i AOB. Ako je $|AO| = |AD|$, dokaži da su točke A, O_b, M i O_c koncikličke.

Upute za zadatke za samostalnu vježbu

1. Vidi prethodni zadatak.

2. Iskoristi činjenicu da radikalna os raspolavlja zajedničku tangentu kružnica.

3. Dokaži da su trokuti AEB i AMB sukladni.

4. Dokaži da točke D, E, F i C leže na istoj kružnici.

5. Točka P se nalazi na radikalnoj osi neke dvije kružnice.

6. Promatraj opisanu kružnicu trokuta FGH. Gdje joj je središte?

7. Nadopuni do paralelograma.

8. Neka AI siječe opisanu kružnicu u točki P. Dokaži da je $|PB| = |PI| = |PC|$.

9. Dokaži da je točka X radikalno središte neke tri kružnice.

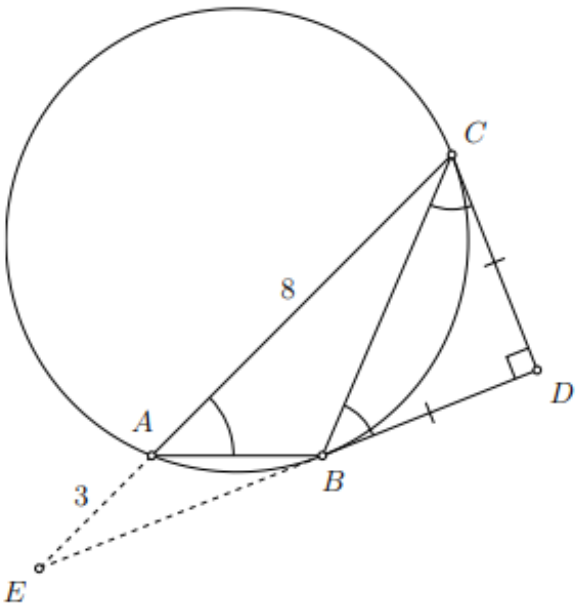
10. Dokaži da su ta tri pravca radikalne osi nekih kružnica.

11. Dokaži da točke M, A, T i C leže na kružnici.

12. Dodaj sjecišta pravaca OO_b, OO_c i AM sa BC.

Rješenja zadataka za samostalnu vježbu

1. Državno 2021. Zadatak A-2.3.



Kako je kut između tangente i tetive jednak obodnom kutu nad tom tetivom, zaključujemo da su kutovi $\sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle DCB$ jednaki kutu $\sphericalangle BAC$, tj. mjera im iznosi $45°$, pa je CDB jednakokračan pravokutni trokut.

Zbog potencije točke E u odnosu na kružnicu opisanu trokutu ABC slijedi

$$|EB|^2 = |EA| \cdot |EC| = 33.$$

Označimo $x := |CD|$. Iz Pitagorinog poučka primijenjenog na trokut CDE slijedi

$$|CE|^2 = |CD|^2 + |DE|^2,$$

$$11^2 = x^2 + (x + \sqrt{33})^2,$$

$$0 = x^2 + x\sqrt{33} - 44,$$

$$x = \frac{-\sqrt{33} \pm \sqrt{209}}{2}.$$

Jedino pozitivno rješenje je $x = \dfrac{\sqrt{209} - \sqrt{33}}{2}$. Zato je površina trokuta CDE jednaka

$$\frac{1}{2}|CD| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{209} - \sqrt{33}}{2} \cdot \frac{\sqrt{209} + \sqrt{33}}{2} = \frac{1}{8}(209 - 33) = 22.$$

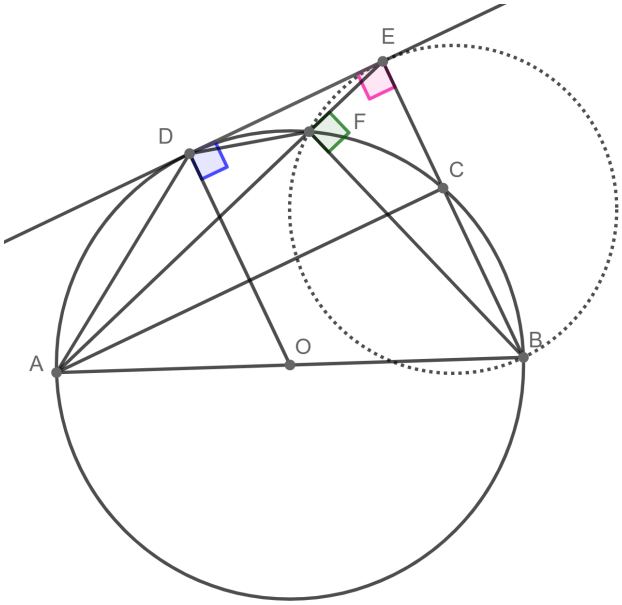
Napomena: Zadatak se može riješiti i bez računanja vrijednosti $x = |CD|$. Iz kvadratne jednadžbe $x^2 + x\sqrt{33} - 44 = 0$ imamo

