

Kvadratna funkcija

Okvirna razina: HJMO / SŠ A var. županijsko

1. Tok kvadratne funkcije

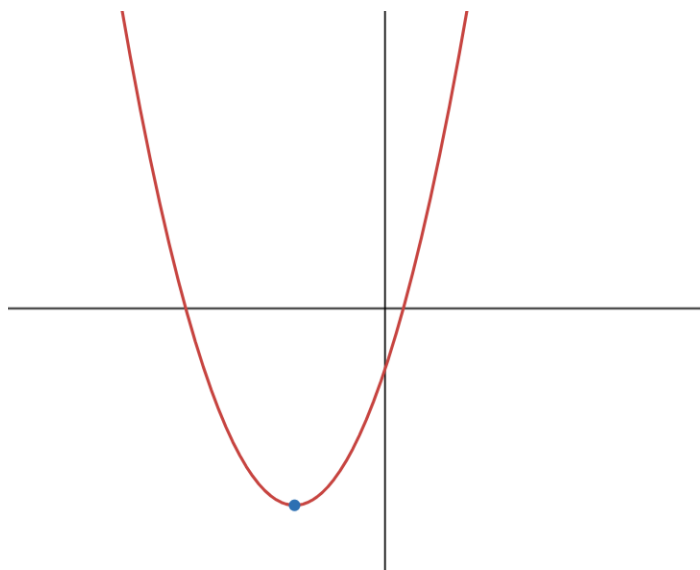
Definicija 1

Kvadratna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su a, b, c realni brojevi, te je $a \neq 0$.

Primijetimo da $ax^2 + bx + c$ možemo koristeći nadopunjavanje do kvadrata zapisati kao

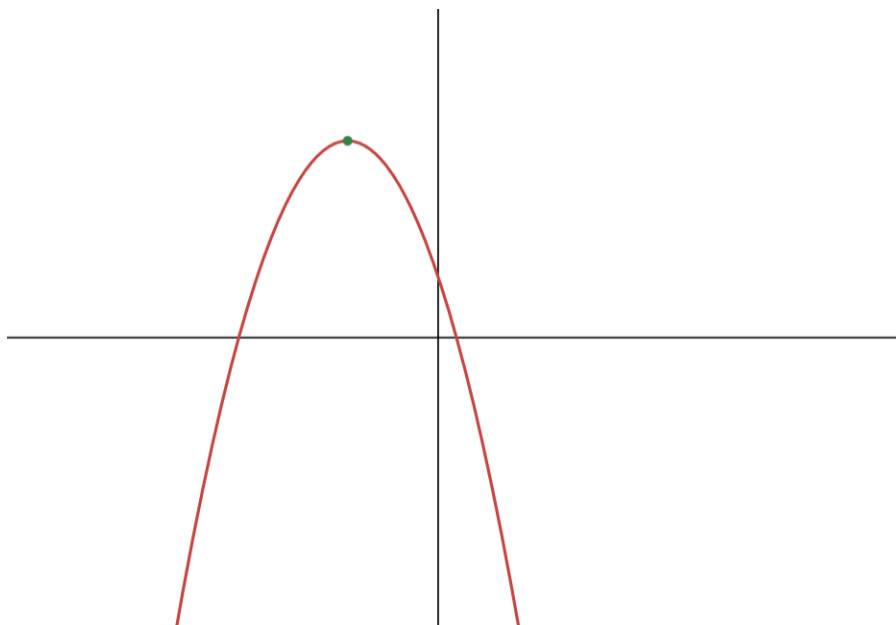
$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Ako je $a > 0$, slijedi da je najmanja vrijednost koju kvadratna funkcija postiže jednaka $-\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$, i tu vrijednost postiže za $x = -\frac{b}{2a}$. Označimo $D = b^2 - 4ac$. Izraz D zovemo diskriminanta kvadratne funkcije. Funkcija $f(x)$ je padajuća na intervalu $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i rastuća na intervalu $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$, te je najmanja vrijednost koju postiže jednaka $f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{D}{4a}$.



Slika 1: Kvadratna funkcija za $a > 0$.

Ako je $a < 0$, situacija je obratna. Tada je $f(x)$ rastuća na intervalu $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, padajuća na intervalu $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$, te je najveća vrijednost koju postiže jednaka $f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{D}{4a}$.



Slika 2: Kvadratna funkcija za $a < 0$.

Točku $T = (\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$ zovemo tjeme kvadratne funkcije. Kvadratna funkcija u točki $\frac{-b}{2a}$ postiže svoj minimum/maksimum (ovisno o predznaku od a) i on iznosi $\frac{-D}{4a}$.

