



Polinomi

Okvirna razina: JBMO / SŠ A var. državno

1. Teorija i primjeri

Definicija 1

Polinom u x je izraz oblika

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Pri tome su brojevi $a_0, a_1, \dots, a_n$ konstantni i zovu se koeficijenti polinoma. Skup polinoma s koeficijentima u skupu A označavamo s $A[x]$. Na primjer, $\mathbb{R}[x]$ je skup svih polinoma s realnim koeficijentima.

Kažemo da je polinom P normiran ako je $a_n = 1$.

O polinomima je najprirodnije razmišljati kao o funkcijama. Polinom $P[x] \in \mathbb{R}[x]$ je funkcija koja svakom realnom broju x pridružuje $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Također, primijetimo da možemo pretpostaviti $a_n \neq 0$ (jer inače možemo maknuti pribojnik $a_n x^n$ bez mijenjanja polinoma) pa ćemo to odsad i raditi.

U ovom predavanju ćemo se najviše usredotočiti na polinome s realnim ili kompleksnim koeficijentima.

Definicija 2

Ako je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, pri čemu je $a_n \neq 0$, tada je n stupanj polinoma P , oznaka $\deg P = n$.

Polinome stupnja 0, 1, 2, 3 zovemo redom konstantni, linearni, kvadratni i kubni polinomi. Polinom $P(x) = 0$ je nul-polinom i definiramo da je njegov stupanj $-\infty$.

Primjer 1

Stupnjevi polinoma $7, x^2 + 1, -2x^3 - x + 1$ su redom 0, 2, 3. Funkcije $\sqrt{x}, \frac{1}{x}, \sin x, |x|$ nisu polinomi. Funkcija

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^4 + 1|$$

je polinom stupnja 4 jer je $x^4 + 1 \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ pa je $f(x) = x^4 + 1$.

Teorem 3: Teorem o jednakosti polinoma

Polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ su jednaki ako i samo ako je $n = m$ i $a_i = b_i$ za sve $i = 0, 1, \dots, n$.

Propozicija 4

Ako su P, Q polinomi, tada je $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ i $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Dokaz. Neka je $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ i $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n \geq m$ i definirati $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$. Tada je

$$(P + Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + b_0$$

pa je $\deg(P + Q) \leq n$ (stupanj se može smanjiti ako je $a_n + b_n = 0$). Također je

$$(PQ)(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + \dots + a_0 b_0$$

pa je $\deg(PQ) = m + n$. □

Definicija 5

Kažemo da je a nultočka (ili korijen) polinoma P ako je $P(a) = 0$.

Nultočke su vrlo bitne kod proučavanja polinoma i neki od najvažnijih rezultata o njima proizlaze iz svojstava nultočaka.

Teorem 6: Teorem o dijeljenju polinoma

Za polinome A i $B \neq 0$ postoje jedinstveni polinomi Q, R takvi da je $A = BQ + R$ i $\deg R < \deg B$.

Dokaz ovog teorema pokazat ćemo na primjeru.

Primjer 2

Neka je $A = x^3 + x^2 - 1$ i $B = x^2 - x - 3$. Tada je

$$A = x^3 + x^2 - 1 = x(x^2 - x - 3) + 2x^2 + 3x - 1 = x(x^2 - x - 3) + 2(x^2 - x - 3) + 5x + 5.$$

Stoga je $Q = x + 2$ i $R = 5x + 5$. Kao što vidimo, dijeljenje polinoma je vrlo slično dijeljenju cijelih brojeva.

Korolar 7: Bezoutov teorem

Broj a je nultočka polinoma P ako i samo ako $x - a \mid P(x)$.

Dokaz. Postoje polinomi Q, R takvi da je R konstantan i $P = (x - a)Q + R$. Sada $x - a \mid P(x)$ ako i samo ako je $R = 0$, što vrijedi ako i samo ako je a nultočka od P . □

Korolar 8

Ako $P \mid Q$, tada je svaka nultočka od P ujedno i nultočka od Q .

Teorem 9: Osnovni teorem algebre

Neka je $P \in \mathbb{C}[x]$ stupnja n . Tada postoje $a, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$P(x) = a(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n).$$

Drugim riječima, svaki polinom stupnja n ima n kompleksnih nultočaka brojeći kratnosti (kratnost nultočke α je najveći broj k takav da $(x - \alpha)^k \mid P(x)$).