$$44 = x^2 + x\sqrt{33} = x(x + \sqrt{33}) = |CD| \cdot |DE|,$$

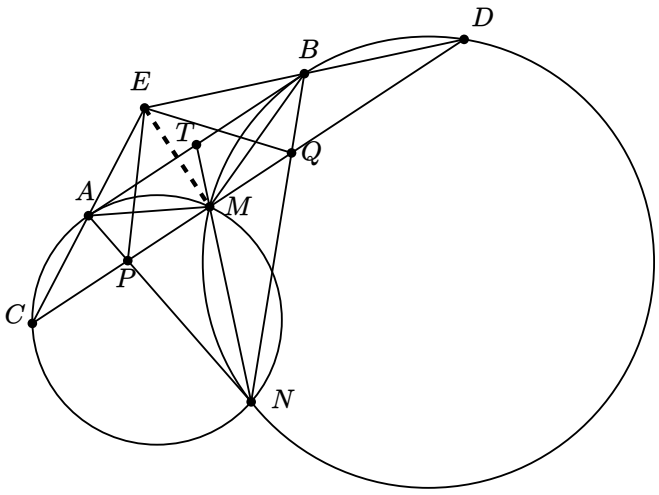
pa je površina trokuta CDE jednaka

$$\frac{1}{2}|CD| \cdot |DE| = \frac{44}{2} = 22$$

2. Promotrimo opisanu kružnicu trokuta BEF. Kako je $\sphericalangle BFE = 90°$, slijedi da je $\overline{BE}$ promjer te kružnice. Zato je DE zajednička tangenta kružnicama na slici, pa iz tvrdnje zadatka 2 slijedi da BF raspolavlja $\overline{DE}$.



3. IMO 2000. Zadatak 1.



Koristeći paralelnost i poučak o kutu između tetive i tangente, imamo

$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ACM = \sphericalangle BAM$$

i slično

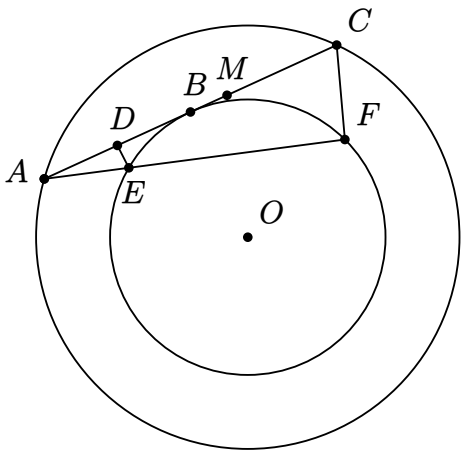
$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle BDM = \sphericalangle ABM.$$

Prema tome, pravac AB raspolavlja kutove $\sphericalangle EAM$ i $\sphericalangle EBM$, pa slijedi $\triangle EAB \cong \triangle MAB$.

Znamo iz zadatka 2 da pravac MN raspolavlja dužinu $\overline{AB}$, a budući da je $AB \parallel PQ$, zaključujemo da je M polovište dužine $\overline{PQ}$.

Kako je AB simetrala dužine $\overline{EM}$, pravac EM je okomit na PQ, odnosno EM je simetrala dužine $\overline{PQ}$. Odavde slijedi $|EP| = |EQ|$.

4. USAMO 1998. Zadatak 2.



Po potenciji točke imamo

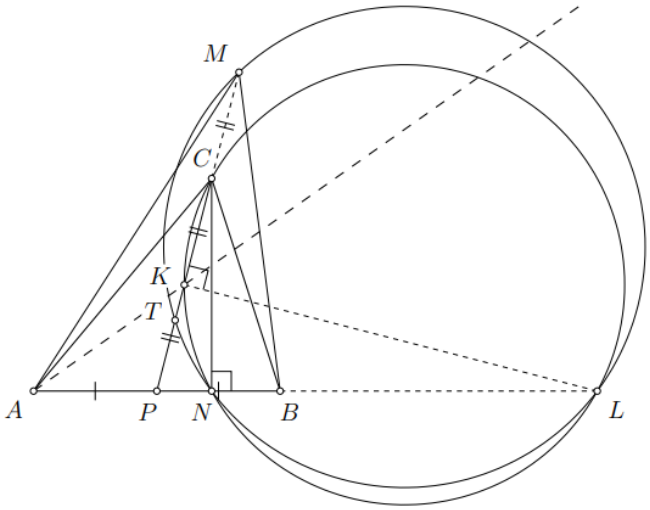
$$AE \cdot AF = AB^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right) \cdot (2AB) = AD \cdot AC$$

pa je četverokut $CDEF$ tetivan. Budući da je sjecište simetrala njegovih stranica, točka M je središte opisane kružnice četverokuta $CDEF$.

