



Djeljivost: ostaci

Okvirna razina: 7. i 8. r. OŠ državno / SŠ A var. školsko

1. Uvodno o djeljivosti

U području teorije brojeva, djeljivost je temeljni pojam. U osnovnoj i srednjoj školi na svim razinama pojavljuju se zadaci gdje je potrebno promatrati ostatke pri nekom dijeljenju, i izvlačiti zaključke iz toga. Podsjetimo se nekih osnovnih tvrdnji.

Definicija 1

Za cijele brojeve a i b kažemo da a dijeli b ako postoji cijeli broj k takav da je $b = a \cdot k$. Kažemo još i da je a *djelitelj* od b , odnosno da je b *višekratnik* od a i pišemo $a \mid b$.

Primijetimo da ovakva definicija odmah povlači da svaki cijeli broj dijeli broj 0, jer uvijek možemo uzeti $k = 0$. Navedimo neke poznate tvrdnje o djeljivosti prirodnih brojeva na temelju njihovog dekadskog zapisa (znamenaka).

Teorem 2

- a) Cijeli broj djeljiv je s 2 ako i samo ako mu je znamenka jedinica djeljiva s 2.
- b) Cijeli broj djeljiv je s 5 ako i samo ako mu je znamenka jedinica djeljiva s 5.
- c) Cijeli broj djeljiv je s 3 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.
- d) Cijeli broj djeljiv je s 9 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Ove tvrdnje mnogima su dobro poznate s redovne nastave, ali dokazat ćemo ih na općenit način koji se rijetko vidi na nastavi.

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnje za prirodne brojeve. Za negativne cijele brojeve dokaz je jednak, samo uzmemo apsolutnu vrijednost tog broja.

- a) Neka je a proizvoljni cijeli broj. Možemo ga prikazati kao $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$, gdje su $a_1, a_2, \dots, a_k$ njegovih k znamenki. To znači da vrijedi

$$a = a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \dots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k.$$

Kako je prvih $k - 1$ pribrojnika djeljivo s 10, pa onda i s 2, to znači da je a djeljiv s 2 ako i samo ako je znamenka a_k djeljiva s 2.

b) Analogno kao a).

c) Neka je $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ proizvoljni cijeli broj. Imamo

$$\begin{aligned} a &= a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \dots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k \\ &= (10^{k-1} - 1)a_1 + (10^{k-2} - 1)a_2 + \dots + (10 - 1)a_{k-1} + a_k + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}. \end{aligned}$$

Uočimo da su brojevi oblika $10^m - 1$ (za $m = 1, \dots, k - 1$) zapravo m -znamenkasti brojevi kojima su sve znamenke jednake 9, pa su svakako djeljivi s 3. Prema tome, broj a djeljiv je s 3 ako i samo ako je zbroj $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k$ djeljiv s 3.

d) Analogno kao c). □

Napomena

1. Iz prethodnog dokaza možemo uočiti da zapravo vrijedi i šira tvrdnja: broj a daje isti ostatak pri dijeljenju s 3 (ili 9) kao i zbroj njegovih znamenki!
2. Kao što za djeljivost s 2 gledamo zadnju znamenku, potpuno jednako može se zaključiti i da je broj djeljiv s 4 ako su mu zadnje dvije znamenke djeljive s 4 (jer 4 dijeli 100), a djeljiv je s 8 ako su mu posljednje tri znamenke djeljive s 8 (jer 8 dijeli 1000).

2. Dijeljenje s ostatkom

Na redovnoj nastavi uči se kako dijeliti prirodne brojeve s ostatkom. Pritom zahtijevamo da je ostatak uvijek manji od djelitelja. Činjenica da to uvijek možemo postići nije potpuno očita, te ju nazivamo teoremom o dijeljenju s ostatkom.

Teorem 3

Za proizvoljan prirodni broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da vrijedi $b = qa + r$ i $0 \leq r < a$.

Gornja tvrdnja je dobro poznata, i koristimo ju kako bismo bolje opisali/zapisali broj kad znamo koji ostatak daje pri dijeljenju s određenim brojem. Trebamo ju primjenjivati oprezno kada su u pitanju negativni brojevi.

⚠ Oprez

Koji je ostatak pri dijeljenju -5 s 3 ?

Brzopleti odgovor mogao bi biti 2, jer 5 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2. Međutim, primijenimo li gornji teorem, vidimo $-5 = -2 \cdot 3 + 1$. Dakle ostatak je 1.

Primjer 1

Postoji li kvadrat prirodnog broja koji pri dijeljenju s 4 daje ostatak 2?

Uzmimo proizvoljan prirodni broj n i njegov kvadrat n^2 . Ako je paran, možemo ga zapisati kao $n = 2k$ za neki k , pa vrijedi $n^2 = 4k^2$, što je očito djeljivo s 4.

Ako je n neparan, tada je $n = 2k + 1$ za neki $k \geq 0$ pa imamo

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Kako su $4k^2$ i $4k$ djeljivi s 4, vidimo da n^2 daje ostatak 1. Dakle, kvadrati svih prirodnih brojeva daju ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 4.