Primijetimo da ako je $\alpha \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma $P \in \mathbb{R}[x]$, tada je i $\bar{\alpha}$ nultočka od P . Stoga se nerealne nultočke od P mogu upariti pa se P može faktorizirati u obliku

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x - b_1) \dots (x - b_r) \cdot (x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) \dots (x - \alpha_s)(x - \bar{\alpha}_s) \\ &= a(x - b_1) \dots (x - b_r) \cdot (x^2 - p_1x + r_1) \dots (x^2 - p_sx + r_s), \end{aligned}$$

gdje su $b_1, \dots, b_r$ realne nultočke, $p_i^2 - 4r_i < 0$ za sve $i = 1, \dots, s$ i $r + 2s = n$. Također, iz ovoga slijedi i da svaki realni polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku.

Problem određivanja nultočaka polinoma je općenito težak, osim u nekim specijalnim slučajevima. Za linearne polinome to je trivijalno, za kvadratne polinome $ax^2 + bx + c$ postoji dobro poznata formula $\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ koja se uči u školi, a formule postoje i za polinome stupnja 3 i 4 (iako nisu praktične kao za kvadratne polinome pa ih ne navodimo ovdje). Za polinome višeg stupnja formule tog oblika više ne postoje.

Korolar 10

Ako su dva polinoma stupnja $\leq n$ jednaka u $n + 1$ različitih točaka, tada su oni jednaki.

Dokaz. Pretpostavimo da je $P(a_i) = Q(a_i)$ za $i = 1, \dots, n + 1$. Tada su a_i nultočke polinoma $P - Q$ koji je stupnja $\leq n$ pa je $P - Q = 0$ (jer bi inače mogao imati najviše n nultočaka). $\square$

Korolar 11

Dva polinoma su jednaka ako i samo ako imaju isti stupanj, vodeći koeficijent i sve nultočke s kratnostima su im jednake.

Koeficijenti i nultočke polinoma su usko vezani, kao što nam govore Viéteove formule. Za kvadratne polinome te se formule uče i u školi.

Teorem 12: Viéteove formule

Neka je $P(x) = a_nx^n + \dots + a_0 = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ polinom stupnja n . Tada za svaki $k = 0, 1, \dots, n - 1$ vrijedi

$$\sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}, |S|=n-k} \prod_{i \in S} \alpha_i = (-1)^{n-k} \frac{a_k}{a_n}.$$

Na primjer, vrijedi

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \dots + \alpha_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad \left(\binom{n}{2} \text{ pribrojnika}\right), \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \left(\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}\right) &= (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n}, \\ \alpha_1 \dots \alpha_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.\end{aligned}$$

Dokaz. Slijedi direktno iz uspoređivanja koeficijenata polinoma $a_n x^n + \dots + a_0 = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$. $\square$

Polinomi $\sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}, |S|=n-k} \prod_{i \in S} \alpha_i$ iz gornjeg teorema se inače zovu elementarni simetrični polinomi i za njih vrijedi sljedeća zanimljiva tvrdnja.

Teorem 13

Neka je $P(x_1, \dots, x_n)$ simetričan polinom u n varijabli, tj. $P(x_1, \dots, x_n) = P(y_1, \dots, y_n)$ za bilo koju permutaciju $(y_1, \dots, y_n)$ varijabli $(x_1, \dots, x_n)$. Tada se P može izraziti preko elementarnih simetričnih polinoma.

Primjer 3

Neka je $P(x, y) = x^2 + y^2$. Vidimo da je P simetričan jer je $P(x, y) = P(y, x)$. P se može izraziti preko polinoma $x + y, xy$ na način

$$P(x, y) = (x + y)^2 - 2xy.$$

Polinomi imaju i brojna druga zanimljiva svojstva. Neka od njih su navedena u sljedećim rezultatima.

Propozicija 14

Neka je $P \in \mathbb{R}[x]$. Tada P ima sljedeća svojstva.

1. (Svojstvo međuvrijednosti) Neka je $P(x) = a$ i $P(y) = b$. Tada za svaki broj c između a i b postoji z između x i y takav da je $P(z) = c$.
2. Ako je P normiran, tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da P na intervalu $\langle x, +\infty \rangle$ raste u beskonačnost.
3. Pretpostavimo da je P normiran. Ako je $\deg P$ paran, tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da P na intervalu $\langle -\infty, x \rangle$ raste u beskonačnost. Ako je $\deg P$ neparan, tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da P na intervalu $\langle -\infty, x \rangle$ pada u negativnu beskonačnost.

