



Funkcijske jednadžbe

Okvirna razina: JBMO / SŠ A var. državno

1. Funkcija

Definicija 1

Za neprazne skupove A i B *funkcija* je uređena trojka (A, B, f) , gdje je f pravilo pridruživanja takvo da za svaki $x \in A$ postoji jedinstveni $y \in B$ takav da je $y = f(x)$.

Skup A je domena, a B kodomena funkcije. Takvu funkciju simbolički zapisujemo $f: A \rightarrow B$. Skup svih vrijednosti koje funkcija poprima zovemo *slika funkcije*.

Važno je napomenuti za kodomena i slika funkcije nisu jedno te isto. Npr. za funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, kodomena je $\mathbb{R}$, a slika funkcije $\mathbb{R}_0^+$. Međutim, slika funkcije je uvijek podskup kodomene.

Definicija 2: Neki pojmovi i svojstva funkcija

- **PARNOST-NEPARNOST:** Funkcija je parna ako za sve brojeve x iz domene vrijedi

$$f(-x) = f(x),$$

a neparna ako za sve x iz domene vrijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

- **MONOTONOST:** Funkcija je rastuća ako za sve x, y vrijedi

$$x > y \implies f(x) \geq f(y),$$

a padajuća ako za sve x, y vrijedi

$$x > y \implies f(x) \leq f(y).$$

Funkcija je monotona ako je rastuća ili padajuća, a monotonost je stroga ako za sve x, y vrijede stroge nejednakosti ($f(x) > f(y)$ ili $f(x) < f(y)$).

- **OGRANIČENOST:** Funkcija je ograničena odozgo ako postoji neki M takav da je $f(x) \leq M$ za sve x , a ograničena odozdo ako postoji neki M takav da je $f(x) \geq M$ za sve x . Često ćemo i samo reći da je funkcija ograničena ako je jasno na što se misli.

- **PERIODIČNOST:** Funkcija je periodična ako postoji neki broj a takav da je $f(x+a) = f(x)$ za sve x .
- **NEPREKIDNOST:** Funkcija je neprekidna ako graf te funkcije možemo nacrtati u koordinatnom sustavu bez dizanja olovke. Ovo je neformalna definicija, formalna koristi limese (pojam iz matematičke analize) i glasi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c), \quad \forall c \text{ iz domene.}$$

- **INJEKTIVNOST:** Funkcija je injekcija ako nikoje dvije vrijednosti funkcije nisu iste, odnosno

$$f(a) = f(b) \implies a = b.$$

- **SURJEKTIVNOST:** Funkcija je surjekcija ako za svaki element y iz kodomene postoji x iz domene takav da je $y = f(x)$. Za takve funkcije je slika funkcije jednaka kodomeni.
- **BIJEKTIVNOST:** Funkcija je bijekcija ako je surjekcija i injekcija, odnosno za svaki y iz kodomene postoji jedinstveni x iz kodomene takav da je $y = f(x)$.
- **KOMPOZICIJA FUNKCIJA:** Funkcija h je kompozicija funkcija f i g ako je

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow C, \quad h: A \rightarrow C \text{ i}$$

$$h(x) = g(f(x)). \quad \forall x \in A.$$

- **INVERZNA FUNKCIJA:** Ako za funkciju $f: A \rightarrow B$ postoji funkcija $g: B \rightarrow A$ takva da je

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in A \text{ i } f(g(y)) = y, \quad \forall y \in B,$$

tada je g inverzna funkcija funkcije f . U tom slučaju se funkcija g često označava s f^{-1} .

- **INVOLUCIJA:** Funkcija $f: A \rightarrow A$ je involucija ako je $f(f(x)) = x$ za sve $x \in A$.

Propozicija 3

Funkcija $f: A \rightarrow A$ ima inverz ako i samo ako je bijekcija.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da postoji inverz $g = f^{-1}$. Funkcija f je injekcija jer vrijedi

$$f(x) = f(y) \implies x = g(f(x)) = g(f(y)) = y \implies x = y.$$

Također, funkcija je surjekcija jer je svaki $x \in A$ vrijedi $f(g(x)) = x$. Zaključujemo da je f bijekcija. Neka je sada f bijekcija. Tada za svaki $x \in A$ postoji jedinstveni $y \in A$ takav da je $y = f(x)$ pa možemo definirati funkciju

$$g: A \rightarrow A, \quad g(y) = x.$$

Sada vrijedi

$$g(f(x)) = g(y) = x, \quad f(g(y)) = f(x) = y$$

pa za svaki $z \in A$ dobivamo $g(f(z)) = f(g(z)) = z$ što znači da je $g = f^{-1}$. □

2. Funkcijske jednadžbe

Rješavanje funkcijskih jednadžbi je nalaženje svih funkcija koje zadovoljavaju zadane uvjete i dokazivanje da jedino te funkcije zadovoljavaju te uvjete.