3. Djeljivost i relativno prosti brojevi

Znamo da je prost broj onaj koji ima točno dva djelitelja (1 i samog sebe) te da su *relativno prosti brojevi* oni koji nemaju zajedničkog djelitelja osim jedinice. Relativno prosti brojevi važni su jer za takve parove možemo donositi jače zaključke.

Tvrdnja koju često možemo iskoristiti u zadacima je da su brojevi n i $n - 1$ međusobno relativno prosti, za bilo koji prirodni broj n .

Pretpostavimo li suprotno, da za neki n postoji $d > 1$ koji dijeli i n i $n - 1$, možemo zapisati $n = da$, $n - 1 = db$. Tada imamo $1 = n - (n - 1) = da - db = d(a - b)$. Kako je $a - b$ također cijeli broj, slijedi da $d > 1$ dijeli broj 1, što je naravno nemoguće.

Sljedeći primjer pojavio se kao zadatak na Državnom natjecanju 2026. u 8. razredu, a oslanja se na upravo spomenutu tvrdnju.

Primjer 2

Odredi sve parove prirodnih brojeva za koje je zbroj njihovog umnoška, njihovog količnika, njihovog zbroja i njihove razlike jednak 450.

Neka su x i y traženi brojevi.

Prema uvjetu zadatka vrijedi

$$xy + \frac{x}{y} + (x + y) + (x - y) = 450,$$

odnosno

$$xy + \frac{x}{y} + 2x = 450.$$

Ako izlučimo x i svedemo na zajednički nazivnik y dobivamo

$$x \cdot \frac{y^2 + 1 + 2y}{y} = 450.$$

Izraz u brojniku je kvadrat binoma, tj. vrijedi

$$x(y + 1)^2 = 450y,$$

iz čega zaključujemo da $(y + 1)^2$ dijeli $450y$.

No, najveći zajednički djelitelj brojeva y i $y + 1$ je 1 (inače bi zajednički djelitelj dijelio i njihovu razliku $y + 1 - y = 1$), pa su brojevi y i $(y + 1)^2$ relativno prosti.

Stoga $(y + 1)^2$ dijeli 450.

Iz rastava $450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ na proste faktore, zaključujemo da vrijedi $(y + 1)^2 \in \{1, 9, 25, 225\}$.

Ako je $(y + 1)^2 = 1$, slijedi da je $y = 0$, a to nije prirodan broj.

Ako je $(y + 1)^2 = 9$, slijedi da je $y = 2$, a tada je $x = 100$.

Ako je $(y + 1)^2 = 25$, slijedi da je $y = 4$, a tada je $x = 72$.

Ako je $(y + 1)^2 = 225$, slijedi da je $y = 14$, a tada je $x = 28$.

Postoje i općenitije tvrdnje vezane uz proste brojeve, koje ćemo ovdje navesti bez dokaza.

Propozicija 4

1. Neka su a i b relativno prosti brojevi te neka je q potencija prostog broja. Tada iz $q \mid a \cdot b$ nužno slijedi $q \mid a$ ili $q \mid b$.
2. Neka su a i b relativno prosti brojevi. Ako vrijedi $a \mid m$ i $b \mid m$ za neki broj m , tada vrijedi i $a \cdot b \mid m$.

Oprez

Pretpostavka da su brojevi relativno prosti je ključna, bez nje gornji zaključci ne vrijede!

Protuprimjeri:

1. Uzmimo brojeve $a = 6$, $b = 15$. Tada za npr. $q = 9 = 3^2$ vrijedi $9 \mid 6 \cdot 15 = 90$, ali očito ne vrijedi niti $9 \mid 6$ niti $9 \mid 15$.
2. Uzmimo npr. $a = 4$, $b = 6$. Tada vrijedi $a \mid 12$ i $b \mid 12$, ali 12 očito nije djeljivo s $a \cdot b = 24$.

Primjer 3

Odredi sve peteroznamenkaste brojeve oblika $\overline{a3b2c}$ djeljive s 45.

Primijetimo prvo da je $45 = 9 \cdot 5$, a kako su 5 i 9 relativno prosti, dovoljno je pronaći brojeve koji su djeljivi s 5 i s 9. Zbog djeljivosti s 5, c mora biti 0 ili 5. Promotrimo što se događa u oba slučaja:

1. $c = 0$: Sada je traženi broj oblika $\overline{a3b20}$. Zbroj znamenaka mu je

$$a + 3 + b + 2 + 0 = a + b + 5.$$

Da bi broj bio djeljiv i s 9, $a + b + 5$ mora biti djeljivo s 9, tj. $a + b$ može biti 4 ili 13. Sljedeća mogućnost bila bi 22, što nije moguće jer $a, b \leq 9$.