Primjer 1

Baka Jagoda prodaje trešnje te je uočila da postoji linearna ovisnost između cijene jednog kilograma trešanja i količine prodanih trešanja u danu: svakim povećanjem cijene za 1 € po kilogramu bi u danu prodala 3 kilograma trešanja manje. Najveći iznos od prodaje trešanja bi ostvarila kada bi ih prodavala po cijeni od 3.6 € po kilogramu. Jednog dana unuka Višnja zamijenila je baku na tržnici, sama odredila cijenu kilograma trešanja i prodala trešnje za 18.6 €. Po kojoj je cijeni Višnja mogla prodavati trešnje?

Rješenje. Označimo s x cijenu kilograma trešanja u eurima. Tada količinu prodanih trešanja u kilogramima možemo opisati s $a - bx$, za neke realne brojeve a i b . Iznos od prodaje trešanja jednak je $f(x) = x(a - bx) = -bx^2 + ax$, što je kvadratna funkcija po x .

Iz uvjeta zadatka slijedi $b = 3$. Nadalje, najveći iznos od prodaje trešanja postiže se u tjemenu kvadratne funkcije f , pa slijedi

$$\frac{-a}{-2b} = 3.6,$$

odakle je $a = 21.6$.

Ako je Višnja prodavala trešnje po cijeni od y eura po kilogramu, vrijedi $f(y) = 18.6$, odakle je

$$\begin{aligned} -3y^2 + 21.6y &= 18.6 \\ -5y^2 + 36y - 31 &= 0, \end{aligned}$$

odakle dobivamo rješenja $y = 1$ i $y = \frac{31}{5} = 6.2$.

Zaključujemo da su moguće cijene po kojima je Višnja prodavala trešnje 1 € po kilogramu i 6.2 € po kilogramu. $\square$

2. Kvadratna jednadžba

Definicija 2

Kvadratna jednadžba je jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su a, b, c zadani realni brojevi takvi da je $a \neq 0$.

Propozicija 3

Kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima realna rješenja ako i samo ako je diskriminanta nenegativna, odnosno $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Rješenja kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dokaz. Kao i ranije, izraz $ax^2 + bx + c$ možemo koristeći nadopunjavanje do kvadrata zapisati kao

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ je onda ekvivalentna s

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = 0,$$

odnosno

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ako je $b^2 - 4ac < 0$ i $x \in \mathbb{R}$, onda je lijeva strana jednadžbe nenegativna, a desna strana negativna pa nema realnih rješenja. U suprotnom, uzimanjem korijena slijedi

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

odnosno

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

□

Primijetimo da ako je $D = 0$, onda je $x_1 = x_2$ i kvadratna jednadžba ima samo jedno rješenje, a ako je $D > 0$ onda kvadratna jednadžba ima dva rješenja.

U terminima kvadratne funkcije, dokazali smo da kvadratna funkcija ima dvije realne nultočke ako je $D > 0$, jednu realnu nultocku ako je $D = 0$ i nula realnih nultočaka ako je $D < 0$.

Primjer 2

Neka je $c \neq \frac{1}{4}$ realan broj. Pretpostavimo da jednadžba $x^2 + x + c = 0$ ima realna rješenja. Dokaži da je točno jedno od tih realnih rješenja veće od $\frac{-1}{2}$.

Rješenje. Rješenja jednadžbe su $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ i $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$. Vidimo da je $x_1 > \frac{-1}{2}$ i $x_2 < \frac{-1}{2}$ jer je $\sqrt{1 - 4c} > 0$. □

Primjer 3

Za realne brojeve a, b, c vrijedi $c(a - b + c) < 0$. Dokaži da je $b^2 > 4ac$.

Rješenje. Uvjet $b^2 > 4ac$ nas podsjeća na diskriminantu. Štoviše, $b^2 - 4ac > 0$ je ekvivalentno s time da je diskriminanta pozitivna, odnosno s time da jednačba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita realna rješenja.

Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tada je $f(0) = a$ i $f(-1) = a - b + c$, pa je $f(0)f(1) < 0$. Slijedi da su $f(0)$ i $f(1)$ suprotnog predznaka, pa je $f(x) = 0$ za neki x između 0 i 1. Slijedi da $ax^2 + bx + c = 0$ ima barem jedno realno rješenje. Ako bi jednačba imala samo jedno dvostruko rješenje, tada bi funkcija rasla (ili padala) od $-\infty$ do tjemena $(-\frac{b}{2a}, 0)$, a onda padala (ili rasla) od tjemena do $+\infty$. Međutim, tada funkcija ili ne poprima pozitivne ili ne poprima negativne vrijednosti, što je kontradikcija s time da su $f(0)$ i $f(-1)$ različitog predznaka. $\square$

2.1. Vieteove formule

Propozicija 4: Vieteove formule

Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačbe $ax^2 + bx + c = 0$. Tada je

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a}, \\x_1 x_2 &= \frac{c}{a}.\end{aligned}$$

Dokaz. Uvrstimo izraze za x_1 i x_2 i direktno provjerimo. $\square$

Korolar 5

Neka su x_1 i x_2 nultočke kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tada je

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dokaz. Prema Vieteovim formulama kvadratne funkcije $ax^2 + bx + c$ i $a(x - x_1)(x - x_2)$ imaju iste koeficijente, pa tvrdnja slijedi. $\square$

Primjer 4

Riješi sustav jednačbi

$$\begin{aligned}x + y &= 12, \\xy &= 35.\end{aligned}$$

Rješenje. U ovom zadatku ćemo koristiti Vieteove formule u suprotnom smjeru. Naime, iz Viete-ovih formula slijedi da su x i y nultočke neke kvadratne jednačbe. Točnije, ta jednačba je

$$t^2 - 12t + 35 = 0.$$

Iz formule za rješenje kvadratne jednadžbe, slijedi da su rješenja $\frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 35}}{2}$, odnosno 5 i 7. Slijedi da su rješenja početnog sustava $(x, y) = (5, 7)$ i $(x, y) = (7, 5)$.

Primijeti da smo dobili dva para (x, y) koji su rješenje, što i nije čudno jer je sustav simetričan po x i y . $\square$

2.2. Što ako nema realnih rješenja?

Zasad smo u slučaju kad je diskriminanta D negativna samo rekli da nema realnih rješenja, jer korijen negativnog realnog broja nije realan broj. Međutim, ako malo povećamo skup brojeva u kojima tražimo rješenja, uvijek ćemo imati rješenja.

Označimo sa i broj $\sqrt{-1}$, odnosno dodajmo simbol i za koji vrijedi $i^2 = -1$. Tada za negativan broj $-x$ vrijedi $(i\sqrt{x})^2 = -x$. Drugim riječima, broj $-x$ odjednom ima drugi korijen.

Kompleksan broj je bilo koji izraz oblika $a + bi$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}$. Kompleksne brojeve možemo zbrajati na očit način, a možemo ih i množiti:

$$(a + bi)(c + di) = ac + i(ad + bc) + bd \cdot i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Za kompleksan broj $z = a + bi$, definiramo njihov realan dio kao $\operatorname{Re}(z) = a$ i kompleksan dio kao $\operatorname{Im}(z) = b$.

Kompleksne brojeve možemo (i trebamo) prikazivati u ravnini: kompleksan broj $z = a + bi$ poistovjećujemo s točkom (a, b) u ravnini. U skladu s time, definiramo modul (ili apsolutnu vrijednost) kompleksnog broja kao $|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$, odnosno kao udaljenost od točke (a, b) do ishodišta.

U skupu kompleksnih brojeva svaka kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima rješenja, dana istim formulama kao i prije:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Primjer 5

Promotrimo jednadžbu $x^2 + x + 1 = 0$. Njena diskriminanta je $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$. Rješenja su $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ i $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, odnosno $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ i $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$. Provjerimo da su stvarno rješenja:

$$x_1^2 = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{1 + (\sqrt{3}i)^2 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -x_1 - 1,$$

te analogno za x_2 .

Primijetimo da kad imamo kompleksna rješenja x_1 i x_2 koja nisu realna, njihovi realni dijelovi su isti, a njihovi imaginarni dijelovi su suprotnih predznaka. To motivira sljedeću definiciju.

Definicija 6

Za kompleksan broj $z = a + bi$, definiramo njegov kompleksni konjugat $\bar{z}$ kao

$$\bar{z} = a - bi.$$

Kažemo da su z i $\bar{z}$ čine kompleksno konjugirani par.

Propozicija 7

Ako rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su a, b, c realni brojevi, nisu realna, tada x_1 i x_2 čine kompleksno konjugirani par, odnosno $\bar{x}_1 = x_2$.

Modul kompleksnog broja z i njegov kompleksno konjugirani par povezani su na sljedeći način: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. To se vidi ovako: ako je $z = a + bi$, tada je

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2.$$

Primjer 6

Neka je z kompleksan broj takav da je

$$\frac{6z^2 + 5z + 6}{3z^2 + 10z + 3}$$

realan. Dokaži da je z realan ili $|z| = 1$.