Imamo da je M polovište dužine $\overline{CD}$ (a već nam je zadano da je B polovište dužine $\overline{AC}$, dok je D polovište dužine $\overline{AB}$). Sada lako dobivamo

$$|AM| : |MC| = 5 : 3.$$

5. Županijsko 2022. Zadatak A-4.5.



Budući da je $\sphericalangle LNC = \sphericalangle LKC = 90°$, zaključujemo da je četverokut $LNKC$ tetivan.

Iz teksta zadatka znamo da je četverokut $LNTM$ tetivan, pa promatrajući potenciju točke P na te dvije kružnice dobivamo

$$|PT| \cdot |PM| = |PN| \cdot |PL| = |PC| \cdot |PK|.$$

Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru $1 : 2$, posebno slijedi

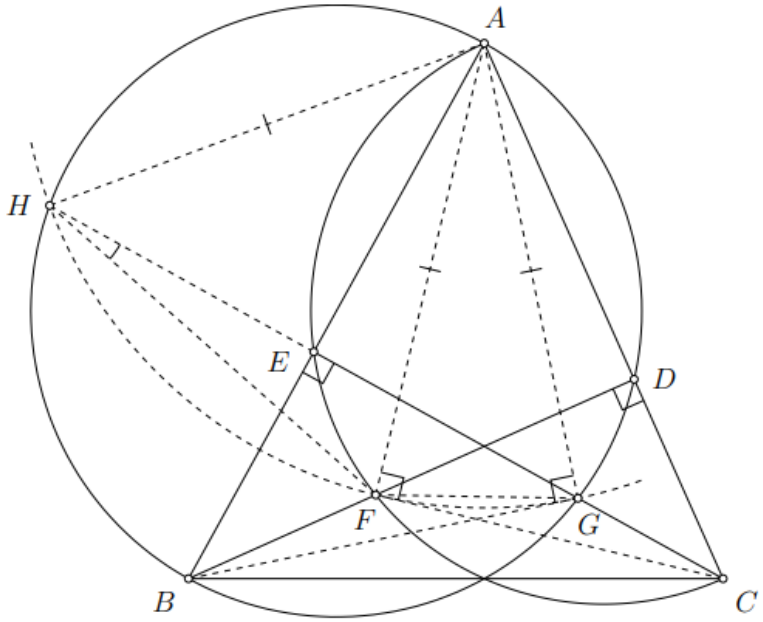
$$\frac{|PT|}{|PC|} = \frac{1}{3},$$

odakle zajedno s prethodnom jednakošću slijedi $|PM| = 3|PK|$.

U trokutu ABM, dužina $\overline{MP}$ je njegova težišnica, a točka K dijeli tu dužinu u omjeru $2 : 1$. Zaključujemo da je K težište tog trokuta.

Zato težišnica iz vrha A trokuta ABM leži na pravcu AK, pa zato i taj pravac prolazi polovištem dužine $\overline{BM}$, što je trebalo dokazati.

6. Državno 2018. Zadatak A-4.4



Tetiva $\overline{GH}$ je okomita na promjer $\overline{AB}$, pa je AB simetrala dužine $\overline{GH}$. Zato je $|AG| = |AH|$.

Trokut AFC je pravokutan, pa prema Euklidovom poučku vrijedi

$$|AF|^2 = |AD| \cdot |AC|.$$

Analogno, trokut ABG je pravokutan, pa je

$$|AG|^2 = |AE| \cdot |AB|.$$

Kutovi $\sphericalangle BDC$ i $\sphericalangle BEC$ su pravi, pa je četverokut $BCDE$ tetivan. Prema poučku o potenciji točke primijenjenom na točku A s obzirom na kružnicu opisanu četverokutu $BCDE$ zaključujemo da je