Neke od metoda kojima se služimo u rješavanju su:

- pogađanje rješenja, ovo je vrlo bitno jer ako slutimo koje su funkcije rješenje, to nam može pomoći u rješavanju.
- uvrštavanje konkretnih vrijednosti u jednadžbu, vrijednosti koje uvijek treba uvrstiti (ako je moguće) su 0, 1, -1 jer su 0 i 1 neutralni elementi za zbrajanje i množenje, a s -1 često možemo pokratiti jednadžbu. Općenito, uvrštavanje vrijednosti koje omogućuju pokraćivanje članova je vrlo korisno.
- supstitucije i definiranje novih funkcija preko postojećih.
- dokazivanje monotonosti, surjektivnosti i injektivnosti, parnosti i neparnosti. Vrijedi probati i dokazati ta svojstva u nekoj točki ako ne ide generalno.
- traženje nultočaka i fiksnih točaka (fiksna točka je x takav da je $f(x) = x$).
- indukcija je često korisna za traženje vrijednosti u cjelobrojnim i racionalnim točkama.

Oprez

Na kraju sva rješenja obavezno treba provjeriti jer smo rješavanjem jednadžbe dobili sljedeću implikaciju: ako je f rješenje jednadžbe, onda je f jedna od sljedećih funkcija: ..., pa moramo provjeriti rješenja za drugi smjer implikacije.

Primjer 1

Nađi sve funkcije $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ za koje je

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Rješenje. Uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo

$$f(x) = f(x) + f(0) \implies f(0) = 0.$$

Uvrštavanjem $y = -x$ dobivamo

$$f(0) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x).$$

Neka je $f(1) = c$. Uvrštavanjem $y = x$ dobivamo

$$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Sada uvrštavanjem $y = 2x$ dobivamo

$$f(3x) = f(x) + f(2x) = 3f(x).$$

Induktivno nastavljajući ovaj postupak zaključujemo da je $f(nx) = nf(x)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato vrijedi i

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x), \forall n, m \in \mathbb{N},$$

odnosno $f(qx) = qf(x)$ za sve $q \in \mathbb{Q}^+$. Zaključujemo da je $f(q) = qf(1) = qc$ za sve $q \in \mathbb{Q}^+$. Zbog neparnosti funkcije mora biti i $f(x) = cx$ za sve $q \in \mathbb{Q}$.

Sve ovakve funkcije su rješenje jednadžbe jer je $c(x+y) = cx + cy$. □

Ova jednadžba se zove **Cauchyjeva funkcijska jednadžba**. Ako je domena funkcije $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ ili neki drugi sličan prebrojivi skup, tada smo upravo vidjeli da su jedina rješenja jednadžbe linearne funkcije $f(x) = cx$. Ako je domena $\mathbb{R}$, tada postoje i druga "divlja" rješenja koja ne možemo elementarno opisati. Za njih vrijede neka neočekivana i patološka svojstva, npr. njihov graf je gust u ravnini $\mathbb{R}^2$.

Međutim, linearne funkcije su jedina rješenja ako f zadovoljava neki od sljedećih uvjeta:

- monotonost na nekom intervalu
- ograničenost na nekom intervalu
- neprekidnost
- $f(x) \geq 0$ za $x \geq 0$ - primijetimo da iz ovog uvjeta slijedi monotonost jer je $f(x+y) = f(x) + f(y) \geq f(y)$
- $f(x^2) = xf(x)$
- $f(x^2) = f(x)^2$ - iz ovoga slijedi da je $f(x) \geq 0$ za $x \geq 0$
- $f(xy) = f(x)f(y)$ - iz ovoga slijedi da je $f(x^2) = f(x)^2$

To ćemo sada i pokazati za neke od ovih uvjeta.

Primjer 2

Pretpostavimo da je f monotona na nekom intervalu I . Neka je bez smanjenja općenitosti rastuća, drugi slučaj se riješi analogno.

Ako je $f(x) > cx$ za neki $x \in I$, tada postoji racionalan broj $q \in \left\langle x, \frac{f(x)}{c} \right\rangle$ pa je

$$f(q) \geq f(x), \quad f(x) > cq$$

što je kontradikcija jer je $f(q) = cq$. Analogno dokazujemo da nije moguće $f(x) < cx$. Stoga je $f(x) = cx$ za sve $x \in I$.