Ako je $a + b = 4$, tada za a i b imamo mogućnosti $(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$, pa dobivamo brojeve

$$13320, 23220, 33120, 43020.$$

Ako je $a + b = 13$, tada a i b mogu biti $(4, 9), (5, 8), (6, 7), (7, 6), (8, 5), (9, 4)$, pa dobivamo brojeve

$$43920, 53820, 63720, 73620, 83520, 93420.$$

2. $c = 5$: Sada je traženi broj oblika $\overline{a3b25}$. Zbroj znamenaka mu je

$$a + 3 + b + 2 + 5 = a + b + 10.$$

Da bi broj bio djeljiv i s 9, $a + b + 10$ mora biti djeljivo s 9, tj. $a + b$ može biti 8 ili 17.

Ako je $a + b = 8$, tada a i b mogu biti $(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)$, pa dobivamo brojeve

$$13725, 23625, 33525, 43425, 53325, 63225, 73125, 83025.$$

Ako je $a + b = 17$, tada za a i b imamo mogućnosti $(8, 9), (9, 8)$, pa dobivamo brojeve

$$83925, 93825.$$

Primjer 4

Odredi sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{abab}$ djeljive sa 16.

Analogno ranijim zaključcima o djeljivosti s 2, 4 i 8, mogli bismo reći da je broj djeljiv s 16 ako su mu zadnje četiri znamenke djeljive s 16. Kako je ovdje cijeli broj četveroznamenkast, to nam trenutno ne pomaže. Također, vrijedi $16 = 2^4$, pa ne možemo primijeniti pravila o djeljivosti s djeliteljima kao u prethodnom primjeru. Pokušajmo s dekadskim prikazom i zapišimo traženi broj u obliku

$$\overline{abab} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + a \cdot 10 + b = 1010a + 101b = 101(10a + b).$$

Broj 101 je neparan, tj. 16 i 101 su relativno prosti, pa slijedi da $10a + b$ mora biti djeljiv 16. Broj $10a + b$ nalazi se između 10 i 99, a višekratnici broja 16 u tom rasponu su 16, 32, 48, 64, 80 i 96. Prema tome, mogućnosti za a i b su

$$(1, 6), (3, 2), (4, 8), (6, 4), (8, 0), (9, 6),$$

a traženi brojevi su

$$1616, 3232, 4848, 6464, 8080, 9696.$$

4. Ponavljanje i periodičnost ostataka

Već smo se ranije uvjerali da svi kvadrati daju ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 4, a slično možemo utvrditi i u složenijim zadacima.

Primjer 5

- a) Odredimo sve ostatke koje mogu imati potencije broja 2 pri dijeljenju s 3.

Promotrimo prvih nekoliko potencija i njihove ostatke pri dijeljenju s 3:

$$2, 4, 8, 16, \dots \Rightarrow \text{ostaci } 2, 1, 2, 1, \dots$$

Primijetimo da se ostaci ponavljaju, te da 2^m pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2 ako je m neparan, te ostatak 1 ako je m paran. Tu tvrdnju možemo i formalno dokazati koristeći matematičku indukciju (pokušajte sami).

- b) Odredimo sve ostatke koje mogu imati potencije broja 3 pri dijeljenju s 7.

Promotrimo prvih nekoliko potencija i njihove ostatke pri dijeljenju s 7:

$$3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, \dots \Rightarrow \text{ostaci } 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, \dots$$

Slično prethodnom primjeru, možemo zaključiti da 3^m pri dijeljenju s 7 daje ostatak 3 ako je m oblika $m = 6k + 1$, ostatak 2 ako je m oblika $m = 6k + 2$, ostatak 6 ako je m oblika $m = 6k + 3$, ostatak 4 ako je $m = 6k + 4$, ostatak 5 ako je m oblika $m = 6k + 5$ te ostatak 1 ako je m oblika $m = 6k$.

Primjer 6

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000000 koji su kvadrati prirodnih brojeva, a pri dijeljenju s 8 daju ostatak 4?

Primijetimo prvo da je pitanje ekvivalentno prebrojavanju prirodnih brojeva n manjih od 1000, čiji kvadrat pri dijeljenju s 8 daje ostatak 4.

Zatim uočimo da za neparne brojeve n , n^2 je također neparan, pa svakako ne može davati ostatak 4.

Ako je n djeljiv s 4, odnosno $n = 4k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, vidimo $n^2 = 16k^2$, pa je djeljiv s 8.

Preostaje provjeriti brojeve oblika $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$n^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4.$$

Kako je $16k^2 + 16k$ djeljivo s 8, svaki ovakav broj daje ostatak 4 pri dijeljenju s 8.

Prebrojavanjem vidimo da brojeva oblika $4k + 2$ manjih od 1000 ima 250.