$$|AD| \cdot |AC| = |AE| \cdot |AB|.$$

Stoga je

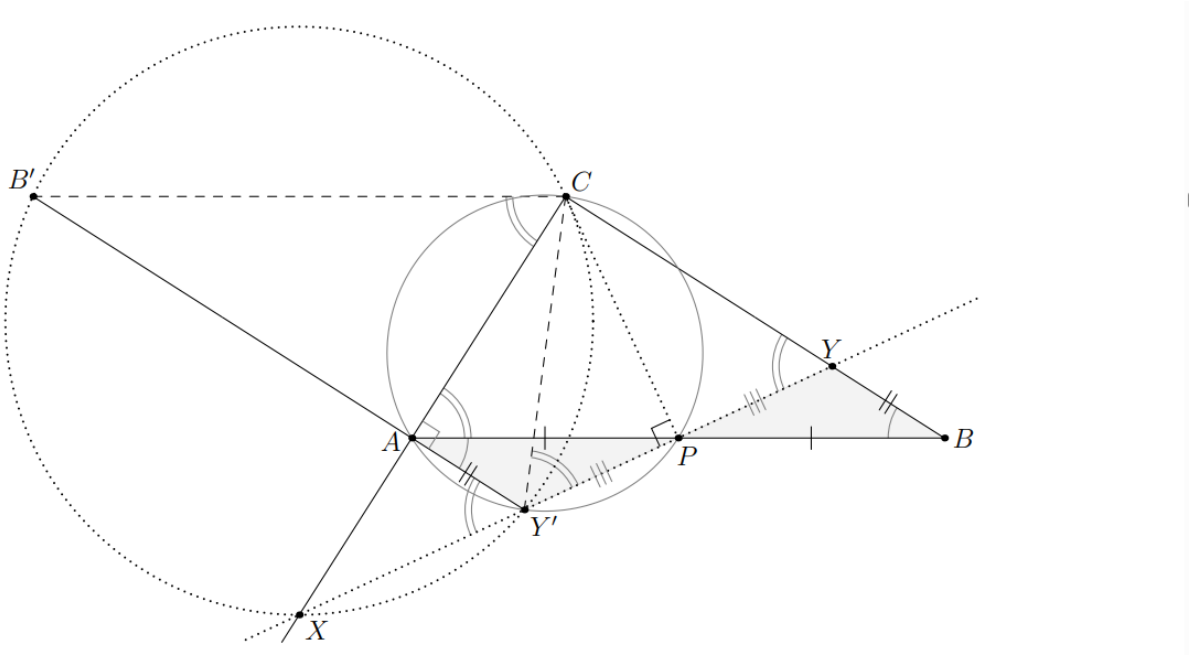
$$|AF| = |AG| = |AH|,$$

tj. točka A je središte trokutu GFH opisane kružnice.

Konačno je

$$\sphericalangle AGF = \sphericalangle GFA = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \sphericalangle FAG\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\sphericalangle FHG\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 24^\circ\right) = 78^\circ.$$

7. Županijsko 2025. Zadatak A-2.4.



Neka pravac paralelan s BC kroz A siječe XY u točki Y', a paralelu s AB kroz C u točki B'.

Budući da je četverokut $BCB'A$ paralelogram vrijedi $|BC| = |AB'|$.

Također, iz $AY' \parallel YB$ slijedi da je $\sphericalangle Y'AP = \sphericalangle PBY$. Kutovi $\sphericalangle Y'PA$ i $\sphericalangle YPB$ su kao vršni kutovi pri vrhu P jednaki, a kako je P polovište stranice AB vrijedi $|PB| = |PA|$. Zato po K-S-K poučku o sukladnosti zaključujemo da su trokuti $PY'A$ i PYB sukladni.

Posebno, iz te sukladnosti slijedi $|BY| = |AY'|$. Uvjet iz zadatka sada možemo zapisati na sljedeći način:

$$|AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC| = |AY'| \cdot |AB'|.$$

Prema obratu teorema o potenciji točke slijedi da je $XY'CB'$ tetivni četverokut.

Iz sukladnosti trokuta $PY'A$ i PYB dodatno slijedi da je $|YP| = |PY'|$. To znači da pravokutni trokuti CPY' i CPY dijele jednu katetu, a drugi par kateta im je jednake duljine, pa su prema S-K-S poučku o sukladnosti i oni sukladni. Posebno:

$$\sphericalangle CY'P = \sphericalangle CYP.$$

Koristeći tu jednakost kuteva, tetivnost četverokuta $XY'CB'$, te paralelnost pravaca $B'C$ i AB, odnosno BC i AB', dobivamo

$$\sphericalangle CAP = \sphericalangle ACB' = \sphericalangle AY'X = \sphericalangle CYP = \sphericalangle CY'P,$$

odakle slijedi da je četverokut $CAY'P$ tetivan.