Sljedeća propozicija nam daje način kako možemo odrediti racionalne nultočke cjelobrojnog polinoma, što je često prvi korak u određivanju svih nultočaka tog polinoma.

Propozicija 15

Neka je $P = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ i pretpostavimo da je $P(\frac{p}{q}) = 0$, pri čemu je $\text{nzd}(p, q) = 1$. Tada vrijedi $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

Posebno, ako je P normiran, tada su sve racionalne nultočke tog polinoma cjelobrojne.

Dokaz. Vrijedi

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + \dots + a_0 = 0 \iff a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Ako promotrimo ovu jednakost mod p , dobivamo da $q \mid a_0 q^n \implies q \mid a_0$. Analogno, ako promotrimo ovu jednakost mod q , dobivamo da $q \mid a_n p^n \implies q \mid a_n$. $\square$

Primjer 4

Promotrimo polinom $P(x) = x^3 - 6x^2 - 11x - 4$. Njegov stupanj je 3 pa ima točno 3 nultočke, računajući kratnosti.

Odredimo prvo sve njegove racionalne nultočke. One moraju biti cjelobrojne i jedini kandidati su $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Ručnom provjerom dobivamo da je -1 jedina cjelobrojna nultočka pa $x + 1 \mid P(x)$. Dijeljenjem polinoma dobivamo

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - 7x - 4).$$

Ostao nam je kvadratni polinom za čije nultočke postoji formula. Stoga su sve nultočke od P jednake -1 i $\frac{7 \pm \sqrt{65}}{2}$.

1.1. Riješeni primjeri

Primjer 5

Neka je $P \in \mathbb{R}[x]$ takav da je $P(x + 1) + P(x - 1) = 2P(x)$. Dokaži da je P stupnja najviše 1.

Rješenje. Neka je $Q(x) = P(x + 1) - P(x)$. Tada vrijedi $Q(x + 1) = Q(x)$ iz čega induktivno slijedi

$$Q(x) = Q(x + 1) = Q(x + 2) = \dots$$

Dakle, polinom Q postiže istu vrijednost u beskonačno mnogo točaka pa mora biti konstantan. Stoga je $P(x + 1) - P(x) = c$. Međutim,

$$P(x + 1) - P(x) = a_n(x + 1)^n + \dots + a_0 - a_n x^n - \dots - a_0 = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

je polinom stupnja $n - 1$ iz čega zaključujemo $n - 1 \leq 0$. $\square$

Primjer 6

Neka je $P \in \mathbb{R}[x]$ normiran stupnja n takav da je $a_{n-1} = 2n$, $a_{n-2} = 2n^2$. Dokaži da nisu sve nultočke tog polinoma realne.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, da su sve nultočke realne. Tada iz Viéteovih formule slijedi

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -2n \implies (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^2 = 4n^2$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = 2n^2.$$

Iz ove dvije jednakosti dobivamo da je

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 4n^2 - 2 \cdot 2n^2 = 0$$

pa bi sve nultočke polinoma trebale biti jednake 0. Međutim, to je kontradikcija s tim da im je suma jednaka $-2n$. $\square$

Primjer 7

Neka su z_1, z_2, z_3 kompleksni brojevi za koje vrijedi $z_1z_2z_3 = 1$ i $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$. Dokaži da je barem jedan od tih brojeva jednak 1.

Rješenje. Glavna ideja ovdje je da konstruiramo neki (normirani) polinom. To će biti polinom

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Znamo mu nultočke, ali mu uz pomoć Viéteovih formula znamo i neke koeficijente. Iz $z_1z_2z_3 = 1$ slijedi da je $c = -1$, a iz drugog uvjeta dobivamo

$$-a = z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1z_2z_3} = -b.$$

Dakle, $a = b$ pa je $P(x) = x^3 + ax^2 - ax - 1$. Sada lako vidimo da je $P(1) = 1 + a - a - 1 = 0$, to povlači da je 1 nultočka polinoma P . Također, sve nultočke tog polinoma su z_1, z_2, z_3 . Dakle, bar jedan od tih brojeva jednak je 1, što je i trebalo dokazati. $\square$

Zadaci za samostalnu vježbu

1. Postoji li polinom s realnim koeficijentima takav da je $P(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$?
2. Neka su a, b, c kompleksni brojevi takvi da je $a + b + c = ab + bc + ca = 0$. Dokaži da je $|a| = |b| = |c|$.
3. Realni brojevi a, b, c, d zadovoljavaju jednakosti

$$abc - d = 1, \quad acd - b = 2, \quad abd - c = 3, \quad bcd - a = -6.$$

Dokaži da $a + b + c + d \neq 0$.