Rješenje. Pretpostavimo da z nije realan. Neka je t realan broj takav da je

$$\frac{6z^2 + 5z + 6}{3z^2 + 10z + 3} = t.$$

Tada je

$$6z^2 + 5z + 6 = t(3z^2 + 10z + 3),$$

odnosno

$$(6 - 3t)z^2 + (5 - 10t)z + (6 - 3t) = 0.$$

Ako je $6 - 3t = 0$, onda je $z = 0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da z nije realan.

Ako je $6 - 3t \neq 0$, onda imamo kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima kojoj jedno od rješenja nije realno. Slijedi da rješenja čine kompleksno konjugirani par, pa su z i $\bar{z}$ rješenja gornje jednadžbe.

Iz Vièteovih formula slijedi da je

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{6 - 3t}{6 - 3t} = 1.$$

Dakle, vrijedi $|z| = 1$. □

2.3. Simetrični polinomi u dvije varijable

Za polinom $f(x, y)$ u dvije varijable x i y kažemo da je simetričan ako je $f(x, y) = f(y, x)$ za sve x, y . Primjeri simetričnih polinoma su $x + y$ i xy . Štoviše, pomoću ta dva simetrična polinoma možemo izraziti sve ostale simetrične polinome.

Teorem 8

Neka je $f(x, y)$ simetričan polinom. Tada postoji polinom $g(u, v)$ u dvije varijable takav da je $f(x, y) = g(x + y, xy)$.

Teorem se može dokazati matematičkom indukcijom. Rijetko nam je potreban u punoj generalnosti, ali često nam je korisno znati da možemo sve izraziti preko $x + y$ i xy .

Primjer 7

Neka je x realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Dokaži da je $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodan broj n .

Rješenje. Uvedimo najprije supstituciju $y = \frac{1}{x}$, uz koju izraz iz zadatka poprima formu simetričnog polinoma $x^n + y^n$. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja je istovjetna uvjetu zadatka. Za $n = 2$ imamo $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2$, što je također cijeli broj. Općenito imamo

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - (x^{n-2} + y^{n-2}).$$

Ako su $x^{n-1} + y^{n-1}$ i $x^{n-2} + y^{n-2}$ cijeli, slijedi da je i $x^n + y^n$ cijeli. Dakle, po matematičkoj indukciji slijedi da je $x^n + y^n$ cijeli broj za svaki prirodan broj n . $\square$

3. Jednadžbe koje se svode na kvadratne jednadžbe

Ponekad neku jednadžbu pomoću prikladne supstitucije možemo svesti na kvadratnu jednadžbu.

Primjer 8

Odredi sva realna rješenja jednadžbe $x^4 + 4x^2 - 32 = 0$.

Rješenje. Neka je $y = x^2$. Tada je $y^2 - 4y - 32 = 0$. Iz formule za rješenja kvadratne jednadžbe slijedi $y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 36}}{2}$, odnosno $y_1 = 8$ i $y_2 = -4$. Kako je $y = x^2 \geq 0$, slučaj $y = -4$ eliminiramo, i slijedi $y = x^2 = 8$. Dakle, rješenja jednadžbe su $x = \sqrt{8}$ i $x = -\sqrt{8}$. $\square$

Jednadžbe iz gornjeg primjera zovemo bikvadratne jednadžbe.

Primjer 9

U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = 24.$$

Rješenje. Pomnožimo sve sa $x^2(1-x)^2$ da se riješimo nazivnika. Dobivamo jednadžbu

$$x^2 + (1-x)^2 = 24x^2(1-x)^2.$$

Neka je $t = x(1 - x)$. Tada je $x^2 + (1 - x)^2 = (x + 1 - x)^2 - 2x(1 - x) = 1 - 2t$, i dobivamo jednadžbu

$$1 - 2t = 24t^2.$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe slijedi $t = \frac{1}{6}$ ili $t = \frac{-1}{4}$. Preostaje riješiti kvadratne jednadžbe

