

HMD-ove lekcije o natjecateljskim temama

Uvod u matematičku indukciju

Okvirna razina: HJMO / SŠ A var. županijsko

Lekciju priredila: izv. prof. dr. sc. Azra Tafro

Datum objave: 7. rujna 2026.

1. Uvodni primjer

Odredi zbroj prvih 100 neparnih prirodnih brojeva.

Ovo je primjer zadatka kojeg najuporniji mogu riješiti „na silu" - ako imamo dovoljno vremena, možemo ispisati prvih 100 neparnih prirodnih brojeva i zbrojiti ih. Možemo se zapitati postoji li jednostavniji i brži način, ili što bi se dogodilo da se tražio zbroj prvih 1000 prirodnih brojeva?

Promotrimo zbrojeve neparnih brojeva za prvih nekoliko brojeva:

$$1 = 1\,,\ 1+3 = 4\,,\ 1+3+5 = 9\,,\ 1+3+5+7 = 16\,,\ 1+3+5+7+9 = 25, \ldots$$

Ako obratimo pažnju na rezultate, vidimo da su oni kvadrati prirodnih brojeva - kad zbrojimo jedan broj dobijemo kvadrat broja 1, kad zbrojimo dva broja dobijemo kvadrat broja 2 itd. Sada možemo naslutiti odgovor i oblikovati našu slutnju. Primijetimo da k-ti neparni prirodni broj možemo zapisati kao $2k-1$. Želimo utvrditi da vrijedi

$$1+3+\cdots+2k-1 = k^2.$$

Nabrajanjem rezultata za nekoliko početnih brojeva može nam se učiniti da je odgovor „očit". Međutim, ne možemo znati da će se uočeni uzorak ponavljati unedogled. S obzirom da smo već provjerili da tvrdnja vrijedi za prvih nekoliko neparnih brojeva, prirodno je promatrati što će se događati dodavanjem novog broja.

Drugim riječima, pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prvih k neparnih brojeva. Sada možemo dodati sljedeći, $(k+1)$. pribrojnik koji iznosi $2(k+1)-1 = 2k+1$.

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2. \qquad (*)$$

Uočimo da smo za prvih k pribrojnika iskoristili pretpostavku da je njihov zbroj k^2, a iz toga dobili da je zbroj prvih $k+1$ pribrojnika jednak $(k+1)^2$. Na početku smo pokazali da tvrdnja vrijedi za prvih 5 neparnih brojeva, a zbog $(*)$ znamo da vrijedi i za prvih 6, pa vrijedi i za prvih 7 itd. Takvim zaključivanjem možemo zaključiti da će vrijediti i za prvih 100 neparnih brojeva, odnosno

$$1+3+\ldots+199 = 100^2 = 10000.$$

⚠ Oprez

Koristeći gornju argumentaciju mogli bismo riješiti zadatak za bilo koji konkretni broj pribrojnika, ne samo 100. Htjeli bismo zaključiti da onda vrijedi i za sve prirodne brojeve, ali to ne možemo tek tako. Problem je u tome da zaključak „tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve" znači da tvrdnja vrijedi za beskonačno mnogo brojeva, a ne možemo ih sve provjeriti. Kako bismo mogli reći da naša tvrdnja vrijedi općenito, tj. za zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva za svaki n, gore opisani način razmišljanja potrebno je malo proširiti. Tu nam treba **princip matematičke indukcije**, jer on opravdava skok s „mogu nastaviti korak po korak" na „vrijedi za beskonačno mnogo slučajeva".

Ako želimo donijeti zaključak za (prebrojivo) beskonačno velik skup brojeva, moramo se pozvati na matematički aksiom koji slijedi u nastavku.

2. Teorija i primjeri

Ako želimo samo pokazati tvrdnju za neki konkretni n, onda se možemo vraćati unazad i u konačno mnogo koraka ćemo doći do 1. Tu nam ne treba ništa više od toga da kažemo „i tako n puta". No, ako želimo pokazati da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve, onda bismo morali provesti beskonačno koraka. Matematičari jako paze da u „pravila igre" uključe pravila koja omogućavaju takve zaključke. Princip matematičke indukcije upravo osigurava da se u dokazu može provesti beskonačno mnogo koraka.

