



Nizovi

Okvirna razina: JBMO / SŠ A var. državno

1. Uvod i notacija

Pojam niza intuitivno je jasan, ali zapišimo za početak formalnu definiciju.

Definicija 1

Neka je A bilo koji skup. Niz elemenata iz A je bilo koja funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Umjesto $a(n)$ pišemo a_n i kažemo da je to n -ti član niza. Nizove često zapisujemo kao $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ili $a_1, a_2, \dots$. Ponekad će nizovi biti indeksirani s $\mathbb{N}_0$ umjesto $\mathbb{N}$, u kojem slučaju imamo i nulti član niza, a_0 .

Kao što piše u definiciji, ako ne naglasimo drugačije, smatramo da su nizovi beskonačni, iako ponekad govorimo o konačnim nizovima, u kojem slučaju su to samo k -torke. To da je niz beskonačan ne znači da poprima beskonačno mnogo različitih vrijednosti. Na primjer, ako stavimo $a_n = (-1)^n$, onda taj beskonačan niz poprima dvije vrijednosti. U zadacima na natjecanjima najčešće promatramo nizove realnih brojeva ili nizove prirodnih/cijelih brojeva.

Jedno od najvažnijih svojstava niza je njegov rast. Pojam rasta niza također je intuitivan, ali definirajmo ga formalno.

Definicija 2

Za niz realnih brojeva $a_1, a_2, \dots$ kažemo da je rastući ako je $a_{n+1} \geq a_n$ za svaki $n \geq 1$, te kažemo da je padajući ako je $a_{n+1} \leq a_n$ za svaki $n \geq 1$. Kažemo da je niz strogo rastući ako je $a_{n+1} > a_n$ za svaki $n \geq 1$ i strogo padajući ako je $a_{n+1} < a_n$ za svaki $n \geq 1$.

Primjer 1

Postoji li niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takav da za svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$a_{a_n} = a_{n+1} - a_n?$$

Rješenje. Pretpostavimo da takav niz postoji. Slijedi da je $a_{n+1} - a_n > 0$, odnosno niz je (strogo) rastući. Iz toga slijedi da je $a_n \geq n$ za svaki prirodan broj n . Međutim, iz uvjeta imamo $a_{a_n} = a_{n+1} - a_n < a_{n+1}$, pa je $a_n < n + 1$ (ovdje smo ponovno koristili strogu rastućost niza). Dakle, nužno je $a_n = n$ za svaki prirodan broj n . Međutim, taj niz ne zadovoljava uvjet zadatka jer je $a_{a_n} = n \neq a_{n+1} - a_n = 1$ za $n > 1$. $\square$

Ovdje smo koristili jako važnu ideju: ako je $(a_n)_n$ niz prirodnih brojeva i $a_{n+1} > a_n$, onda je $a_{n+1} \geq a_n + 1$. Ta diskretnost (razdvojenost prirodnih brojeva) nam omogućava da zaključimo jače nejednakosti iz slabijih, što često pomaže u rješavanju zadataka.

2. Aritmetički nizovi

Definicija 3

Za niz $a_1, a_2, \dots$ kažemo da je aritmetički ako je svaki član niza (osim prvog) aritmetička sredina prethodnog i sljedećeg člana, odnosno

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{za } n \geq 2.$$

Primijetimo da je uvjet iz definicije ekvivalentan s $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, pa je razlika svaka dva uzastopna člana aritmetičkog niza konstantna i jednaka nekom realnom broju d . Taj broj d zovemo razlika aritmetičkog niza. Označimo s a broj a_1 . Indukcijom se može dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

Pomoću Gaussove dosjetke možemo lako izračunati zbroj prvih n članova aritmetičkog niza.

Propozicija 4

Neka je $a_1, a_2, \dots$ aritmetički niz s početnim članom a i razlikom d . Tada za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Dokaz. Za $k = 1, \dots, n$ vrijedi $a_k + a_{n+1-k} = a + (k-1)d + a + (n-k)d = 2a + (n-1)d$. U sumi $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ imamo n takvih parova. Ako zbrojimo svih n parova onda smo svaki član brojali dvaput i dobivamo $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2na + n(n-1)d$, pa dijeljenjem s 2 slijedi tvrdnja. $\square$

Primjer 2

Svaki član niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva, počevši od drugog, jednak je aritmetičkoj sredini geometrijske i aritmetičke sredine dvaju njemu susjednih članova. Ako je $a_1 = \frac{1}{505}$ i $a_{505} = 505$, odredi a_{1010} .