Neka je sada $y \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $y - q \in I$ pa je

$$f(y) = f(y - q) + f(q) = c(y - q) + cq = cy.$$

Primjer 3

Pretpostavimo da je f ograničena na nekom intervalu I . Neka je bez smanjenja općenitosti $f(x) \geq M$ za sve $x \in I$, drugi slučaj se riješi analogno.

Definirajmo funkciju $g(x) = f(x) - cx$. Tada je $g(q) = 0$ i $g(x + q) = g(x) + g(q)$ za sve $q \in \mathbb{Q}$. Također je i g ograničena odozdo na I s nekom donjom međom M' (ako je potrebno, možemo smanjiti I na neki segment $[a, b]$). Štoviše, neka je $y \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $y - q \in I$ pa je

$$g(y) = g(y - q) + g(q) = g(y - q) \geq M'$$

pa je g ograničena odozdo na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Primijetimo da je g također neparna jer je

$$g(-x) = f(-x) + cx = -f(x) + cx = -g(x).$$

Ako $g \neq 0$, tada zbog neparnosti funkcije g postoji x takav da je $g(x) < 0$ pa za svaki $q \in \mathbb{Q}$

$$g(qx) = f(qx) - cqx = qf(x) - cqx = qg(x).$$

Ako je q dovoljno velik, dobivamo kontradikciju s omeđenošću funkcije g .

Dakle, mora biti $g = 0$, odnosno $f(x) = cx$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Primjer 4

Pretpostavimo da vrijedi $f(x + y) = f(x) + f(y)$ i $f(x^2) = xf(x)$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}(x + y)f(x + y) &= f((x + y)^2) = f(x^2) + 2f(xy) + f(y^2) \\ \implies (x + y)f(x) + (x + y)f(y) &= xf(x) + 2f(xy) + yf(y) \\ \implies f(xy) &= \frac{x}{2}f(y) + \frac{y}{2}f(x).\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}f(xyz) &= \frac{xy}{2}f(z) + \frac{z}{2}f(xy) = \frac{xy}{2}f(z) + \frac{xz}{4}f(y) + \frac{yz}{4}f(x) \\ &= \frac{xz}{2}f(y) + \frac{y}{2}f(xz) = \frac{xz}{2}f(y) + \frac{xy}{4}f(z) + \frac{yz}{4}f(x).\end{aligned}$$

Iz ove dvije jednakosti vidimo da vrijedi

$$\frac{xy}{4}f(z) = \frac{xz}{4}f(y) \implies yf(z) = zf(y).$$

Uvrštavanjem $z = 1$ dobivamo $f(y) = yf(1) = cy$ za sve $y \in \mathbb{R}$.

Oprez

Uvjet $f(f(x)) = x$ nije dovoljan da se u Cauchyjevoj jednadžbi riješimo patoloških rješenja. Stoga

također nije dovoljan niti uvjet bijektivnosti.

Napomena 4

Sljedeće funkcijske jednačbe su vrlo slične i mogu se svesti na Cauchyjevu jednačbu.

- $f(x + y) = f(x)f(y)$ - eksponencijalna Cauchyjeva jednačba, uz supstituciju $f(x) = e^{g(x)}$ dobivamo $g(x + y) = g(x) + g(y)$.
- $f(xy) = f(x) + f(y)$ - logaritamska Cauchyjeva jednačba, uz supstituciju $f(x) = h(\ln x)$ dobivamo $h(x + y) = h(x) + h(y)$.
- $f(xy) = f(x)f(y)$ - multiplikativna Cauchyjeva jednačba, supstitucijom se može svesti na eksponencijalnu ili logaritamsku Cauchyjevu jednačbu.

Detalje i uvjete pod kojima se supstitucija može napraviti ostavljamo čitatelju. Cauchyjeva jednačba (i njezine varijate) je poznata i može se koristiti pri rješavanju zadataka.

2.1. Riješeni primjeri

Sada ćemo pokazati nekoliko primjera funkcijskih jednačbi i načina njihovog rješavanja. U rješenjima ćemo redovito koristiti oznaku $P(x, y)$ (odnosno $P(x, y, z)$) za tvrdnju da zadana jednakost vrijedi kad se u nju uvrste te vrijednosti varijabli; to nam skraćuje i čini preglednijim zapis rješenja.