4. Ako za neke realne brojeve a, b, c vrijedi $a \neq 0$ i $c(a - b + c) < 0$, dokaži da je $b^2 \geq 4ac$.
5. Riješi sustav jednačbi

$$\begin{aligned}a + b + c &= 9 \\a^2 + b^2 + c^2 &= 41 \\a^3 + b^3 + c^3 &= 225.\end{aligned}$$

6. Neka su $a \neq b$ brojevi za koje vrijedi

$$a + \frac{4}{a} + 2 = b + \frac{4}{b} + 2 = 0.$$

Odredi $\frac{a^{100} + b^{100}}{a^{98} + b^{98}}$.

7. Nađi sve polinome kojima su svi koeficijenti ± 1 i koji imaju samo realne nultočke.
8. Polinom $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ima nultočke $x_1, \dots, x_n$, a polinom $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$ ima nultočke $x_1^2, \dots, x_n^2$. Ako su $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ i $a_2 + a_4 + a_6 + \dots$ cijeli brojevi, dokaži i da je $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ cijeli broj.
9. Odredi sve polinome s realnim koeficijentima takve da je

$$P(x^2) + 2P(x) = P(x)^2 + 2.$$

10. Za normirani polinom P stupnja 4 vrijedi $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, $P(3) = 30$. Odredi $P(12) + P(-8)$.
11. Dokaži da su sve nultočke polinoma $f(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ realne.
12. Dokaži da $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ nije racionalan broj.

13. Odredi sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je polinom $(x+1)^n - x^n - 1$ djeljiv s $x^2 + x + 1$.

14. Ovisno o realnom parametru a , riješi jednadžbu

$$(a-1)(1+x+x^2)^2 = (a+1)(1+x^2+x^4).$$

15. Dan je polinom P s realnim koeficijentima takav da je $\underbrace{P(\dots P(x))}_{n \text{ puta}} = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $P(P(x)) = x$.

16. Pretpostavimo da za realne brojeve a, b, c polinom

$$g(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

ima 3 različita korijena koji su svi ujedno i korijeni polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c.$$

Izračunaj $f(1)$.

17. Ako je $P(x)$ polinom stupnja n takav da je $P(k) = \frac{k}{k+1}$ za sve $k = 0, 1, 2, \dots, n$, odredi $P(n+1)$.

18. Neka je $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + 1$ polinom kojemu su sve nultočke realne. Dokaži da je $|a| > \sqrt{2}$.

19. Neka je p polinom s pozitivnim koeficijentima. Dokaži da, ako

$$p\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{p(x)}$$

vrijedi za $x = 1$, onda vrijedi i za svaki $x > 0$.

Upute za zadatke za samostalnu vježbu

1. Zamijeni $\frac{1}{n}$ s x .
2. Viéteove formule.
3. Viéteove formule.
4. Kvadratna jednadžba.
5. Izrazi ove tri sume preko izraza $a + b + c$, $ab + ac + bc$, abc .
6. $x^2 + 2x + 4 \mid x^3 - 8$.
7. Viéteove formule.
8. Pronađi relaciju između P i Q .
9. Preuredi jednakost i promatraj nultočke.
10. Uvedi prikladnu supstituciju.
11. Svojstvo međuvrijednosti.
12. Nađi polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ nultočka.
13. Koristi da $x^2 + x + 1 \mid x^3 - 1$.
14. Koristi identitet $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.
15. Promatraj stupanj polinoma.
16. Vrijedi $f(x) = g(x) \cdot (x - r)$.
17. Promotri polinom $(x + 1)P(x) - x$.
18. Viéteove formule.
19. Cauchy-Schwarz.