Zato je $\sphericalangle CAY' = 180° - \sphericalangle CPY' = 90°$, te konačno

$$\sphericalangle ACB = 180° - \big(\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA\big) = 180° - \big(\sphericalangle CAB + \sphericalangle BAY'\big) = 180° - \sphericalangle CAY' = 90°,$$

čime smo dokazali da je trokut ABC pravokutan.

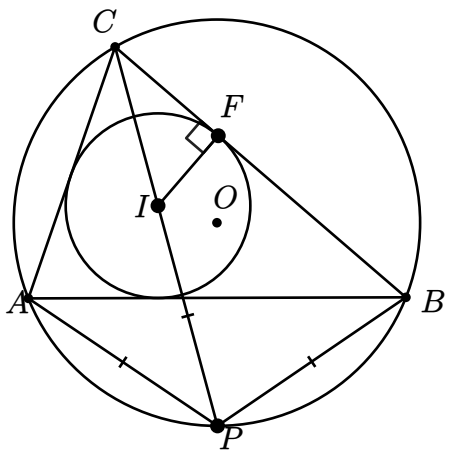
8. Eulerova formula

Uvedimo oznaku $d = |OI|$. Neka pravac CI siječe opisanu kružnicu ponovno u točki P. Iz potencije točke I na opisanu kružnicu trokuta ABC slijedi

$$IP \cdot IC = (d + R)(d - R). \tag{1}$$

Dalje, vrijedi sljedeća poznata tvrdnja (poznata kao lema o trozupcu)

$$|AP| = |BP| = |IP|. \tag{2}$$



Sinusov poučak u trokutu CPB nam daje

$$\frac{|PB|}{\sin \sphericalangle PCB} = 2R.$$

Dakle,

$$|PB| = 2R \sin \sphericalangle PCB.$$

Kako je $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ICF$, gdje je F diralište upisane kružnice sa stranicom BC, slijedi

$$|PB| = 2R \sin \sphericalangle ICF.$$

U pravokutnom trokutu ICF vrijedi $\sin \sphericalangle ICF = r/|CI|$, pa je

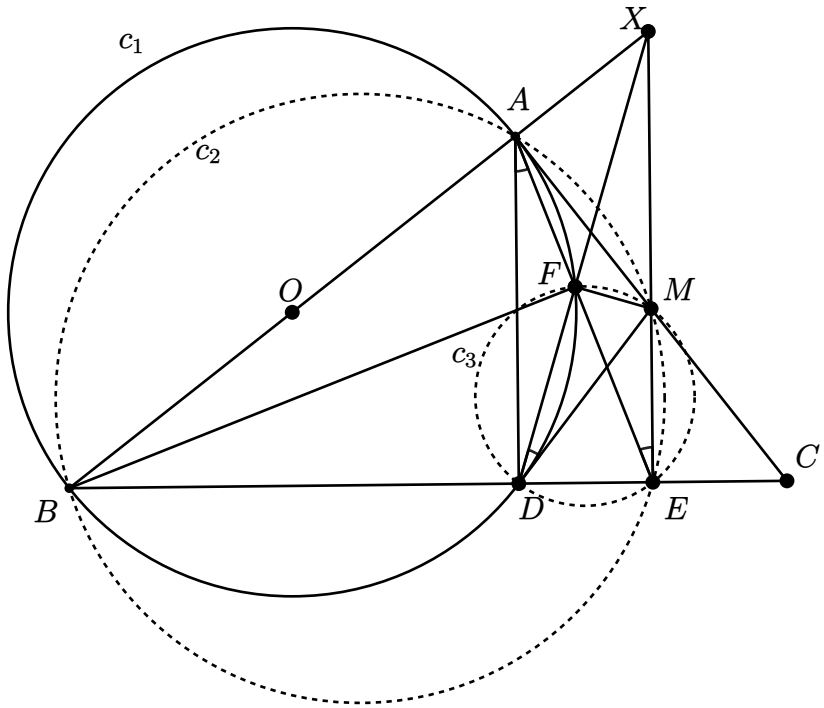
$$|PB| = \frac{2Rr}{|CI|}. \tag{3}$$

Konačno, iz (1), (2) i (3) slijedi $(R + d)(R - d) = 2Rr$, odnosno $R^2 - d^2 = 2Rr$, pa konačno

$$d^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r).$$

Napomena: Tvrdnju $|PB| = \dfrac{2Rr}{|CI|}$ je moguće dokazati bez korištenja sinusovog poučka. Dodamo točku T tako da je $\overline{TP}$ promjer opisane kružnice, te promatramo sličnost trokuta TPB i ICF.