$$x(1 - x) = \frac{1}{6}$$

i

$$x(1 - x) = \frac{-1}{4}.$$

Rješenja prve jednadžbe su

$$\frac{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}{2},$$

a rješenja druge jednadžbe su

$$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

□

Zadaci za samostalnu vježbu

1. Riješi sustav jednačbi

$$\begin{aligned}x^2 + 6xy + y^2 &= 41, \\ x + y &= 5.\end{aligned}$$

2. Neka su a i c pozitivni realni brojevi, te promotrimo kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + \frac{a+c}{2}x + c$. Neka su x_1 i x_2 njene nultočke. Odredi $x_1 + x_2 + x_1x_2$ u ovisnosti o a i c .
3. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da jednačba $ax^2 + bx + c = 0$ ima racionalna rješenja. Dokaži da je barem jedan od a, b, c paran.
4. Odredi sve vrijednosti realnog parametra m za koje jednačba $x^2 + (1 - m)x + m + 1 = 0$ ima dva različita realna rješenja pri čemu je veće rješenje manje od dvostrukog manjeg rješenja.
5. Paralelni pravci p_1 i p_2 sijeku parabol $f(x) = ax^2 + bx + c$ u točkama A, B , odnosno C, D . Dokaži da je suma apscisa točaka A i B jednaka sumi apscisa točaka C i D .
6. Odredi sve parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi
- $$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1.$$
7. Koeficijenti a, b i c kvadratne jednačbe $ax^2 + bx + c = 0$ tri su uzastopna prirodna broja (u nekom od šest mogućih poredaka), a njezina su rješenja realni brojevi. Dokaži da je jedno od rješenja broj -1 .
8. Neka su x i y racionalni brojevi takvi da su $x + y$ i $x^2 + y^2$ cijeli brojevi. Jesu li nužno x i y cijeli brojevi?
9. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Rješenja kvadratne jednačbe $ax^2 + bx + 1 = 0$ su realna. Ako svako od tih rješenja umanjimo za 1, dobit ćemo rješenja kvadratne jednačbe $bx^2 + x + a = 0$. Odredi sve takve realne brojeve a, b .
10. Neka su a, b, c i d međusobno različiti realni brojevi. Ako su a i b rješenja jednačbe $x^2 - 10cx - 11d = 0$, a c i d rješenja jednačbe $x^2 - 10ax - 11b = 0$, odredi zbroj $a + b + c + d$.
11. Neka su a, b i c realni brojevi takvi da je $a + 2b + c > 0$ i $a - 2b + c < 0$. Dokaži da vrijedi $b^2 > ac$.
12. Branko ispisuje niz kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. U svakom koraku, nakon prethodno napisanog polinoma $ax^2 + bx + c$, zapisuje polinom $cx^2 + bx + a$ ili polinom $a(x + d)^2 + b(x + d) + c$ za neki realni broj d .
Ako započne s polinomom $x^2 - 2x - 1$, može li Branko opisanim postupkom nakon određenog broja koraka dobiti polinom:

a) $2x^2 - 1$?

b) $2x^2 - x - 1$?

Upute za zadatke za samostalnu vježbu

1. Izrazi jednu od varijabli preko druge.
2. Iskoristi Vieteove formule.
3. Diskriminanta jednadžbe treba biti kvadrat cijelog broja.
4. Zapiši rješenja preko m - manje rješenje je ono s negativnim predznakom.
5. Vieteove formule su korisne.
6. Jednadžba je simetrična po x i y .
7. Pokaži da mora biti $b = 3$, a zatim razmotri koje vrijednosti a i c dolaze u obzir. Za svaku dobivenu jednadžbu provjeri je li -1 rješenje.
8. Uvedi supstituciju $m = x + y$ i izrazi $x^2 + y^2$ pomoću m i x , zatim analiziraj racionalnost korijena dobivene kvadratne jednadžbe.
9. Primijeni Vièteove formule na obje jednadžbe i izrazi zbroj i umnožak korijena jednadžbe $ax^2 + bx + 1 = 0$ pomoću a i b . Zatim usporedi s koeficijentima jednadžbe $bx^2 + x + a = 0$.
10. Primijeni Vièteove formule na obje jednadžbe i zbroji dobivene relacije. Zatim iskoristi činjenicu da je a rješenje prve jednadžbe kako bi eliminirao d .
11. Promotri kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ i izračunaj $f(1)$ te $f(-1)$.
12. Promotri što se događa s diskriminantom pri transformaciji.

Rješenja zadataka za samostalnu vježbu

1. Iz druge jednadžbe slijedi $y = 5 - x$, i dobivamo jednadžbu

$$x^2 + 6x(5 - x) + (5 - x)^2 = 0.$$

Sređivanjem dobivamo

$$-4x^2 + 20x + 25 = 0,$$

odnosno

$$4x^2 - 20x - 25 = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 400}}{8} = \frac{20 \pm 20\sqrt{2}}{8} = \frac{5 \pm 5\sqrt{2}}{2}.$$

Iz $y = 5 - x$ slijedi

$$y = \frac{5 \mp 5\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, rješenja su

$$\left(\frac{5 + 5\sqrt{2}}{2}, \frac{5 - 5\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{5 - 5\sqrt{2}}{2}, \frac{5 + 5\sqrt{2}}{2} \right).$$