Primjer 5

Nađi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z).$$

Rješenje. Označimo s $P(x, y, z)$ zadanu jednakost. Glavna svrha toga je skraćivanje i konciznost pisanja rješenja, kao što ćemo upravo vidjeti.

$$P(x, 0, 0) : f(0) = xf(x)$$

Sada početna jednakost postaje $f(xyz) = 3f(0)$.

$$P(0, 1, 1) : f(0) = 3f(0) \implies f(0) = 0$$

$$P(x, 1, 1) : f(x) = 3f(0) = 0.$$

Dakle, jedino moguće rješenje je $f = 0$. Lako se provjeri da je to stvarno rješenje jednačbe. $\square$

Primjer 6: Hrvatska matematička olimpijada 2010.

Postoji li funkcija $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ za koju za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(f(n)) = f(n + 1) - f(n)?$$

Rješenje. Domena i kodomena su $\mathbb{N}$ pa vrijedi

$$f(n+1) - f(n) = f(f(n)) \geq 1 \implies f \text{ je strogo rastuća.}$$

Kako je $f(1) \geq 1$, iz nejednakosti $f(n+1) \geq f(n) + 1$ se lako indukcijom dobije $f(n) \geq n$ za sve n . Primijetimo da onda zbog monotonosti vrijedi i

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n) < f(n+1) \implies f(n) < n+1.$$

Dakle, $n \leq f(n) < n+1$ pa mora biti $f(n) = n$.

Međutim, identiteta nije rješenje jednadžbe jer je $n \neq (n+1) - n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ovo je dobar primjer tvrdnje da dobivena rješenja uvijek treba provjeriti. $\square$

Primjer 7

Odredi sve surjekcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) \geq n + (-1)^n$.

Rješenje. Primijetimo prvo da je $f(n) \geq n-1$. Zbog surjektivnosti postoji a takav da je $f(a) = 1$. Mora biti $a = 1$ jer je $f(2) \geq 3$ i $f(n) \geq n-1 \geq 2$ za $n \geq 3$. Dakle, $f(1) = 1$.

Nadalje, postoji a takav da je $f(a) = 2$. Mora biti $a \leq 3$ jer je $f(n) \geq n-1 \geq 3$ za $n \geq 4$, a također je $f(2) \geq 3$. Zato je $f(3) = 2$.

Postoji i a takav da je $f(a) = 3$. Mora biti $a \leq 4$ jer je $f(n) \geq n-1 \geq 3$ za $n \geq 5$, a također je $f(3) = 2$ i $f(4) \geq 5$. Zato je $f(2) = 3$.

Ovaj proces možemo nastaviti induktivno i dokazati da mora biti $f(2k+1) = 2k$, $f(2k) = 2k+1$ za svaki k . Baza $k=1$ vrijedi, pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $k \leq n-1$. Neka je a takav da je $f(a) = 2n$. Mora biti $a \geq 2n$ po pretpostavci indukcije i $a \leq 2n+1$ jer je $f(a) \geq a-1$. Kako je $f(2n) \geq 2n+1$, zaključujemo da je $f(2n+1) = 2n$.

Neka je a sada takav da je $f(a) = 2n+1$. Mora biti $a \geq 2n$ po pretpostavci indukcije i $a \leq 2n+2$ jer je $f(a) \geq a-1$. Kako je $f(2n+1) = 2n$ i $f(2n+2) \geq 2n+3$, zaključujemo da je $f(2n) = 2n+1$.

Ovo rješenje zadovoljava uvjete zadatka jer je

$$f(2k+1) = 2k = (2k+1) + (-1)^{2k+1}, \quad f(2k) = 2k+1 = 2k + (-1)^{2k}. \quad \square$$

Oprez

Česta greška u zaključivanju je tzv. **pointwise trap**. Npr. ako prilikom rješavanja dobijemo da mora vrijediti jednakost

$$f(x)^2 = xf(x),$$

to ne znači da su jedina moguća rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ i $f(x) = x$, nego da ta jednakost vrijedi samo po točkama. Drugim riječima, treba provjeriti je li moguć slučaj da je $f(x) = 0$ i $f(y) = y$ za neke x, y .

Zadaci za samostalnu vježbu

1. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy.$$

2. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

3. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

4. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

5. Nađi sve funkcije $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ t.d. je $f(0) = 0$ i za sve $x, y \in [0, 1]$ vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

6. Nađi sve strogo rastuće funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(f(x)) = x$.

7. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y)).$$

8. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2.$$

9. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ t.d. je $f(1) = 2$ i za sve $x, y \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1.$$

10. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(f(x) - f(y)) = (x - y)^2 f(x + y).$$

11. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x + y) + 2f(x - y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y.$$

12. Nađi sve injektivne funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x + y + f(x + y^2)) = f(2x - y) + 3y.$$

13. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x + f(x) = f(f(x))$. Odredi sve x za koje je $f(f(x)) = 0$.

14. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x + 3y) = 5f(x)f(y).$$

15. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2.$$

16. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

17. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x^2 + xy + f(y^2)) = xf(y) + y^2 + f(x^2).$$

18. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xf(x) + f(xy)) = f(x^2) + yf(x).$$

19. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xy + 1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2.$$

20. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x)^2 + y^2 f(y) = x^4 + y^4.$$

21. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

22. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4).$$

23. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(\max(x, y) + \min(f(x), f(y))) = x + y.$$

24. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.d. za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y)).$$

Upute za zadatke za samostalnu vježbu

1. Svođenje na Cauchyjevu jednadžbu.
2. Uvrsti $y = 0$ i $y = x$.
3. Uvrsti $x = y$.
4. Uvrsti $\frac{1}{x}$.
5. Nađi $f(1)$.
6. Pretpostavi da je $f(x) > x$ ili $f(x) < x$ za neki x .
7. Uvrsti $x = y$.
8. Uvrsti $x = 0$.
9. Odredi $f(z)$ za cijele brojeve z .
10. Dokaži djelomičnu surjektivnost.
11. Uvrsti $y = 0$.
12. Uvrsti $y = 0$.
13. f je injektivna.
14. Desna strana je simetrična po x i y .
15. Uvrsti $x = -f(y)$.
16. Dokaži bijektivnost.
17. Pokušaj uvrstiti dobre vrijednosti da se neki izrazi pokrate.
18. Odredi $f(0)$ i $f(1)$.
19. Lijeva strana je simetrična po x i y .
20. Uvrsti $y = 0$.
21. Dokaži injektivnost.
22. Uvrsti dobru vrijednost y da se neki izrazi pokrate.
23. Uvrsti $x = y$, dokaži monotonost i promotri $f(0)$.
24. Uvrsti 0 i 1.

Rješenja zadataka za samostalnu vježbu

1. Neka je $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Tada je $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pa je $g(x) = cx$ za neki $c \in \mathbb{Q}$. Zato je $f(x) = cx + \frac{x^2}{2}$ i sve te funkcije su rješenje jer je

$$c(x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} = cx + \frac{x^2}{2} + cy + \frac{y^2}{2} + xy.$$

2.

$$P(x, 0) : xf(0) = xf(x)f(0)$$

Ako je $f(0) \neq 0$, tada mora vrijediti $f(x) = 1$ za sve $x \neq 0$. Sve takve funkcije su rješenje jer je $0f(0) + 0f(0) = 0f(0)^2 = 0$, $xf(0) = xf(x)f(0)$ za $x \neq 0$ i

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y) = x+y \text{ za } x, y \neq 0.$$

Pretpostavimo sada da je $f(0) = 0$.

$$P(x, x) : 2xf(x) = 2xf(x)^2$$

pa je $f(x) \in \{0, 1\}$ za sve x . Ako je $f(a) = 0$ za neki $a \neq 0$, tada je

$$af(x) = xf(a) + af(x) = (a+x)f(x)f(a) = 0 \implies af(x) = 0 \implies f(x) = 0$$

pa je $f = 0$ što je očito rješenje. Inače mora biti $f(x) = 1$ za sve $x \neq 0$, a to rješenje smo već provjerili.

Dakle, sva rješenja su $f = 0$ i funkcije oblika $f(x) = 1$ za $x \neq 0$ i $f(0) = c$, gdje je c bilo koja konstanta.

3.

$$P(x, x) : f(x)^2 = f(0) \implies f(0)^2 = f(0) \implies f(0) \in \{0, 1\}$$

Ako je $f(0) = 0$, tada je $f(x) = 0$ za sve x što je očito rješenje. Ako je $f(0) = 1$, tada je $f(x) = \pm 1$ za sve x (ali samo po točkama).

$$P(2x, x) : f(2x)f(x) = f(x) \implies f(2x) = 1$$

Zato je $f = 1$ u ovom slučaju i lako se provjeri da je to također rješenje.

4. Ako umjesto x u jednadžbu uvrstimo $\frac{1}{x}$, dobivamo

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x}$$

pa imamo sustav 2 jednadžbe s 2 nepoznanice $f(x), f(\frac{1}{x})$. Njegovim rješavanjem se dobije da je $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3x}$, $f(\frac{1}{x}) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x$ pa je jedino moguće rješenje $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3x}$ i prethodni račun daje potvrdu da je to stvarno rješenje zadatka.