Rješenje. Prema uvjetu zadatka za svaki $n \geq 2$ vrijedi

$$a_n = \frac{\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} + \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}{2} = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n+1}})^2}{4}.$$

Dakle,

$$\sqrt{a_n} = \frac{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n+1}}}{2},$$

pa je niz $(\sqrt{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ aritmetički niz.

Označimo s d razliku tog niza. Iz uvjeta zadatka slijedi

$$(505 - 1)d = \sqrt{a_{505}} - \sqrt{a_1} = \sqrt{505} - \frac{1}{\sqrt{505}} = \frac{504}{\sqrt{505}} \implies d = \frac{1}{\sqrt{505}}.$$

Stoga je

$$\sqrt{a_{1010}} = \sqrt{a_1} + (1010 - 1)d = \frac{1010}{\sqrt{505}} = 2\sqrt{505},$$

tj. $a_{1010} = 4 \cdot 505 = 2020$. □

3. Geometrijski nizovi

Definicija 5

Za niz $a_1, a_2, \dots$ kažemo da je geometrijski ako je svaki član niza (osim prvog) geometrijska sredina prethodnog i sljedećeg člana, odnosno

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \quad \text{za } n \geq 2.$$

Uvjet iz definicije ekvivalentan je s $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, pa je omjer svaka dva uzastopna člana geometrijskog niza konstantna i jednaka nekom realnom broju r . Taj broj r zovemo omjer geometrijskog niza. Označimo s a broj a_1 . Kao i za aritmetičke nizove, za geometrijske nizove imamo formulu za opći član niza. Za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a_n = a \cdot r^{n-1}.$$

Propozicija 6

Neka je $a_1, a_2, \dots$ nekonstantan geometrijski niz s početnim članom a i omjerom r . Tada za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz identiteta $1 + r + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$. □

Primjer 3

Pet međusobno različitih realnih brojeva a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a njihov zbroj iznosi 50. Odredi te brojeve ako su brojevi a_1, a_2 i a_5 uzastopni članovi geometrijskog niza.

Rješenje. Budući da su a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 uzastopni članovi aritmetičkog niza, postoji realan broj d takav da je $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$ i $a_5 = a_1 + 4d$.

Zbog $50 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d = 5(a_1 + 2d)$ dobivamo $a_1 + 2d = 10$.

Budući da su a_1 , a_2 i a_5 uzastopni članovi geometrijskog niza, dobivamo

$$a_1 \cdot a_5 = a_2^2,$$

odnosno

$$a_1 \cdot (a_1 + 4d) = (a_1 + d)^2.$$

Ako u ovu jednadžbu uvrstimo $a_1 + 2d = 10$ dobivamo $(10 - 2d)(10 + 2d) = (10 - d)^2$.

Rješavanjem gornje jednadžbe dobivamo da je $d = 0$ ili $d = 4$.

Budući da su a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 različiti realni brojevi, slučaj $d = 0$ otpada, pa zaključujemo da je nužno $d = 4$.

Uvrštavanjem dobivamo da su traženi brojevi $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 10$, $a_4 = 14$ i $a_5 = 18$. $\square$

4. Matematička indukcija

Ključan alat za rad s nizovima je matematička indukcija. To je i očekivano, pošto su nizovi parametrizirani prirodnim brojevima, pa ako želimo dokazati da neka tvrdnja vrijedi za svaki član niza, najprirodniji način je koristiti matematičku indukciju. Mnogi naizgled teški zadaci postanu jednostavni ako se samo sjetimo da matematička indukcija postoji.

Primjer 4

Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da je $a_1 = 1$ i $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da je $a_n \geq \frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza $n = 1$ očito vrijedi jer je $a_1 = 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n .

Ako je $0 < a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$, tada je $a_n = a_{n+1}^2 + a_{n+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$.

Također, vrijedi $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ jer je $(n+1)^2 = n(n+2) + 1 > n(n+2)$.