2. Po Vieteovim formulama, vrijedi $x_1 + x_2 = \frac{-(a+c)}{2a}$ i $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Slijedi

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = \frac{-(a+c) + 2c}{2a} = \frac{(c-a)}{2a}.$$

3. Da bi kvadratna jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima imala racionalna rješenja, diskriminanta treba biti kvadrat racionalnog broja. Kako je diskriminanta i cijeli broj, slijedi da diskriminanta treba biti kvadrat cijelog broja, odnosno vrijedi

$$b^2 - 4ac = n^2$$

za neki cijeli broj n . Ako su a, b, c svi neparni, onda je i n neparan i vrijedi

$$4ac = (n - b)(n + b).$$

Međutim, desna strana je djeljiva s 8 jer su $n - b$ i $n + b$ oba parni i daju različite ostatke pri dijeljenju s 4, pa je neki od njih djeljiv s 4 i umnožak djeljiv s 8. Dakle, dobivamo kontradikciju. Slijedi da je neki od a, b, c nužno paran.

4. Kvadratna jednadžba $x^2 + (1 - m)x + m + 1 = 0$ imat će dva različita realna rješenja ako je njezina diskriminanta pozitivna, tj. ako vrijedi

$$D = (1 - m)^2 - 4(m + 1) = m^2 - 6m - 3 > 0.$$

Rješavanjem gornje kvadratne nejednadžbe dobivamo da mora biti

$$m \in \langle -\infty, 3 - 2\sqrt{3} \rangle \cup \langle 3 + 2\sqrt{3}, +\infty \rangle.$$

Rješenja početne kvadratne jednadžbe $x^2 + (1 - m)x + m + 1 = 0$ su

$$x_1 = \frac{m - 1 + \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{m - 1 - \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2}.$$

Direktnom provjerom vidimo da je $x_1 > x_2$ pa da bi vrijedio drugi uvjet zadatka mora biti $x_1 < 2x_2$.

Uvrštavanjem gornjih formula za rješenja kvadratne jednadžbe redom imamo

$$\begin{aligned} \frac{m - 1 + \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2} &< 2 \cdot \frac{m - 1 - \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2} \\ m - 1 + \sqrt{m^2 - 6m - 3} &< 2m - 2 - 2\sqrt{m^2 - 6m - 3} \\ 3\sqrt{m^2 - 6m - 3} &< m - 1. \end{aligned}$$

Budući da je $\sqrt{m^2 - 6m - 3} \geq 0$ iz gornje nejednakosti slijedi da nužno mora biti $m > 1$.

Nadalje, kvadriranjem prethodne nejednakosti redom imamo

$$\begin{aligned} 9(m^2 - 6m - 3) &< (m - 1)^2 \\ 8m^2 - 52m - 28 &< 0 \\ 2m^2 - 13m - 7 &< 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornje kvadratne nejednadžbe dobivamo da mora biti $m \in \langle -\frac{1}{2}, 7 \rangle$.

Konačno, kombiniranjem svih uvjeta koje smo prethodno dobili za parametar m , dobivamo da za sve $m \in \langle 3 + 2\sqrt{3}, 7 \rangle$ vrijede uvjeti zadatka.

5. Neka su pravci zadani s $y = mx + b_1$ i $y = mx + b_2$. Tada su apscise točaka A i B rješenja kvadratnih jednadžbi $ax^2 + bx + c = mx + b_1$, pa je zbroj apscisa jednak $\frac{m-b}{a}$. Vidimo da ne ovisi o b_1 , pa ako b_1 zamijenimo s b_2 dobit ćemo isti odgovor, kao što je i trebalo dokazati.
6. Primijetimo da jednadžbu možemo zapisati kao $xy(x + y) - x^2 - y^2 = 1$, odnosno $xy(x + y + 2) - (x + y)^2 = 1$. Uvedimo supstituciju $u = x + y$, $v = xy$. Tada jednadžba glasi

$$u^2 - uv - 2v + 1 = 0.$$

Njena diskriminanta (po u) mora biti potpun kvadrat da bi imala cjelobrojno rješenje, pa postoji cijeli broj n takav da je

$$v^2 + 8v - 4 = (v + 4)^2 - 20 = n^2.$$

Jedina dva potpuna kvadrata koji se razlikuju za 20 su 16 i 36, pa je $v + 4 = 6$ ili $v + 4 = -6$ (uz $n = 4$). U prvom slučaju je $v = xy = 2$, a u drugom $v = xy = -10$.