Rješenja zadataka za samostalnu vježbu

1. Ako uvedemo supstituciju $x = \frac{1}{n}$, tada za beskonačno mnogo vrijednosti x vrijedi

$$P(x) = \frac{1}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{x}{x + 2}.$$

Stoga polinom $(x + 2)P(x) - x$ ima beskonačno mnogo nultočka pa mora biti nulpolinom. Međutim, kada u jednakost $(x + 2)P(x) - x = 0$ uvrstimo $x = -2$, dobivamo $2 = 0$ što je kontradikcija. Stoga ne postoji takav polinom.

2. Neka je $t = abc$. Po pretpostavci zadatka i Viéteovim formulama a, b, c su nultočke polinoma $x^3 + t$. Drugim riječima, vrijedi

$$a^3 = b^3 = c^3 = -t \implies |a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |t| \implies |a| = |b| = |c| = \sqrt[3]{|t|}.$$

3. Iz uvjeta zadatka slijedi $abc + abd + acd + bcd = a + b + c + d$. Neka je $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$. Ako je $a + b + c + d = 0$, tada je

$$P(x) = x^4 + sx^2 + t$$

za neke brojeve s, t . Korijeni ove bikvadratne jednadžbe su

$$x = \pm \sqrt{\frac{-s + \sqrt{s^2 - 4t}}{2}}$$

pa se oni mogu upariti u parove $\{x, -x\}$. Neka je bez smanjenja općenitosti $b = -a$. Slučajevi $c = -a$ i $d = -a$ se riješe analogno. Tada je

$$bcd - a = b(cd + 1) = 1, \quad acd - b = -b(cd + 1) = 2.$$

Ove dvije jednakosti ne mogu vrijediti istovremeno pa smo dobili kontradikciju.

4. Identitet $b^2 - 4ac$ nas podsjeća na kvadratne polinome. Neka je $P(x) = ax^2 + bx + c$. Tada je

$$c(a - b + c) = P(0)P(-1) < 0$$

pa su $P(0)$ i $P(-1)$ različitog predznaka. To znači da P ima nultočku između 0 i 1, a postojanje realne nultočke nužno implicira da je diskriminanta tog polinoma pozitivna, tj. $b^2 - 4ac \geq 0$.

5. Izrazimo ove 3 sume preko izraza $a + b + c, ab + bc + ca, abc$. Vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) \implies ab + ac + bc = 20.$$

Također je

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2),$$

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) = (a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 3abc.$$

Stoga je

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc \implies abc = 12.$$

Zaključujemo da su a, b, c nultočke polinoma $x^3 - 9x^2 + 20x - 12$. Odredimo prvo ima li ovaj polinom racionalnih nultočaka. Kako je polinom normiran, sve njegove racionalne nultočke moraju biti cjelobrojne i djelitelji broja 12. Ručnom provjerom nalazimo da su $x = 1, 2, 6$ nultočke pa su a, b, c jednaki nekoj permutaciji brojeva 1, 2, 6.

6. Brojevi a, b su korijeni polinoma $x^2 + 2x + 4$ pa vrijedi $a + b = -2$ i $ab = 4$ (jer su različiti). Primijetimo da je

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

pa je $a^3 = b^3 = 8$. Zaključujemo da je

$$\frac{a^{100} + b^{100}}{a^{98} + b^{98}} = \frac{2^{99}(a + b)}{2^{96}(a^2 + b^2)} = 8 \frac{a + b}{(a + b)^2 - 2ab} = \frac{8 \cdot (-2)}{(-2)^2 - 4 \cdot 4} = 4.$$

7. Neka je n stupanj polinoma i $a_1, \dots, a_n$ nultočke. Tada je

$$a_1 + \dots + a_n = \pm 1, \sum_{i < j} a_i a_j = \pm 1 \implies a_1^2 + \dots + a_n^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2 - 2 \sum_{i < j} a_i a_j \leq 3.$$

Također je $a_1 \dots a_n = \pm 1$. Međutim, A-G nejednakost nam sada kaže da je

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq n \sqrt[n]{a_1^2 \dots a_n^2} = n$$

iz čega slijedi $n \leq 3$.

Svi linearni polinomi $\pm x \pm 1$ su očito rješenje. Iz formule za rješenje kvadratne jednadžbe vidimo da ne postoje traženi kvadratni polinomi. Neka je sada $n = 3$.