Dobili smo kontradikciju, pa mora vrijediti $a_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$, čime je korak indukcije dokazan. $\square$

Primjer 5

Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da je $a_1 = \sqrt{2}$ i

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Dokaži da je $a_n \geq \sqrt{2n}$ za svaki prirodan broj n .

Rješenje. Primijetimo da je

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2.$$

Matematičkom indukcijom slijedi da je $a_n^2 \geq a_1^2 + 2(n-1) = 2n$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Zadaci za samostalnu vježbu

1. Odredi sve nenegativne realne brojeve x takve da su $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ i x uzastopni članovi aritmetičkog niza (ne nužno u tom poretaku).

2. Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nekonstantan aritmetički niz realnih brojeva takav da postoji prirodni broj r za koji je

$$a_{r+1} + a_{r+2} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{3r+2}.$$

Dokaži da niti jedan član tog niza nije jednak 0.

3. Koristeći niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definirana su dva nova niza, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tako da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$b_n = a_{n+1} - \sum_{i=1}^n a_i, \quad c_n = a_{n+2} - a_{n+1}.$$

Ako je niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aritmetički, dokaži da je $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geometrijski niz.

4. Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$n \cdot 2^m + m = m \cdot 2^n + n.$$

5. Niz (a_n) zadan je rekursivno: $a_1 = 2$, $a_n = 2(n + a_{n-1})$ za $n \geq 2$. Dokaži da je $a_n < 2^{n+2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

6. Dani su aritmetički niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i geometrijski niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takvi da su im svi članovi pozitivni realni brojevi i da vrijedi

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \text{ i } \quad a_{10} = b_3.$$

Dokaži da se svaki član niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pojavljuje u nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7. Neka su p_1 i q_1 cijeli brojevi takvi da jednačba $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo brojeve p_{n+1} i q_{n+1} formulama

$$p_{n+1} = p_n + 1, \quad q_{n+1} = q_n + \frac{1}{2}p_n.$$

Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje jednačba $x^2 + p_nx + q_n = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja.

8. Neka je C realni broj, (a_n) niz realnih brojeva i neka je, za svaki prirodni broj n ,

$$M_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Ako za svaka tri međusobno različita prirodna broja i, j, k vrijedi

$$(i - j)M_k + (j - k)M_i + (k - i)M_j = C,$$

dokaži da je niz (a_n) aritmetički.

9. Neka je $a = \sqrt[2026]{2026}$ i neka je (a_n) niz takav da je $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a^{a_n}$ za $n \geq 1$. Postoji li prirodni broj n takav da je $a_n \geq 2026$?

10. Neka je $a_1, a_2, \dots, a_{41}$ aritmetički niz takav da je

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}}$$

prirodni broj. Ako je $a_1 = 1$, a razlika niza prirodni broj, odredi razliku niza.

11. Dokaži da je $r = 2$ najveći realni broj r koji zadovoljava sljedeći uvjet: Ako niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodnih brojeva zadovoljava

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

za svaki prirodni broj n , tada postoji prirodni broj M takav da je $a_{n+2} = a_n$ za svaki $n \geq M$.

Upute za zadatke za samostalnu vježbu

1. Koji su mogući poretci članova niza?
2. Član niza jednak je nuli ako je početni član "djeljiv" razlikom.
3. Svaki član aritmetičkog niza je aritmetička sredina prethodnika i sljedbenika.
4. Definiraj niz $a_n = \frac{2^n - 1}{n}$. Što možeš reći o njegovom rastu?
5. Probaj pogoditi opću formulu za član niza.
6. Zapiši što znači da se b_n pojavljuje u nizu $(a_n)_n$.
7. Izračunaj determinantu svake od kvadratnih jednadžbi.
8. Dokaži da je $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ također aritmetički.
9. Iskoristi matematičku indukciju.
10. Iskoristi formulu za aritmetički niz.
11. Probaj dokazati da je niz omeđen za $r = 2$, a za $r > 2$ smisli primjer.

Rješenja zadataka za samostalnu vježbu

1. Neka je $x = k + r$, gdje je $k = \lfloor x \rfloor$ i $r = \{x\}$. Iz uvjeta zadatka slijedi da brojevi k , r i $k + r$ čine aritmetički niz. Kako je $x \geq 0$, slijedi $k \geq 0$.