Slučaj 1: $xy = 2$. Jednadžba po u postaje

$$u^2 - 2u - 3 = (u - 3)(u + 1) = 0,$$

dakle $u = 3$ ili $u = -1$.

- $x + y = 3$, $xy = 2$: x i y su korijeni jednadžbe $t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0$, što daje rješenja $(x, y) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$.
- $x + y = -1$, $xy = 2$: x i y su korijeni jednadžbe $t^2 + t + 2 = 0$, čija je diskriminanta $-7 < 0$, pa nema realnih rješenja.

Slučaj 2: $xy = -10$. Jednadžba po u postaje

$$u^2 + 10u + 21 = (u + 3)(u + 7) = 0,$$

dakle $u = -3$ ili $u = -7$.

- $x + y = -3$, $xy = -10$: korijeni jednadžbe $t^2 + 3t - 10 = (t + 5)(t - 2) = 0$, što daje rješenja $(x, y) \in \{(2, -5), (-5, 2)\}$.
- $x + y = -7$, $xy = -10$: korijeni jednadžbe $t^2 + 7t - 10 = 0$, čija je diskriminanta 89 nije potpun kvadrat, pa nema cjelobrojnih rješenja.

Dakle, svi parovi cijelih brojeva koji zadovoljavaju zadanu jednadžbu su

$$(x, y) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, -5), (-5, 2)\}.$$

7. Kako jednadžba ima barem jedno realno rješenje, vrijedi $b^2 - 4ac \geq 0$.

Budući da su a , b i c uzastopni prirodni brojevi (u nekom poretku), brojevi a i c iznose barem $b - 1$ i $b - 2$, pa vrijedi $4ac \geq 4(b - 1)(b - 2)$. Uvrštavanjem imamo

$$0 \leq b^2 - 4ac \leq b^2 - 4(b - 1)(b - 2) = -3b^2 + 12b - 8 = -3(b - 1)(b - 3) + 1.$$

Za $b > 3$ vrijedi $3(b - 1)(b - 3) > 9$, odnosno $-3(b - 1)(b - 3) + 1 < 0$. Zato mora vrijediti $b \leq 3$.

S druge strane, b je prirodan, pa je nejednakost $b^2 \geq 4ac$ ekvivalentna nejednakosti $b^3 \geq 4abc$. Najmanji mogući umnožak tri uzastopna prirodna broja je $abc = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, pa mora vrijediti $b^3 \geq 24$, odakle je $b \geq 3$. Zajedno s gornjim zaključkom, dobili smo da je nužno $b = 3$.

Konačno, pretpostavimo da a, b, c nisu brojevi 1, 2, 3 u nekom poretku. Tada je $abc \geq 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, pa bi moralo vrijediti $27 = b^3 \geq 4abc = 96$, što nije istina. Dakle, a i c su brojevi 1 i 2 u nekom poretku.

Dobili smo jednadžbe $x^2 + 3x + 2 = 0$ i $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Objema jednadžbama je diskriminanta $b^2 - 4ac = 1$ pozitivna, a provjerom vidimo da im je broj -1 jedno rješenje.

8. Neka su m i n cijeli brojevi takvi da je $x + y = m$ i $x^2 + y^2 = n$. Uvrštavanjem $y = m - x$ u drugu jednadžbu dobivamo da je x racionalno rješenje jednadžbe

$$2x^2 - 2mx + m^2 - n = 0.$$

S druge strane, znamo da su rješenja te jednadžbe

$$\frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 8(m^2 - n)}}{4} = \frac{m \pm \sqrt{2n - m^2}}{2}.$$

Stoga zaključujemo da je $\sqrt{2n - m^2}$ racionalan broj. Kako je $2n - m^2$ cijeli broj, zaključujemo da je i $\sqrt{2n - m^2}$ cijeli broj. Parnost broja $2n - m^2$ jednaka je parnosti broja m^2 , pa je i parnost broja $\sqrt{2n - m^2}$ jednaka parnosti broja m . Stoga su brojevi $m + \sqrt{2n - m^2}$ i $m - \sqrt{2n - m^2}$ parni, odnosno $\frac{m + \sqrt{2n - m^2}}{2}$ i $\frac{m - \sqrt{2n - m^2}}{2}$ su cijeli brojevi. Ovime zaključujemo da je x cijeli broj, pa je i y cijeli broj.