9. JBMO 2025. Zadatak 3.



Označimo opisanu kružnicu $ABDF$ s c_1. Neka je M polovište stranice $\overline{AC}$. Primijetimo da je $\overline{EM}$ srednjica trokuta ADC, stoga je $\sphericalangle MEB = \sphericalangle MAB = 90°$, dakle četverokut $ABEM$ je tetivan. Označimo njegovu opisanu kružnicu s c_2.

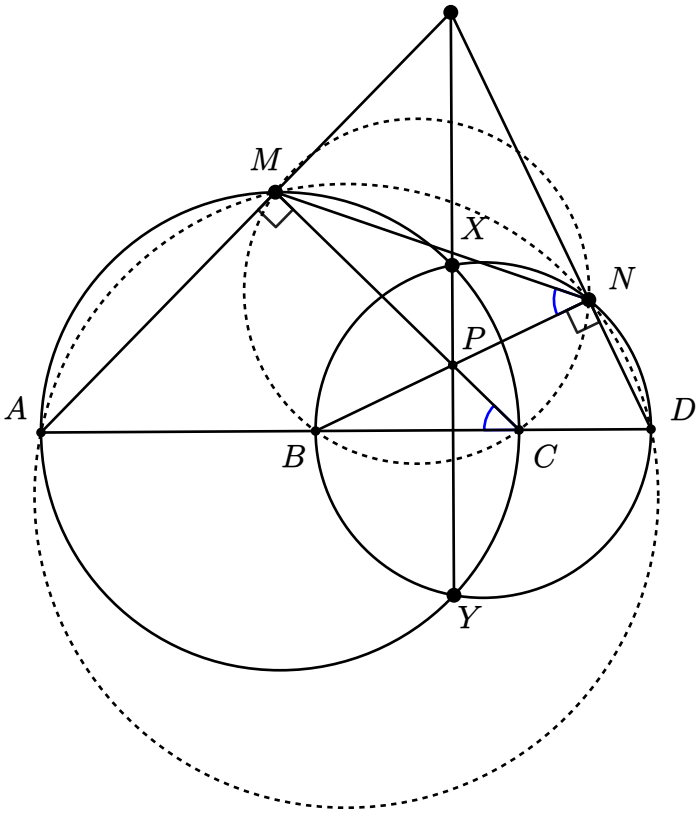
Budući da je M središte opisane kružnice trokuta ADC, vrijedi $|MD| = |MA|$. $\overline{AB}$ je promjer c_1, dakle MA je tangenta na c_1. Stoga MD također mora biti tangenta na c_1. Po poučku o kutu između tetive i tangente, te budući da je $ME \parallel AD$, slijedi

$$\sphericalangle MDF = \sphericalangle DAF = \sphericalangle MEF.$$

Dakle, četverokut $MEDF$ je tetivan. Označimo njegovu opisanu kružnicu s c_3.

Zajedničke tetive AB, DF i EM su radikalne osi kružnica c_1, c_2 i c_3, pa je točka X, kao sjecište AB i DF, radikalno središte tih triju kružnica, dakle mora ležati na osi EM. Budući da je EM simetrala dužine $\overline{CD}$, zaključujemo da je $|XD| = |XC|$.

10. IMO 1995. Zadatak 1.



Pretpostavimo da se točka P nalazi između točaka X i Y. Primijetimo da je P na radikalnoj osi danih kružnica, dakle vrijedi

$$|PB| \cdot |PN| = |PC| \cdot |PM|,$$

odnosno točke B, C, N i M leže na kružnici. Sada je

$$\sphericalangle BNM = \sphericalangle BCM = \sphericalangle ACM = 90^\circ - \sphericalangle CAM,$$

odakle zaključujemo $\sphericalangle DAM + \sphericalangle DNM = 180^\circ$. Dakle, točke A, D, N i M leže na kružnici. Stoga su pravci AM, XY i DN radikalne osi opisanih kružnica trokuta ACM, BDN i ADM, dakle sijeku se u radikalnom središtu.

Slučaj kada P nije između X i Y rješava se analogno.

11. Državno 2017. Zadatak A-4.4.

Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$.