Vidimo da je $k + r \geq k$ i $k + r \geq r$, pa je $k + r$ najveći član niza.

Ako je k najmanji član niza, tada je $k \leq r < 1$ pa je $k = 0$. Tada brojevi 0 , r i r čine aritmetički niz pa je $r = 0$ i dobivamo rješenje $x = 0$.

Ako je r najmanji član niza, onda vrijedi $k = \frac{1}{2}(r + (k + r))$. Slijedi da je $r = \frac{k}{2}$.

Kako je $r < 1$, mora vrijediti $k < 2$.

Za $k = 0$ dobivamo da je $r = 0$ i ponovno dobivamo $x = 0$.

Za $k = 1$ dobivamo da je $r = \frac{1}{2}$ i dobivamo rješenje $x = \frac{3}{2}$.

2. Označimo s a početni član i s d razliku aritmetičkog niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tada je $a_n = a + (n - 1)d$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i uvijek

$$a_{r+1} + a_{r+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{3r+2}$$

možemo zapisati kao

$$2a + (2r + 1)d = (3r + 2)a + d \cdot (1 + 2 + \dots + 3r + 1),$$

odnosno

$$2a + (2r + 1)d = (3r + 2)a + \frac{(3r + 2)(3r + 1)}{2} \cdot d.$$

Slijedi da je

$$a = \left(\frac{4r + 2 - (3r + 2)(3r + 1)}{6r} \right) \cdot d = \frac{-9r - 5}{6} \cdot d.$$

Pretpostavimo da je $a_n = 0$ za neki prirodan broj n . Tada je $a + (n - 1)d = 0$, odnosno

$$d \cdot \left(\frac{-9r - 5}{6} + n - 1 \right) = 0,$$

iz čega slijedi da je $\frac{-9r - 5}{6}$ cijeli broj. Međutim, to je kontradikcija jer 6 ne dijeli $-9r - 5$ ni za koji prirodan broj r . Dakle, niti jedan član niza nije jednak 0.

3. Kako je niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aritmetički, svaki njegov član nakon prvog jednak je aritmetičkoj sredini njegovog prethodnika i sljedbenika. Za sve $n \in \mathbb{N}$ slijedi

$$b_{n+1} = \frac{b_n + b_{n+2}}{2}$$

$$a_{n+2} - \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \frac{1}{2} \left(a_{n+1} - \sum_{i=1}^n a_i + a_{n+3} - \sum_{i=1}^{n+2} a_i \right)$$

$$2a_{n+2} - a_{n+1} - a_{n+3} = 2 \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^{n+2} a_i$$

$$(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+3} - a_{n+2}) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^n a_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n+2} a_i - \sum_{i=1}^{n+1} a_i \right).$$

Korištenjem definicije niza $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ te činjenice da se parovi suma u zagradama na desnoj strani razlikuju za po jedan pribrojnik, dalje dobivamo

$$c_n - c_{n+1} = a_{n+1} - a_{n+2} = -c_n$$

$$c_{n+1} = 2c_n.$$

Kako gornja jednakost vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je niz $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geometrijski s kvocijentom 2.

4. Jednadžbu zapišimo u obliku

$$\frac{2^n - 1}{n} = \frac{2^m - 1}{m}.$$

Definirajmo niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dan s $a_n = \frac{2^n - 1}{n}$ i pokažimo da je ovaj niz strogo rastući.

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{2^n - 1}{n} \\ &= \frac{n(2^{n+1} - 1) - (n+1)(2^n - 1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{(n-1)2^n + 1}{n(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

zaključujemo da je svaki sljedeći član niza veći od prethodnog, pa je onda niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaista rastući.

Stoga, da bi vrijedila početna jednadžba, jedino je moguće da vrijedi $m = n$. Očito su svi parovi (n, n) za $n \in \mathbb{N}$ zaista rješenja početne jednadžbe.

5. Prvih nekoliko članova niza su

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2(2+2) = 8, \quad a_3 = 2(3+8) = 22, \quad a_4 = 2(4+22) = 52, \quad \dots$$

Promotrimo razlike $2^{n+2} - a_n$:

$$\begin{aligned} 2^3 - a_1 &= 8 - 2 = 6, \\ 2^4 - a_2 &= 16 - 8 = 8, \\ 2^5 - a_3 &= 32 - 22 = 10, \\ 2^6 - a_4 &= 64 - 52 = 12. \end{aligned}$$

Naslućujemo da vrijedi $a_n = 2^{n+2} - 2(n+2)$, što ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Bazu indukcije smo već provjerili.