Zadaci za samostalnu vježbu

1. Odredi najveći i najmanji broj oblika $\overline{3219abc}$ koji je djeljiv s 90.
2. Odredi prirodni broj n takav da je n^5 šesteroznamenasti broj s posljednjom znamenkom 4.
3. Od znamenaka troznamenastog broja moguće je sastaviti 6 različitih dvoznamenkastih brojeva. Koji troznamenasti broj ima svojstvo da je jednak polovici zbroja svih 6 tako dobivenih brojeva?
4. Odredi sve peteroznamenaste brojeve $\overline{47a9b}$ koji su djeljivi brojem 18.
5. Odredi a i b u broju $\overline{64a4b}$ tako da taj broj pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1, pri dijeljenju s 5 ostatak 2, a pri dijeljenju sa 4 ostatak 3.
6. Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 12 puta veći od zbroja svojih znamenki.
7. Odredi sve troznamenkaste brojeve djeljive sa 7 kojima je zbroj znamenki jednak 8.
8. Odredi najveći i najmanji broj oblika $\overline{993abc}$ koji je djeljiv i sa 6 i sa 7.
9. Odredi sve četveroznamenaste brojeve djeljive s 18 kojima je na mjestu desetica 4 i kojima su sve znamenke međusobno različite.
10. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji su za 1 manji od šesterostrukog zbroja svojih znamenki.
11. Zbroj dvoznamenkastog i troznamenkastog broja je četveroznamenasti broj. Svaki od ta tri broja jednako se čita s lijeva na desno i obratno. Koji su to brojevi?
12. Dokažite da je zbroj
$$1^{2026} + 2^{2026} + 3^{2026} + 4^{2026}$$
djeljiv s 10.
13. Odredi sve parove (a, b) cijelih brojeva takvih da je $a(a - b) = b$.
14. Neka je n prirodan broj i neka je S zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do n . Dokaži da S ne može biti za 1 manji od višekratnika broja 3.
15. Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve n za koje brojevi n i n^2 imaju jednake zadnje tri znamenke.
16. Postoji li cijeli broj x za koji su oba broja

$$\frac{14x + 5}{9} \text{ i } \frac{17x - 5}{12}$$

cijela?

17. a) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654;
b) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654;

18. Neka je n prirodan broj. Može li se razlomak

$$\frac{(2n+1)(4n+1)}{n(4n+3)}$$

kratiti nekim prirodnim brojem većim od 1?

19. Dokaži da je broj

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$$

djeljiv sa 10.

20. Dokaži da je za svaki prirodan broj izraz $n^{19} - n^7$ djeljiv s 30.

21. Odredite sve prirodne brojeve n za koje su sva tri broja $3n - 4$, $4n - 5$ i $5n - 3$ prosti brojevi.

Upute za zadatke za samostalnu vježbu

1. Rastavi 90 na relativno proste faktore i promatraj dva zasebna problema.
2. Ako je a zadnja znamenka od n , onda je zadnja znamenka od a^5 ujedno i zadnja u n^5 . Koje su mogućnosti?
3. Koristi dekadski zapis svakog od navedenih brojeva.
4. Slično kao Primjer 3.
5. Prvo zaključi kakva mora biti znamenka b prema djeljivosti s 5, zatim promatraj druge djeljivosti.
6. Zapišimo $100a + 10b + c = 12(a + b + c)$ i promatramo djeljivost s 11.
7. Uoči $100a + 10b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c$ i promatraj $2a + 3b + c$, uz uvjet $a + b + c = 8$.
8. Promatraj djeljivost s 42 i broj $\overline{abc}$.
9. Promatraj djeljivost s 2 i s 9, za dekadski zapis broja $\overline{ab4c}$.
10. Zapiši i sredi $\overline{ab} = 10a + b = 6(a + b) - 1$.
11. Promatraj dekadski zapis dvoznamenkastog i troznamenkastog broja. Koje su mogućnosti za četveroznamenkasti broj?
12. Promatraj zadnje znamenke potencija $1^k, 2^k, 3^k, 4^k$ općenito. Možeš li uočiti neko ponavljanje?
13. Zapiši izraz na neki drugi način. Može ti pomoći to da su a i $a + 1$ relativno prosti ili pak da ako neki broj dijeli 1, taj broj mora biti 1 ili -1 .
14. Promatraj slučajeve ovisno o ostatku pri dijeljenju broja n s 3.
15. Želimo brojeve n takve da je $n^2 - n$ djeljiv s $1000 = 8 \cdot 125$.
16. Pretpostavi da takav x postoji i izrazi ga iz obje jednakosti.
17. Faktoriziraj razliku kvadrata i razliku kubova. Također primijeti da je 987654 djeljivo s 2 i 3.
18. Pretpostavi da postoji takav $d > 1$ i dokaži da tada vrijedi $d \mid 1$, što je nemoguće.
19. Odredi ostatak svakog od pribrojnika pri dijeljenju s 2 i 5. Promatraj ostatke pri dijeljenju brojeva 7^m s 4 i s 5.
20. Faktoriziraj dani izraz.
21. Promatraj slučajeve u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju n s 3. Promatraj djeljivost danih brojeva s 2 i 3.