5.

$$P(1, 0) : |f(1)| \geq 1 \implies f(1) = 1$$

Sada ćemo uvrstiti $y = 0$ i $y = 1$.

$$P(x, 0) : |f(x)| \geq |x| \implies f(x) \geq x$$

$$P(x, 1) : |f(x) - 1| \geq |x - 1| \implies 1 - f(x) \geq 1 - x$$

Iz ove dvije nejednakosti dobivamo da mora biti $f(x) = x$ i lako se provjeri da je to stvarno rješenje.

6. Ako je $f(x) > x$ za neki x , tada zbog monotonosti slijedi $f(f(x)) > f(x) > x$, kontradikcija. Analogno se dokaže da ne može biti ni $f(x) < x$ pa je jedino rješenje $f(x) = x$. Lako se provjeri da je to rješenje zadatka.

7.

$$P(x, x) : f(x) \geq 2x^2 - f(x) \implies f(x) \geq x^2$$

S druge strane, postoji neki a takav da je

$$f(x) = 2xa - f(a) \implies x^2 + a^2 \leq f(x) + f(a) = 2xa \implies (a - x)^2 \leq 0.$$

Stoga je $a = x$ i $f(x) = x^2$. To je rješenje zadatka jer je

$$x^2 \geq 2xy - y^2 \iff (x - y)^2 \geq 0.$$

8.

$$P(0, x) : f(f(x)) = x$$

Zato jednadžba postaje

$$f(x^2 + y) = f(y) - x^2$$

pa uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo $f(x^2) - f(0) - x^2$, odnosno $f(x) = f(0) - x$ za sve $x \geq 0$. Ako sada uvrstimo $y < 0$ i $x > 0$ dovoljno velik, dobivamo

$$f(0) - x^2 - y = f(x^2 + y) = f(y) - x^2 \implies f(y) = f(0) - y.$$

Stoga je jedino rješenje $f(x) = c - x$ za neku konstantu c i lako se provjeri da je to stvarno rješenje.

9.

$$P(x, 1) : f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1 \implies f(x+1) = f(x) + 1$$

Iz ovoga induktivno slijedi $f(z) = z + 1$ za sve $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{p}{q}, q\right) : f(p) &= f\left(\frac{p}{q}\right) f(q) - f\left(\frac{p}{q} + q\right) + 1 \implies p + 1 = f\left(\frac{p}{q}\right) (q + 1) - f\left(\frac{p}{q}\right) - q + 1 \\ &\implies f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + 1. \end{aligned}$$

Dakle, jedino rješenje je $f(x) = x + 1$ i lako se vidi da je to stvarno rješenje.

10.

$$P(x, x) : f(0) = 0$$

Funkcija $f = 0$ je očito rješenje. Pretpostavimo da je $f(a) \neq 0$ za neki a .

$$P\left(\frac{a+k}{2}, \frac{a-k}{2}\right) : f\left(f\left(\frac{a+k}{2}\right) - f\left(\frac{a-k}{2}\right)\right) = k^2 f(a)$$

Broj $k^2 f(a)$ postiže sve nenegativne vrijednosti pa ih postiže i funkcija f .

$$P(y, x) : f(f(x) - f(y)) = f(f(y) - f(x))$$

Iz ove jednakosti i djelomične surjektivnosti dobivamo $f(z) = f(-z)$ za sve z , tj. f je parna.

$$P(x, -y) : f(f(x) - f(y)) = (x+y)^2 f(x-y) = (x-y)^2 f(x+y) \implies \frac{f(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{f(x-y)}{(x-y)^2}.$$

Dakle, izraz $\frac{f(x)}{x^2}$ je konstantan pa je jedino moguće rješenje $f(x) = cx^2$. Kad to uvrstimo u jednadžbu, dobivamo

$$c^3(x^2 - y^2)^2 = c(x-y)^2(x+y)^2 \implies c = 1.$$

Stoga je jedino rješenje $f(x) = x^2$.

11.

$$P(x, 0) : 4f(x) + 2f(0) = 4x \implies 6f(0) = 0 \implies f(0) = 0, f(x) = x$$

Lako se provjeri da je $f(x) = x$ rješenje jednadžbe.

12.

$$P(x, 0) : f(x + f(x)) = f(2x) \implies x + f(x) = 2x \implies f(x) = x$$

Međutim, to nije rješenje jer $x + y + x + y^2 \neq 2x - y + 3y$. Stoga ovaj zadatak nema rješenja.

13. Ako je $f(x) = f(y)$, tada je

$$x + f(x) = f(f(x)) = f(f(y)) = f(y) + y \implies x = y.$$

Dakle, funkcija je injekcija. Sada za $x = 0$ vrijedi

$$0 + f(0) = f(f(0)) \implies f(0) = f(f(0)) \implies f(0) = 0 \implies f(f(0)) = 0$$

Ako je $f(f(x)) = 0$ za neki x , tada zbog injektivnosti mora vrijediti

$$f(f(x)) = f(f(0)) \implies f(x) = f(0) \implies x = 0.$$

Stoga je jedino rješenje $x = 0$.