Pretpostavimo da je $a_n = 2^{n+2} - 2(n+2)$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Koristeći zadanu rekurziju dobivamo

$$a_{n+1} = 2((n+1) + a_n) = 2(n+1 + 2^{n+2} - 2(n+2)) = 2 \cdot 2^{n+2} - 2(n+3) = 2^{n+3} - 2(n+3).$$

Ovim je proveden korak indukcije, pa zaključujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = 2^{n+2} - (n+2) < 2^{n+2}.$$

6. Kako je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aritmetički niz, postoje brojevi a, d takvi da je $a_n = a + (n-1)d$. Također, kako je $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geometrijski niz, postoje brojevi b, q takvi da je $b_n = bq^{n-1}$. Iz $a_1 = b_1$ zaključujemo $a = b$.

Kako su b_1, b_2 i b_3 uzastopni članovi geometrijskog niza, vrijedi $b_1 b_3 = b_2^2$. Korištenjem uvjeta zadatka dobivamo

$$\begin{aligned} a(a+9d) &= (a+d)^2 \\ a^2 + 9ad &= a^2 + 2ad + d^2 \\ d(7a-d) &= 0. \end{aligned}$$

Ako je $d = 0$, tada je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstantan. U tom slučaju bismo imali

$$b = b_1 = a_1 = a_2 = b_2 = bq,$$

odakle je $b = 0$ ili $q = 1$. U prvom slučaju članovi niza ne bi bili pozitivni, a u drugom slučaju je i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstantan i jednak članovima niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pa je tvrdnja zadatka zadovoljena.

Inače imamo $d = 7a$, pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = a + (n-1)d = a + 7(n-1)a.$$

Iz uvjeta $a_2 = b_2$ i korištenjem $a = b$ slijedi $8a = aq$.

Ako je $a = 0$, članovi niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne bi bili pozitivni. Zaključujemo da je nužno $q = 8$, odnosno članovi niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dani su s $b_n = a \cdot 8^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Brojevi oblika 8^{n-1} za sve $n \in \mathbb{N}$ daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 7. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $8^{n-1} = 7k + 1$. Posebno, to znači da je

$$b_n = a \cdot 8^{n-1} = a(7k+1) = a_{k+1},$$

čime smo dokazali da se zaista svaki element niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pojavljuje u nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

7. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka je D_n diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2 + p_n x + q_n = 0$:

$$D_n = p_n^2 - 4q_n.$$

Iz zadanog uvjeta zaključujemo da je D_1 kvadrat nekog cijelog broja.

Nadalje imamo:

$$D_{n+1} = p_{n+1}^2 - 4q_{n+1} = (p_n + 1)^2 - 4\left(q_n + \frac{1}{2}p_n\right) = p_n^2 - 4q_n + 1 = D_n + 1.$$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n jednadžba $x^2 + p_n x + q_n = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja. Tada je $D_n = k^2$ za neki cijeli broj k , te imamo:

$$D_{n+2k+1} = D_n + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Osim toga, kako su $\frac{1}{2}(-p_n + \sqrt{D_n})$ i $\frac{1}{2}(-p_n - \sqrt{D_n})$ cijeli brojevi, zaključujemo da su p_n i D_n iste parnosti. No, tada je i

$$p_{n+2k+1} \equiv p_n + 2k + 1 \equiv p_n + 1 \equiv D_n + 1 \equiv D_n + 2k + 1 \equiv D_{n+2k+1} \pmod{2}$$

pa i jednadžba $x^2 + p_{n+2k+1}x + q_{n+2k+1} = 0$ također ima dva cjelobrojna rješenja.

Time smo dokazali da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n za koje jednadžba $x^2 + p_n x + q_n = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja.