Uočimo da je $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ jer je to središnji kut nad tetivom BC, te je

$$\sphericalangle CQB = 180^\circ - 2\alpha$$

i

$$\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QBC = \alpha.$$

Budući da su pravci AM i BC paralelni, slijedi

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BCQ = \alpha.$$

Da bismo pokazali da točka T leži na kružnici opisanoj trokutu BOC, dovoljno je pokazati da je

$$\sphericalangle QTC = \sphericalangle QBC = \alpha.$$

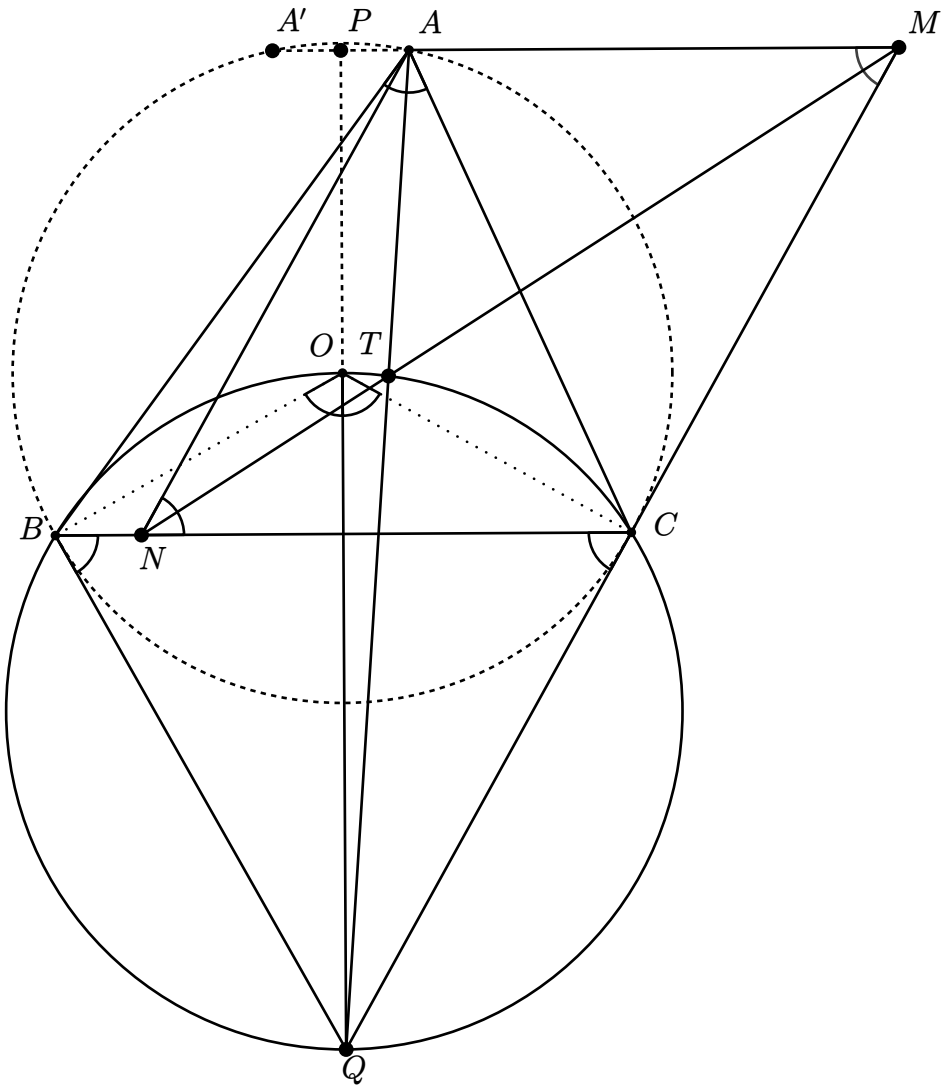
To je ekvivalentno uvjetu da je

$$\sphericalangle CTA = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \sphericalangle AMC,$$

tj. da je četverokut $ATCM$ tetivan.

Dokazat ćemo da je $ATCM$ tetivan tako što ćemo dokazati da su trokuti QTC i QMA slični, tj. da vrijedi

$$|QT| \cdot |QA| = |QC| \cdot |QM|.$$



Uočimo da je pravac OC okomit na pravac QM, pa zaključujemo da je MQ tangenta na opisanu kružnicu trokutu ABC. Neka su A i A' točke presjeka pravca AM s tom kružnicom. Prema poučku o potenciji točke vrijedi

$$|MC|^2 = |MA| \cdot |MA'|.$$

Neka je točka P sjecište pravaca AM i QO. Budući da su pravci AM i BC paralelni, slijedi da je točka P polovište dužine $\overline{AA'}$. Zato vrijedi

$$\begin{aligned} |MC|^2 &= (|MP| - |AP|) \cdot (|MP| + |A'P|) \\ &= (|MP| - |AP|) \cdot (|MP| + |AP|) \\ &= |MP|^2 - |AP|^2. \end{aligned}$$

Koristeći Pitagorin poučak na pravokutne trokute MPQ i APQ dobivamo

$$|MC|^2 = (|MQ|^2 - |PQ|^2) - (|AQ|^2 - |PQ|^2) = |MQ|^2 - |AQ|^2.$$

Iz toga slijedi

$$|AQ|^2 = |MQ|^2 - |MC|^2 = (|MQ| - |MC|) \cdot (|MQ| + |MC|) = |QC| \cdot (|MQ| + |MC|). \quad (1)$$