14.

$$P(y, x) : f(3x + y) = 5f(x)f(y) = f(x + 3y)$$

Za sve a, b postoje x, y takvi da je $3x + y = a$, $x + 3y = b$, stoga je f konstantna funkcija. Provjerom se vidi da su jedina rješenja $f = 0$ i $f = \frac{1}{5}$.

15.

$$P(-f(x), x) : f(0) = f(f(x)) - 2f(x)^2 + f(x)^2 \implies f(x)^2 = f(f(x)) - f(0)$$

Jednadžba sada postaje $f(x + f(y)) = (x + f(y))^2 + f(0)$.

$$P(x - f(0), 0) : f(x) = x^2 + f(0)$$

Sve funkcije $f(x) = x^2 + c$ su rješenje jer je

$$(x + y^2 + c)^2 + c = (y^2 + c)^2 + c + 2x(y^2 + c) + x^2.$$

16. Ako je $f(a) = f(b)$, tada uvrštavanjem $y = a$ i $y = b$ dobivamo $a = b$. Dakle, f je injekcija. Surjektivnost dobivamo uvrštavanjem $x = 0$. Stoga je f bijekcija. Neka je a takav da je $f(a) = 0$.

$$P(a, x) : f(f(y)) = y$$

$$P(f(x), f(y)) : f(x^2 + y) = xf(x) + f(y) \implies f(x^2) = xf(x) + f(0)$$

Iz ovoga dobivamo da je $f(-x) = -f(x)$ za $x \neq 0$, a uvrštavanjem $x = 1$ i da je $f(1) = f(1) + f(0)$, odnosno $f(0) = 0$.

Dakle, $f(x^2) = xf(x)$ pa jednadžba postaje $f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y) - f(0)$, što je jednadžba ekvivalentna Cauchyjevoj zbog neparnosti. Sva rješenja Cauchyve jednadžbe uz uvjet $f(x^2) = xf(x)$ su linearne funkcije $f(x) = cx$. Provjerom se utvrdi da su jedine moguće konstante $c = \pm 1$.

17.

$$P(x, 0) : f(x^2 + f(0)) = xf(0) + f(x^2)$$

$$P(-x, 0) : f(x^2 + f(0)) = -xf(0) + f(x^2) \implies f(0) = 0$$

$$P(0, x) : f(f(x^2)) = x^2$$

$$P(-x, x) : f(f(x^2)) = -xf(x) + x^2 + f(x^2) \implies f(x^2) = xf(x)$$

$$P\left(\frac{-f(x^2)}{x}, x\right) : f\left(\frac{-f(x^2)}{x}\right) = \frac{-f(x^2)f(x)}{x} + x^2 + f\left(\frac{-f(x^2)}{x}\right) \implies f(x^2)f(x) = x^3$$

Zato je $xf(x)^2 = x^3$ pa je $f(x) = \pm x$ za svaku točku x . Pretpostavimo da postoje $a, b \neq 0$ takvi da je $f(a) = a$ i $f(b) = -b$. Tada je i $f(a^2) = a^2$, $f(b^2) = -b^2$.

$$P(a, b) : f(a^2 + ab - b^2) = -ab + b^2 + a^2 \implies a^2 - ab + b^2 = \pm(a^2 + ab - b^2)$$

Ako je $a^2 - ab + b^2 = a^2 + ab - b^2$, tada vrijedi $ab = b^2 \implies a = b$ što nije moguće. Ako je $a^2 - ab + b^2 = -(a^2 + ab - b^2)$, tada vrijedi $a^2 = 0 \implies a = 0$ što također nije moguće.

Dakle, jedina rješenja su $f(x) = x$ i $f(x) = -x$ i lako se provjeri da su to stvarno rješenja.

18.

$$P(0, x) : f(f(0)) = f(0) + xf(0)$$

Ako je $f(0) \neq 0$, tada je lijeva strana konstantna, a desna ne, što nije moguće. Dakle, mora biti $f(0) = 0$. Neka je $f(1) = c$.

$$P(1, x) : f(c + f(x)) = c + cx$$

Ako je $c = 0$, tada je $f(f(x)) = 0$ za sve x . Primijenimo li f na danu jednadžbu, dobivamo

$$f(f(x^2) + yf(x)) = f(f(xf(x) + f(xy))) = 0.$$

Funkcija $f = 0$ je očito rješenje. Ako postoji t takav da je $f(t) \neq 0$, tada je $f(f(t^2) + yf(t)) = 0$. Izraz $f(t^2) + yf(t)$ poprima sve moguće realne vrijednosti pa mora biti $f = 0$.