8. Uvrštavanjem $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ i $(i, j, k) = (2, 1, 3)$ dobivamo da je

$$-M_3 - M_1 + 2M_2 = C = M_3 - 2M_2 + M_1,$$

tj. $C = -C$, odnosno $C = 0$. Uvrstimo sada $(i, j, k) = (n, n+1, n+2)$ pa je

$$M_{n+1} = \frac{M_n + M_{n+2}}{2},$$

za svaki prirodni broj n , što znači da je niz (M_n) aritmetički. Dakle, postoje realni brojevi m i d takvi da je

$$M_n = m + nd,$$

za svaki prirodni broj n . Tada je

$$a_n = nM_n - (n-1)M_{n-1} = m + (n^2 - (n-1)^2)d = (m-d) + n(2d),$$

tj. niz (a_n) je također aritmetički.

9. Takav prirodan broj ne postoji.

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj n vrijedi $a_n < 2026$.

Baza indukcije. Za $n = 1$, vrijedi $a = \sqrt[2026]{2026} < 2026$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi $a_n < 2026$. Tada je

$$a_{n+1} = a^{a_n} < a^{2026} = 2026.$$

Po principu matematičke indukcije slijedi da je $a_n < 2026$ za svaki prirodan broj n .

10. Neka je $d \in \mathbb{N}$ razlika danog niza. Primijetimo da je

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} = \frac{1}{d}(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}),$$

pa je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}} \\ &= \frac{1}{d}(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_{41}} - \sqrt{a_{40}}) \\ &= \frac{1}{d}(\sqrt{a_{41}} - \sqrt{a_1}). \end{aligned}$$

Znamo da je $a_1 = 1$ i $a_{41} = 1 + 40d$, stoga moramo odrediti sve prirodne brojeve d takve da je izraz

$$n = \frac{\sqrt{40d+1} - 1}{d}$$

prirodni broj.

Najprije, $40d+1$ je prirodni broj pa je $\sqrt{40d+1}$ prirodni broj ako i samo ako postoji prirodni broj k takav da je $40d+1 = k^2$.

To znači da je $d = \frac{k^2-1}{40}$ i $n = \frac{\frac{k-1}{40}}{\frac{k^2-1}{40}} = \frac{40}{k+1}$.

Konačno, zaključujemo $k+1 \mid 40$ i $40 \mid k^2-1$.

Iz prvog uvjeta slijedi da je $k \in \{1, 3, 4, 7, 9, 19, 39\}$, a zatim iz drugog $k \in \{9, 19, 39\}$.

Konačno, sva rješenja su $d = 2$, $d = 9$ i $d = 38$.

- 11.** Neka je prvo $r = 2$. Treba dokazati da će niz postati konstantan. Pretpostavimo suprotno, tada ima beskonačno indeksa n za koje je $a_{n+2} > a_n$. Primijetimo da ako je $a_n = a_{n+1}$, onda je $a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + 2a_n} < a_n + 1$, pa je $a_{n+2} = a_n$. Induktivno slijedi da su svi članovi niza tada jednaki. Pretpostavimo da za svaki n vrijedi $a_n \neq a_{n+1}$.

Ako je niz ograničen, odnosno ako postoji c takav da je $a_n \leq c$ za svaki prirodan broj n , onda je $a_{n+2} = a_n$ za sve n dovoljno velike. Dakle, niz je neograničen.

Neka je n indeks takav da je $a_{n+2} > a_{n+1}$ i $a_{n+2} > a_n$. Iz uvjeta zadatka slijedi

$$(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n) \leq 2a_{n+1}.$$

Ako je $a_{n+2} \geq a_n + 2$, onda je $a_{n+2} + a_n \leq a_{n+1}$ i $a_{n+2} < a_{n+1}$, kontradikcija. Dakle, $a_n = a_{n+2} - 1$ i vrijedi $2a_{n+2} - 1 \leq 2a_{n+1}$, iz čega slijedi $a_{n+1} \geq a_{n+2}$, kontradikcija.

Za $r > 2$, uzmimo niz $K, K, K+1, K+1, K+2, K+2, \dots$ za K takav da je $(r-2)K > 1$. Tada vrijedi prva strana uvjeta svakako, a za drugu stranu imamo $K+1 \leq \sqrt{K^2 + rK}$, što vrijedi jer je $rK > 2K + 1$.

Slijedi da je $r = 2$ najveći broj za koji je uvjet zadovoljen.