Budući da su pravci AB i QM paralelni, slijedi $\sphericalangle NAT = \sphericalangle MQT$, a kako su vršni kutovi $\sphericalangle ATN$ i $\sphericalangle QTM$ jednaki, zaključujemo da su trokuti ATN i QTM slični. Slijedi

$$\frac{|AT|}{|QT|} = \frac{|AN|}{|QM|}, \quad \text{tj.} \quad |QT| = \frac{|QM|}{|AN|} \cdot |AT|.$$

Četverokut $ANCM$ je paralelogram, pa je $|AN| = |MC|$ i vrijedi

$$|QT| = \frac{|QM|}{|MC|} \cdot |AT| = \frac{|QM|}{|MC|} \cdot (|QA| - |QT|).$$

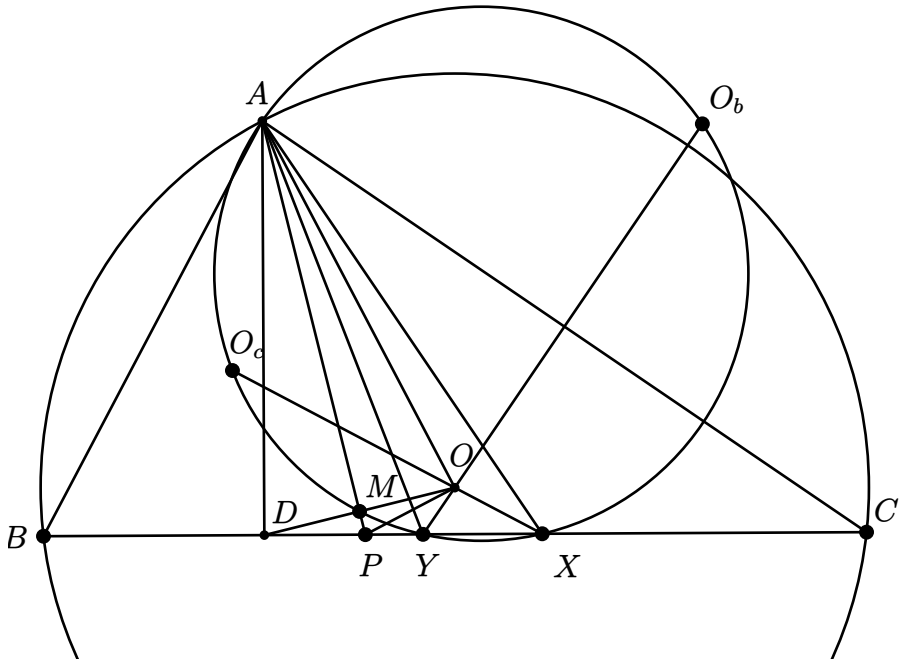
Sređivanjem dobivamo

$$|QT| = \frac{|QM|}{|QM| + |MC|} \cdot |QA|. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $|QT| \cdot |QA| = |QC| \cdot |QM|$. Time je dokaz završen.

12. JBMO 2023. Zadatak 4.

Neka su točke P, X i Y sjecišta pravca BC s pravcima AM, OO_c i OO_b, redom.



Budući da je O_c središte opisane kružnice trokuta AOB i trokut AYC je jednakokračan, vrijedi

$$\sphericalangle AO_cX = 2\sphericalangle ABO = 180^\circ - 2\gamma = \sphericalangle AYX,$$

pa je četverokut AO_cXY tetivan, a analogno je i AO_bXY tetivan. Preostaje dakle dokazati da je i $AMXY$ tetivan, odakle će slijediti da sve četiri točke leže na kružnici opisanoj trokutu AXY.

Budući da je AM simetrala dužine $\overline{OD}$ i da je $\sphericalangle AOP = 90^\circ$, vrijedi

$$|PO|^2 = |PM| \cdot |PA|.$$

Preostaje još dokazati da je

$$|PO|^2 = |PY| \cdot |PX|,$$

što će značiti da je

$$|PM| \cdot |PA| = |PY| \cdot |PX|,$$

odnosno da je četverokut $AMXY$ tetivan. Doista,

$$\sphericalangle POY = 180^\circ - \sphericalangle POA - \sphericalangle O_bOA = 90^\circ - \beta = 90^\circ - \sphericalangle XBA = \sphericalangle OXY,$$

pa je pravac PO tangenta na opisanu kružnicu trokuta OXY, što je i trebalo dokazati.