Rješenja zadataka za samostalnu vježbu

1. Kako je $90 = 10 \cdot 9$, a 9 i 10 su relativno prosti, traženi broj djeljiv i s 10 i s 9. Zbog djeljivosti s 10 slijedi $c = 0$. Sada je traženi broj oblika $3219ab0$. Zbroj znamenki je

$$3 + 2 + 1 + 9 + a + b + 0 = 15 + a + b,$$

pa $a + b$ može biti 3 ili 12. Za najmanji traženi broj tražimo što manju moguću znamenku stotica a , a to je u slučaju kada je $a = 0$ i $b = 3$. Za najveći traženi broj a mora biti što veći, a najveći je za $a = 9$ i $b = 3$. Dakle, najmanji takav broj je 3219030, a najveći 3219930.

2. Ako broj ima zadnju znamenku 4, onda je ostatak pri dijeljenju tog broja s 10 također 4. Gledamo sve moguće ostatke pri dijeljenju broja n^5 s 10. Ostatak ovisi samo o vrijednosti posljednje znamenke, pa gledamo ostatak pri dijeljenju brojeva $1^5, 2^5, \dots, 9^5$ s 10. Jedino 4^5 daje ostatak 4 pri dijeljenju s 10, dakle zadnja znamenka broja n mora biti 4. Kako je n^5 šesteroznamenasti broj, n mora biti dvoznamenkasti broj. Broj 14 zadovoljava uvjet zadatka

$$14^5 = 537824.$$

Primijetimo da je $20^5 = 2^5 \cdot 10^5 = 3200000$, dakle $n < 20$. Jedino rješenje je $n = 14$.

3. Neka je $\overline{abc}$ traženi broj. Iz uvjeta zadatka vrijedi

$$2\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{cb}.$$

Objе strane jednakosti možemo zapisati koristeći dekadski zapis kao u prošlim zadacima:

$$\begin{aligned} 2(100a + 10b + c) &= 10a + b + 10a + c + 10b + a + 10b + c + 10c + a + 10c + b \\ 200a + 20b + 2c &= 22a + 22b + 22c \\ 100a + 10b + c &= 11(a + b + c) \\ 89a &= 10c + b. \end{aligned}$$

$10c + b$ je dvoznamenkasti broj pa mora vrijediti $a = 1$. Prema tome, $89 = 10c + b$, pa je $b = 9$ i $c = 8$. Traženo rješenje je 198.

4. Kako je $18 = 9 \cdot 2$, a 9 i 2 su relativno prosti, razmatramo zasebno djeljivost s 2 i 9. Zbog parnosti zaključujemo da je b paran broj, a nadalje zaključujemo da

$$4 + 7 + a + 9 + b = 20 + a + b$$

mora biti djeljiv s 9. Razmatramo slučajeve prema mogućnostima za b .

- $b = 0$: $20 + b = 20$, pa mora biti $a = 7$.
- $b = 2$: $20 + b = 22$, pa mora biti $a = 5$.
- $b = 4$: $20 + b = 24$, pa mora biti $a = 3$.
- $b = 6$: $20 + b = 26$, pa mora biti $a = 1$.

- $b = 8$: $20 + b = 28$, pa mora biti $a = 8$.

Traženi brojevi su 47196, 47394, 47592, 47790, 47898.

5. Broj daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5 ako mu je posljednja znamenka 2 ili 7. Isto tako, broj daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 ako mu zadnje dvije znamenke daju ostatak 3 pri dijeljenju s 4.

Za $b = 2$ broj $\overline{64a42}$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4 (jer je $42 = 40 + 2$) pa to ne može biti rješenje. Za $b = 7$ imamo broj $\overline{64a47}$ koji daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4. Broj daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 ako mu suma znamenaka daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3. Suma znamenaka je

$$6 + 4 + a + 4 + 7 = 21 + a,$$

tj. a je 1, 4 ili 7. Uvrštavajući sve mogućnosti za a , dobivamo rješenja: 64147, 64447, 64747.

6. Promatramo dekadski zapis broja $\overline{abc}$:

$$100a + 10b + c = 12(a + b + c)$$

$$88a = b + 11c$$

$$11(8a - c) = b.$$

Slijedi da b mora biti djeljiv s 11, ali kako je b znamenka, jedina mogućnost je $b = 0$.

Uvrštavanjem imamo $88a = 11c$, odnosno $8a = c$.

Jedine mogućnosti su $a = c = 0$ i $a = 1$, $c = 8$. Prema tome, jedino troznamenasto rješenje je broj 108.

7. Tražimo troznamenkaste brojeve oblika $100a + 10b + c$ djeljive sa 7, gdje je $a + b + c = 8$.

Uočimo prvo $100a + 10b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c$. Kako je $98a + 7b$ djeljivo sa 7, zapravo tražimo brojeve takve da je $2a + 3b + c$ djeljivo sa 7. Uvrstimo još $c = 8 - a - b$ pa imamo da

$$2a + 3b + 8 - a - b = a + 2b + 8$$

mora biti djeljiv sa 7. Drugim riječima, $a + 2b$ mora davati ostatak 6 pri dijeljenju sa 7, jer je $6 + 8 = 14$. Kako su a i b znamenke manje ili jednake 8, te $a + b \leq 8$, mogućnosti za $a + 2b$ su 6 i 13.