Tada vrijedi jednakost u gornjoj A-G nejednakosti što znači da su svi a_i jednaki ± 1 . Kako je $a_1 + a_2 + a_3 = \pm 1$, lako vidimo da je $a_1 = a_2 = 1, a_3 = -1$ ili $a_1 = a_2 = -1, a_3 = 1$. Iz tih nultočaka možemo konstruirati polinome

$$\pm(x - 1)^2(x + 1) = \pm(x^3 - x^2 - x + 1), \quad \pm(x + 1)^2(x - 1) = \pm(x^3 + x^2 - x - 1)$$

i time smo dobili sva rješenja zadatka.

8. Vrijedi $P(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ i $Q(x) = (x - x_1^2) \dots (x - x_n^2)$. Primijetimo sada da je

$$Q(x^2) = (x^2 - x_1^2) \dots (x^2 - x_n^2) = (x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot (x + x_1) \dots (x + x_n) = P(x) \cdot (-1)^n P(-x).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} b_1 + \dots + b_n &= Q(1) = (-1)^n P(1)P(-1) = (-1)^n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(-a_1 + a_2 - \dots + a_n) \\ &= (-1)^n ((a_2 + a_4 + \dots)^2 - (a_1 + a_3 + \dots)^2) \end{aligned}$$

što je cijeli broj po pretpostavci zadatka.

9. Zadana je jednakost

$$P(x^2) - 1 = (P(x) - 1)^2.$$

Ako uvedemo supstituciju $Q(x) = P(x) - 1$, dobivamo

$$Q(x^2) = Q(x)^2.$$

Ako je Q konstantan, tada je $Q = 0, 1$. Pretpostavimo sada da Q nije konstantan polinom. Promotrimo nultočke polinoma Q . Ako je $a \in \mathbb{C}$ nultočka od Q , tada je i a^2 također nultočka, a također su i brojevi $\pm\sqrt{a}$ nultočke.

Ako je $a \neq 0$, tada je $\sqrt{a} \neq -\sqrt{a} \neq 0$ pa uzastopnim korjenovanjem brojeva $a, \pm\sqrt{a}, \dots$ dobivamo beskonačno mnogo nultočaka Q , što je kontradikcija jer Q ima samo konačno mnogo nultočaka. Dakle, jedina nultočka od Q je $a = 0$ pa je $Q(x) = cx^n$. Uvrštavanjem u jednadžbu $Q(x^2) = Q(x)^2$ vidimo da mora biti $c = 1$.

Stoga su sva rješenja početne jednadžbe $P = 0, -1$ i $P(x) = x^n - 1$.

- 10.** Primijetimo da vrijedi $P(i) = 10i$ za $i = 1, 2, 3$. Stoga su $1, 2, 3$ nultočke polinoma $Q(x) = P(x) - 10x$ pa je

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - c) + 10x$$

za neki broj c . Sada je

$$\begin{aligned} P(12) + P(-8) &= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (12 - c) + 120 + (-9) \cdot (-10) \cdot (-11) \cdot (-8 - c) - 80 \\ &= 990 \cdot 20 + 40 = 19840. \end{aligned}$$

- 11.** Uvrštavanjem $x = 0, 1, \dots, 7$ dobivamo da je

$$f(0), f(3), f(4), f(7) > 0, \quad f(1), f(2), f(5), f(6) < 0.$$

Stoga f ima nultočku na 4 intervala $\langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 6, 7 \rangle$. Kako je $\deg f = 4$, f ima 4 kompleksne nultočke pa su sve njegove nultočke realne.

- 12.** Neka je $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Tada je

$$a^2 = 2 - \sqrt{3} \implies (a^2 - 2)^2 = 3 \implies a^4 - 4a^2 + 1 = 0.$$

Sve racionalne nultočke ovog polinoma moraju biti cjelobrojne, a jedini kandidati ± 1 očito nisu nultočke. Stoga a nije racionalan.

- 13.** Znamo da vrijedi $x^2 + x + 1 \mid x^3 - 1$ i primijetimo da je $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x^3 - 1) + 3(x^2 + x + 1) - 1 \equiv -1 \pmod{x^2 + x + 1}$. Stoga je

$$\begin{aligned} (x + 1)^{3k} - x^{3k} - 1 &\equiv (-1)^k - 1 - 1 \not\equiv 0 \pmod{x^2 + x + 1}, \\ (x + 1)^{3k+1} - x^{3k+1} - 1 &\equiv (-1)^k(x + 1) - x - 1 = ((-1)^k - 1)(x + 1) \pmod{x^2 + x + 1}, \\ (x + 1)^{3k+2} - x^{3k+2} - 1 &\equiv (-1)^k(x + 1)^2 - x^2 - 1 \equiv (-1)^k x - x^2 - 1 \pmod{x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da su sva rješenja brojevi $n = 3(2l) + 1 = 6l + 1$ i $n = 3(2l + 1) + 2 = 6l + 5$.