Ako je $c \neq 0$, tada je f injekcija.

$$P(x, 0) : f(xf(x)) = f(x^2) \implies xf(x) = x^2 \implies f(x) = x \text{ za } x \neq 0.$$

Lako vidimo da je $f(x) = x$ također rješenje jednadžbe pa su sva rješenja $f = 0$ i $f(x) = x$.

19. Zamjenom varijabli x, y i usporedbom s početnom jednakosti dobivamo

$$f(y) + x = x + f(y) \implies f(x) = c + x \text{ za neku konstantu } c.$$

Provjerom dobivamo

$$xy + 1 + c = (x + c)(y + c) - y - c - x + 2 \implies c = 1$$

pa je jedino rješenje $f(x) = x + 1$.

20.

$$P(x, 0) : f(x)^2 = x^4 \implies f(x) = \pm x^2 \text{ po točkama}$$

U svakom slučaju je $f(x)^2 = x^4$ pa vrijedi $y^2 f(y) = y^4 \implies f(y) = y^2$ za sve $y \neq 0$. Također, zbog $f(x) = \pm x^2$ mora biti i $f(0) = 0$. Stoga je jedino moguće rješenje $f(x) = x^2$ i lako se provjeri da je to stvarno rješenje.

21. Ako je $f(a) = f(b)$, tada uvrštavanjem $y = a$ i $y = b$ dobivamo $af(x) = bf(x)$. Funkcija $f = 0$ je očito rješenje, a inače je f injekcija.

$$P(0, 1) : f(0) + f(f(0) + f(1)) = f(0) + f(f(1)) \implies f(f(0) + f(1)) = f(f(1))$$

Zbog injektivnosti mora vrijediti $f(0) + f(1) = f(1) \implies f(0) = 0$.

$$P(x, 0) : f(f(x)) = f(x) \implies f(x) = x$$

Lako se provjeri da su $f = 0$ i $f(x) = x$ rješenja.

22.

$$P(x, x^2 - x^{27}) : f(x^4) = 0 \implies f(x) = 0 \text{ za sve } x \geq 0$$

$$P(x, 0) : 0 = f(x^2) = f(x^{27}) \implies f(x^{27}) = 0 \implies f = 0$$

Trivijalno se vidi da je $f = 0$ rješenje.

23.

$$P(x, x) : f(x + f(x)) = 2x \implies f(f(0)) = 0$$

Pretpostavimo da za neke brojeve $x < y$ vrijedi $f(x) \geq f(y)$. Tada je

$$f(y + f(y)) = x + y = 2y,$$

kontradikcija. Zato je f strogo rastuća pa se iz $f(f(0))$ lako dobije $f(0) = 0$.

$$P(x, 0) \text{ za } x > 0 : f(x + f(0)) = f(x) = x$$

$$P(x, 0) \text{ za } x < 0 : f(0 + f(x)) = f(f(x)) = x$$

Iz $f(f(x)) = x$ se dobije $f(x) = x$ kao u 6. zadatku. Dakle, jedina funkcije je $f(x) = x$ i lako se provjeri da je to rješenje.

24.

$$P(1, 1) : f(f(1)) = 0$$

$$P(0, 1) : f(0) = 2f(0) + f(f(1)) = 2f(0) \implies f(0) = 0$$

$$P(x, 0) : 0 = |x|f(0) = f(x^2) \implies f(x) = 0 \text{ za } x \geq 0$$

$$P(0, x) : 0 = f(f(y))$$

$$P(x, -1) \text{ za } x < 0 : -xf(-1) - f(x) = 0 \implies f(x) = -cx \text{ za neki } c$$

Dakle, f je oblika

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0, \\ -cx & x \leq 0. \end{cases}$$

Provjerimo da su takve funkcije zaista rješenje. Prvo, vrijedi da je $f(x) \geq 0$ za sve x pa je $f(f(x)) = 0$. Sada imamo 4 slučaja.

- $x, y \geq 0 : 0 + 0 = |x|f(y) + yf(x) = f(xy) = 0.$
- $x \geq 0, y \leq 0 : xf(y) = f(xy) = -cxy.$
- $x \leq 0, y \geq 0 : yf(x) = f(xy) = -cxy.$
- $x, y \leq 0 : -xf(y) + yf(x) = cxy - cxy = 0 = f(xy).$