Rješenja ćemo pronaći prema mogućnostima za a .

- $a = 1$: $a + 2b = 1 + 2b$ može biti samo 13, dakle $b = 6$ i $c = 1$.
- $a = 2$: $a + 2b = 2 + 2b$ može biti samo 6, dakle $b = 2$ i $c = 4$.
- $a = 3$: $a + 2b = 3 + 2b$ može biti samo 13, dakle $b = 5$ i $c = 0$.
- $a = 4$: $a + 2b = 4 + 2b$ može biti samo 6, dakle $b = 1$ i $c = 3$.
- $a = 5$: $a + 2b = 5 + 2b$ može biti samo 13, ali tada $b = 4$, što je nemoguće.
- $a = 6$: $a + 2b = 6 + 2b$ može biti 6, dakle $b = 0$ i $c = 2$.
- $a = 7$: $a + 2b = 7 + 2b$ može biti samo 13, dakle $b = 3$, što je nemoguće.
- $a = 8$: $b = c = 0$, ali 800 nije djeljivo sa 7.

Dakle, rješenja su 161, 224, 350, 413, 602.

8. Ako je broj djeljiv s 6 i 7, mora biti djeljiv s 42. Kako je

$$\overline{993abc} = 993000 + 100a + 10b + c.$$

Kako je $993000 = 23642 \cdot 42 + 36$, zaključujemo da $100a + 10b + c$ mora davati ostatak 6 pri dijeljenju s 42. Najmanji mogući broj je 6, za $a = b = 0$ i $c = 6$.

Nadalje najveći troznamenkasti broj koji daje ostatak 6 pri dijeljenju s 42 je broj 972. Prema tome, traženi brojevi su 993006 i 993972.

9. Promatramo broj $\overline{ab4c}$, a djeljivost s 18 znači da promatramo djeljivost s 2 i 9.

Zaključujemo da c mora biti paran, te da $a + b + c + 4$ mora biti djeljiv s 9. Odnosno, $a + b + c$ mora dati ostatak 5 pri dijeljenju s 9. Kako su a , b i c znamenke, jedine mogućnosti za zbroj su 5, 14 i 23. Razmatranjem slučajeva prema mogućnostima za c , te uz uvjet da su sve znamenke različite, dobijemo da su rješenja

$$2340, 3240, 9540, 8640, 6840, 5940, 3042, 9342, 7542, 5742, 3942, \\ 1746, 3546, 5346, 7146, 8046, 9846, 8946, 1548, 5148, 6048, 6948, 9648.$$

10. Iz uvjeta zadatka imamo

$$\overline{ab} = 10a + b = 6(a + b) - 1,$$

odakle sređivanjem dobijemo $4a + 1 = 5b$.

Zaključujemo da $4a + 1$ mora biti djeljivo s 5, pa prolazeći mogućnosti za znamenku a vidimo da su jedina rješenja $a = 1$ i $a = 6$. Za njih vrijedi $5b = 5$, odnosno $5b = 25$, pa su traženi brojevi 11 i 65.

11. Dvoznamenkasti broj koji se jednako čita slijeva i zdesna (palindrom) je oblika $\overline{aa}$.

Troznamenkasti palindrom mora biti oblika $\overline{bcb}$.

S druge strane, zbroj dvoznamenkastog i troznamenkastog broja mora biti manji ili jednak $99 + 999 = 1098$. Jedini četveroznamenkasti palindrom manji od 1098 je 1001. Dakle vrijedi

$$\begin{aligned} \overline{aa} + \overline{bcb} &= 1001 \\ 10a + a + 100b + 10c + b &= 1001 \\ 101b + 11a + 10c &= 1001. \end{aligned}$$

Uočimo, ako je $b \leq 8$, onda je $11a + 10c = 1001 - 101b \geq 193$, što je nemoguće jer su a i c znamenke. Dakle, mora vrijediti $b = 9$.

Dalje imamo $909 + 11a + 10c = 1001$, odnosno $11a + 10c = 92$. Kako $10c$ završava znamenkom 0, broj $11a$ mora završavati znamenkom 2. To je moguće samo ako je $a = 2$.

Konačno, iz $22 + 10c = 92$ slijedi $c = 7$ i traženi brojevi su 22, 979 i 1001.

12. Za djeljivost s 10 dovoljno je promatrati zadnje znamenke. Broj 1^k ima zadnju znamenku 1, neovisno o potenciji.

Promotrimo kako izgledaju zadnje znamenke potencija brojeva 2, 3, 4:

$$2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, \dots$$

$$3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, \dots$$

$$4, 6, 4, 6, 4, 6, 4, \dots$$

Uočimo da se zadnje znamenke ponavljaju svaka 4, odnosno svaka dva mjesta. Kako je $2026 = 2024 + 2$, zadnja znamenka broja 2^{2026} je jednaka zadnjoj znamenci broja 2^2 , i isto vrijedi za ostale potencije.