9. Označimo s x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $bx^2 + x + a = 0$. Iz Vièteovih formula slijedi da je

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{b} \quad \text{i} \quad x_1 x_2 = \frac{a}{b}.$$

Iz uvjeta zadatka znamo da su $x_1 + 1$ i $x_2 + 1$ rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + 1 = 0$, pa opet iz Vièteovih formula slijedi da je

$$-\frac{b}{a} = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + 2 = -\frac{1}{b} + 2$$

i

$$\frac{1}{a} = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$

Iz gornjih jednakosti sređivanjem dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2ab + b^2 - a &= 0, \\ a^2 - a + ab - b &= 0. \end{aligned}$$

Drugu jednadžbu možemo faktorizirati kao $(a + b)(a - 1) = 0$, iz čega slijedi $a = -b$ ili $a = 1$.

Ako je $a = -b$, uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo $-a^2 - a = -a(a + 1) = 0$, iz čega slijedi $a = 0$ ili $a = -1$. Slučaj $a = 0$ odbacujemo jer bi tada jedna od kvadratnih jednadžbi u tekstu zadatka imala vodeći koeficijent jednak nuli, pa preostaje samo $(a, b) = (-1, 1)$.

Ako je $a = 1$, uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo da je b rješenje kvadratne jednadžbe $b^2 + 2b - 1 = 0$. Slijedi $b = -1 \pm \sqrt{2}$, odnosno mogući parovi su $(a, b) = (1, -1 - \sqrt{2})$ i $(a, b) = (1, -1 + \sqrt{2})$.

Potrebno je provjeriti da kvadratne jednadžbe imaju realna rješenja. Da bi to bilo zadovoljeno, njihove diskriminante moraju biti nenegativne, tj. mora vrijediti $b^2 - 4a \geq 0$ i $1 - 4ab \geq 0$. Vidimo da to zadovoljavaju svi pronađeni parovi (a, b) osim $(a, b) = (1, -1 + \sqrt{2})$.

Konačno, parovi (a, b) koji zadovoljavaju uvjete zadatka su $(-1, 1)$ i $(1, -1 - \sqrt{2})$.

10. Iz Vièteovih formula slijedi da je $a + b = 10c$ i $c + d = 10a$. Zbrajanjem jednakosti $a + b = 10c$ i $c + d = 10a$ dobivamo da je

$$a + b + c + d = 10(a + c).$$

Budući da je a rješenje jednadžbe $x^2 - 10cx - 11d = 0$ i $d = 10a - c$ slijedi da je

$$0 = a^2 - 10ac - 11d = a^2 - 10ac - 11(10a - c) = a^2 - 110a + 11c - 10ac.$$

Analogno dobivamo

$$c^2 - 110c + 11a - 10ac = 0.$$

Oduzimanjem ove dvije jednadžbe slijedi

$$(a - c)(a + c - 121) = 0.$$

Dijeljenjem s $a - c \neq 0$ dobivamo $a + c = 121$. Dakle, $a + b + c + d = 1210$.

11. Promotrimo kvadratnu funkciju

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c.$$

Iz uvjeta čitamo

$$a + 2b + c > 0 \implies f(1) > 0, \quad \text{odnosno}$$

$$a - 2b + c < 0 \implies f(-1) < 0.$$

Budući da je $f(-1) < 0$, a $f(1) > 0$, zaključujemo da funkcija f mora imati nultočku između -1 i 1 . Kako se radi o kvadratnoj funkciji, zaključujemo da f ima dvije (različite) realne nultočke. Odavde slijedi da joj je diskriminanta pozitivna:

$$4b^2 - 4ac > 0 \implies b^2 > ac,$$

što je trebalo pokazati.

12. a) Branko može polinom $2x^2 - 1$ dobiti sljedećim nizom koraka:

$$x^2 - 2x - 1 \rightarrow -x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{d=-1} -x^2 + 2 \rightarrow 2x^2 - 1.$$

b) Primijetimo da primjenom bilo koje od dopuštenih transformacija diskriminanta kvadratnog polinoma ostaje nepromijenjena: diskriminanta kvadratnog polinoma $cx^2 + bx + a$ je

$$b^2 - 4ca = b^2 - 4ac,$$

dok je diskriminanta kvadratnog polinoma

$$a(x+d)^2 + b(x+d) + c = ax^2 + (2ad+b)x + (ad^2 + bd + c)$$

jednaka

$$(2ad+b)^2 - 4a(ad^2 + bd + c) = 4a^2d^2 + 4abd + b^2 - 4a^2d^2 - 4abd - 4ac = b^2 - 4ac.$$

Diskriminanta početnog kvadratnog polinoma $x^2 - 2x - 1$ je 8, dok je diskriminanta polinoma $2x^2 - x - 1$ jednaka 9. Prema tome, Branko ne može postići da nakon konačno mnogo koraka na ploči bude zapisan polinom $2x^2 - x - 1$.