14. Imamo jednačbu

$$(a-1)(1+x+x^2)^2 = (a+1)(1+x^2+x^4).$$

Zbog identiteta

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

jednačba postaje

$$(a-1)(1+x+x^2)^2 = (a+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Vidimo da su brojevi $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ (korijeni polinoma $x^2 + x + 1$) rješenja za svaki a . Sada možemo podijeliti jednačbu s $x^2 + x + 1$ i dobiti

$$\begin{aligned}(a-1)(1+x+x^2) &= (a+1)(x^2-x+1) \implies (a-1) \cdot 2x = (a+1)(x^2-x+1) \\ &\implies (a+1)x^2 - 2ax + (a+1) = 0 \\ &\implies x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a+1)^2}}{2(a+1)}.\end{aligned}$$

Dakle, rješenja su brojevi $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ za svaki a i brojevi $\frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a+1)^2}}{2(a+1)}$ za $a \neq -1$.

15. Neka je $k = \deg P$. Tada je polinom $\underbrace{P(\dots P(x))}_{n \text{ puta}}$ stupnja k^n , a polinom x je stupnja 1. Stoga mora vrijediti $k^n = 1$, odnosno $k = 1$.

Dakle, $P(x) = ax+b$. Promotrimo sada vodeće koeficijente. Vodeći koeficijent polinoma $\underbrace{P(\dots P(x))}_{n \text{ puta}}$

je a^n pa mora biti $a^n = 1 \implies a = \pm 1$. Ako je $a = 1$, tada je

$$\underbrace{P(\dots P(x))}_{n \text{ puta}} = x + nb \neq x$$

pa ovaj slučaj nije moguć. Ako je $a = -1$, tada je $P(P(x)) = P(b-x) = x$.

16. Svi korijeni od g su ujedno i korijeni od f pa znamo da vrijedi $g \mid f$. Također, $\deg f = \deg g + 1$ pa je $f(x) = g(x)(x-r)$ za neki broj r . Raspisivanjem dobivamo

$$f(x) = g(x)(x-r) = x^4 + (a-r)x^3 + (1-ra)x^2 + (10-r)x - 10r.$$

Izjednačavanjem sada dobivamo da je $10-r = 100$ i $a-r = 1$ pa je $r = -90$, $a = -89$. Stoga je

$$f(1) = 1 + (a-r) + (1-ra) + (10-r) - 10r = -7007.$$

17. Polinom $(x+1)P(x) - x$ je stupnja $n+1$ i njegove nultočke su $0, 1, \dots, n$. Stoga je

$$(x+1)P(x) - x = a \cdot x(x-1) \dots (x-n)$$

za neki realni broj a . Također, ako uvrstimo $x = -1$, dobivamo

$$1 = a \cdot (-1)(-2) \dots (-n-1) \implies a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Sada možemo uvrstiti $x = n+1$ i dobiti

$$(n+2)P(n+1) - (n+1) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!} = (-1)^{n+1} \implies P(n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + n+1}{n+2}.$$

18. Neka su p, q, r, s nultočke P . Tada vrijedi

$$p + q + r + s = a, \quad pq + pr + ps + qr + qs + rs = 1$$

pa je

$$0 \leq p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = (p + q + r + s)^2 - 2(pq + pr + ps + qr + qs + rs) = a^2 - 2.$$

Iz ovoga slijedi da je $a^2 \geq 2$ pa je $|a| \geq \sqrt{2}$. Jednakost može vrijediti samo ako je $p = q = r = s = 0$, a lako vidimo da taj slučaj nije moguć. Zato je $|a| > \sqrt{2}$.

19. Trebamo dokazati da vrijedi $p(x)p(\frac{1}{x}) \geq 1$. Primijetimo da iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi

$$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = (a_n x^n + \dots + a_0) \left(\frac{a_n}{x^n} + \dots + a_0\right) \geq (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0)^2 = p(1)^2.$$

Iz uvjeta zadatka je $p(1)^2 \geq 1$ pa je i $p(x)p(\frac{1}{x}) \geq p(1)^2 \geq 1$.