Prema tome, zbroj zadnjih znamenki traženog broja je jednak zbroju zadnjih znamenki broja $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$. Kako je $1 + 4 + 9 + 6 = 20$ djeljivo s 10, traženi broj također završava s 0, odnosno djeljiv je s 10.

13. Napišimo jednadžbu u obliku $a^2 = b + ab = b(a + 1)$.

Broj $a + 1$ je relativno prost s a , a mora biti djelitelj od a^2 . To je moguće samo ako je $a + 1 = 1$, ili $a + 1 = -1$.

U prvom slučaju imamo $a = 0$ i $b = 0$, a u drugom slučaju $a = -2$ i $b = -4$.

14. Promatramo slučajeve u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju n s 3.

Ako je $n = 3k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, onda je zbroj prvih n prirodnih brojeva

$$S = (1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) + \dots + (3k - 2 + 3k - 1 + 3k)$$

djeljiv s 3 jer je zbroj u svakoj zagradi djeljiv s 3.

Slično, ako je $n = 3k + 1$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$, onda zbroj

$$S = (1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) + \dots + (3k - 2 + 3k - 1 + 3k) + 3k + 1$$

daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3.

Ako je $n = 3k + 2$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$, onda je zbroj

$$S = (1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) + \dots + (3k - 2 + 3k - 1 + 3k) + 3k + 1 + 3k + 2$$

također djeljiv s 3. Ni u jednom slučaju $S + 1$ nije višekratnik broja 3.

15. Tražimo sve troznamenkaste brojeve za koje 1000 dijeli $n^2 - n = n(n - 1)$.

Kako je $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ te kako su 2 i 5 relativno prosti, broj $n(n - 1)$ mora biti višekratnik od 8 i višekratnik od 125.

Nadalje, n i $n - 1$ su relativno prosti. Možemo zaključiti da mora vrijediti $125 \mid n$ ili $125 \mid n - 1$, te $8 \mid n$ ili $8 \mid n - 1$. Provjeravamo sve četiri kombinacije:

- $125 \mid n$ i $8 \mid n$. Troznamenkasti višekratnici od 125 su 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. Nije dan od njih nije djeljiv s 8.

- $125 \mid n$ i $8 \mid n - 1$. Od gore navedenih troznamenkastih višekratnika, jedini koji daje ostatak 1 pri dijeljenju s 8 je 625.
- $125 \mid n - 1$ i $8 \mid n$. Ako je $n - 1$ troznamenkasti višekratnik od 125, jedini broj koji uvećan za 1 postaje djeljiv s 8 je 375, pa je $n = 376$.
- $125 \mid n - 1$ i $8 \mid n - 1$. Kao u prvom slučaju, ovo nema rješenja.

Jedina rješenja su 376 i 625.

- 16.** Pretpostavimo da je $\frac{14x + 5}{9} = m$ i $\frac{17x - 5}{12} = n$ za neke cijele brojeve m i n .

Sada imamo $14x + 5 = 9m$, $17x - 5 = 12n$, odnosno

$$x = \frac{9m - 5}{14} = \frac{12n + 5}{17}.$$

Daljnijim rješavanjem imamo

$$\begin{aligned} 17(9m - 5) &= 14(12n + 5) \\ 17 \cdot 9m - 14 \cdot 12n &= 14 \cdot 5 + 17 \cdot 5 \\ 3(51m - 56n) &= 31 \cdot 5 = 155. \end{aligned}$$

Vidimo da je lijeva strana djeljiva s 3, ali broj 155 nije, pa dolazimo do kontradikcije i početna pretpostavka ne vrijedi.

- 17.** a) Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $a^2 - b^2 = 987654$. Tada vrijedi

$$(a - b)(a + b) = 987654.$$

Broj 987654 je paran pa barem jedan od faktora $a - b$ i $a + b$ mora biti paran.

S druge strane, uočimo da vrijedi

$$(a + b) - (a - b) = 2b,$$

dakle $a + b$ i $a - b$ se razlikuju za paran broj pa su iste parnosti. Prema tome, oba su parni brojevi pa je stoga $(a - b)(a + b)$ djeljivo i s 4.

S druge strane, 987654 nije djeljivo s 4, pa zaključujemo da takvi a i b ne postoje.

- b) Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $a^3 - b^3 = 987654$. Tada vrijedi

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 987654.$$

Broj 987654 je djeljiv s 3 pa barem jedan od faktora $a - b$ i $a^2 + ab + b^2$ mora biti djeljiv s 3.

Budući da je

$$a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab,$$

zaključujemo da oba faktora moraju biti djeljivi s 3. Iz toga slijedi da je $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ djeljivo s 9, što je nemoguće jer 987654 nije djeljivo s 9.

Napomena: Do zaključka da $a - b$ i $a^2 + ab + b^2$ oba moraju biti djeljivi s 3 možemo doći i analizom slučajeva s obzirom na ostatke pri dijeljenju a i b s 3.

- 18.** Ako razlomak možemo kratiti brojem d , onda je d zajednički djelitelj brojnika i nazivnika. Pretpostavimo da postoji prirodni broj d koji dijeli brojeve

$$(2n + 1)(4n + 1) = 8n^2 + 6n + 1 \quad \text{i} \quad n(4n + 3) = 4n^2 + 3n.$$

Tada d dijeli i broj $2 \cdot (4n^2 + 3n) = 8n^2 + 6n$.

Stoga postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $8n^2 + 6n + 1 = da$ i $8n^2 + 6n = db$.

Budući da vrijedi

$$1 = (8n^2 + 6n + 1) - (8n^2 + 6n) = da - db = d(a - b),$$

zaključujemo da d dijeli 1, odnosno da je $d = 1$.

Dakle, zadani razlomak ne možemo kratiti prirodnim brojem većim od 1.

- 19.** Treba dokazati djeljivost s 10, tj. s 2 i s 5. Kako je 7 neparan, broj

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$$

je razlika dvaju neparanih brojeva, pa je paran. Dakle, djeljiv je s 2.

Promotrimo prvih nekoliko potencija broja 7:

$$7, 49, 343, 2401, 16807, \dots$$

Primijetimo da se zadnje znamenke potencija broja 7 ponavljaju s periodom 4, odnosno možemo zaključiti:

- 7^n ima zadnju znamenku 7, za $n = 4k + 1$,
- 7^n ima zadnju znamenku 9, za $n = 4k + 2$,
- 7^n ima zadnju znamenku 3, za $n = 4k + 3$,
- 7^n ima zadnju znamenku 1, za $n = 4k$.

Preostaje odrediti ostatke pri dijeljenju brojeva 7^7 i 7^{7^7} s 4. Primijetimo:

$$7 = 1 \cdot 4 + 3, 7^2 = 12 \cdot 4 + 1, 7^3 = 85 \cdot 4 + 3, 7^4 = 600 \cdot 4 + 1, \dots$$

Možemo utvrditi da 7^n daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 ako je n neparan, a ostatak 1 ako je n paran. Ovu slutnju potrebno je još dokazati, primjerice matematičkom indukcijom, što ostavljamo čitatelju.

Sada, kako su 7 i 7^7 neparni brojevi, zaključujemo da 7^7 i 7^{7^7} oba daju ostatak 3 pri dijeljenju s 4. Zbog toga 7^{7^7} i $7^{7^{7^7}}$ oba imaju zadnju znamenku 3, pa broj

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$$

ima zadnju znamenku 0, odnosno djeljiv je s 5.

20. Označimo $A = n^{19} - n^7$. Faktorizacijom dobivamo

$$\begin{aligned} A &= n^7(n^{12} - 1) = n^7(n^6 - 1)(n^6 + 1) \\ &= n^7(n^3 - 1)(n^3 + 1)(n^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1) \\ &= n^7(n - 1)(n^2 + n + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1) \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1) \cdot B, \quad B \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Kako su n i $n + 1$ uzastopni prirodni brojevi, jedan od njih je paran.

Jedan od tri uzastopna cijela broja $n - 1$, n , $n + 1$ je djeljiv s 3.

Ako je $n = 5k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, n^2 je djeljiv s 5.

Ako je $n = 5k \pm 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$, $n^2 - 1$ je djeljiv s 5.

Ako je $n = 5k \pm 2$ za neki $k \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ je djeljiv s 5.

Dakle, $(n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$ je djeljiv s 2, 3 i 5, pa je onda i A djeljiv s $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

21. Promatramo slučajeve u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju n s 3.

Neka je prvo n djeljiv s 3, odnosno $n = 3k$ za neki $k \geq 1$. Tada je $5n - 3 = 15k - 3$ što je djeljivo s 3. Da bi to bio prost broj, mora vrijediti $5n - 3 = 3$, ali onda imamo $5n = 6$ što nije moguće.

Neka je sada $n = 3k + 1$, za neki $k \geq 0$. Tada imamo $3n - 4 = 3(3k + 1) - 4 = 9k - 1$ i $5n - 3 = 5(3k + 1) - 3 = 15k + 2$. Za $k = 0$ dobijemo $3n - 4 < 0$, dakle vrijedi $k \geq 1$, $3n - 4 \geq 8$ i $5n - 3 \geq 17$. Dalje primijetimo

$$(5n - 3) - (3n - 4) = 15k + 2 - (9k - 1) = 6k + 3.$$

Kako je $6k + 3$ neparno, zaključujemo da su $5n - 3$ i $3n - 4$ suprotne parnosti, a kako su oba veća od 2 zaključujemo da jedan mora biti složeni paran broj. Prema tome, u ovom slučaju također nema rješenja.

Neka je sad $n = 3k + 2$. Uvrštavanjem imamo $4n - 5 = 4(3k + 2) - 5 = 12k + 3$, što je djeljivo s 3. Da bi to bio prost broj, mora vrijediti $4n - 5 = 3$. Zaključujemo $n = 2$ i provjerom vidimo da

$$3n - 4 = 2, \quad 4n - 5 = 3 \quad \text{i} \quad 5n - 3 = 7$$

zaista jesu prosti brojevi.