Metoda matematičke indukcije naziv je za vrstu postupka u kojem zaključujemo upravo na opisani način. Prvo provjerimo tvrdnju za jedan prirodan broj (ili njih nekoliko), a onda dokažemo da ako znamo da tvrdnja vrijedi za neki broj, onda vrijedi i sljedeći.

Definicija 1: Princip matematičke indukcije

Tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki $n \geqslant n_0$ ako vrijedi tvrdnja $T(n_0)$, te ako iz $T(k)$ slijedi $T(k+1)$ za svaki k za koji je tvrdnja definirana.

U gornjoj definiciji tvrdnja $T(n)$ može biti bilo koja tvrdnja koja se odnosi na prirodni broj n. Primjerice, u prošlom primjeru ta tvrdnja bila je $T(n) =$„zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva jednak je n^2". Metoda matematičke indukcije moćan je alat kojim se rješavaju zadaci i problemi iz svih područja matematike.

Svaki dokaz indukcijom ima dva važna elementa. Prvi je **baza** kojom se dokazuje tvrdnja za n_0; drugi su **pretpostavka** i **korak** koji se izvode zajedno. Prvo pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n = k$, zatim u koraku dokazujemo tvrdnju za $n = k + 1$ uz korištenje pretpostavke. Ovdje smo namjerno koristili riječ *element*, a ne npr. „slučaj" ili „faza", jer su pretpostavka i korak indukcije uvijek dvije nerazdvojive tvrdnje. Ponekad se u literaturi posebno izdvaja pretpostavka kao jedna od „faza", ali to nije potrebno. Naime, želimo li objasniti, odnosno shvatiti, princip matematičke indukcije, važno je uočiti implikaciju $T(k) \implies T(k+1)$ i vidjeti da je to zapravo jedna tvrdnja - tvrdnja koja tvrdi da je $T(k+1)$ istinita ako je istinita $T(k)$.

Često se u literaturi za ilustraciju koristi primjer padajućih domina: zamislimo da imamo uspravno naslagane domino pločice koje želimo srušiti. Pretpostavka i korak indukcije znače „ako se sruši jedna

domino pločica, ona će srušiti sljedeću". To i dalje ne znači da će sve domine pasti - da bi se to dogodilo, potrebna nam je baza, odnosno informacija da je početna pločica (na mjestu n_0) pala.

Formalno provođenje dokaza pokazat ćemo na jednom klasičnom primjeru.

Primjer 1

Dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju n.

Baza: Za $n = 1$ imamo

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

što očito vrijedi.

Korak: Pretpostavimo da za neki prirodan broj k vrijedi

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $k+1$. Uz korištenje pretpostavke, možemo računati

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + k + 1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

što je upravo tvrdnja zadatka kada uvrstimo $n = k+1$. Principom matematičke indukcije dokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. □

Napomena

Prilikom rješavanja zadataka ovom metodom, uvijek trebaš jasno istaknuti bazu i pretpostavku/korak, te se pozvati na princip matematičke indukcije (dovoljno je spomenuti ga) kako bi mogao zaključiti da tvrdnja vrijedi za sve zadane brojeve.

Gdje je greška u sljedećem primjeru?

Primjer 2

Dokažimo da svi ljudi imaju istu boju kose. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Neka tvrdnja vrijedi za neki $n = k$. Tada uzmimo $k+1$ ljudi. Ako izdvojimo k ljudi iz te skupine, oni prema pretpostavci indukcije imaju istu boju kose. Sada izostavimo jednog čovjeka iz te skupine i uzmimo osobu koju nismo uzeli u prethodnom koraku — tada tih k ljudi ima istu boju kose. Dakle tih $k + 1$ ljudi ima jednaku boju kose, pa zaključujemo da svi ljudi na svijetu imaju istu boju kose!

Naizgled se čini da smo korektno proveli dokaz (bazu i indukciju), ali kako tvrdnja očigledno nije istinita, negdje je došlo do greške. Radi se o tome da, ako pažljivo čitamo, u koraku koristimo da u skupini od k ljudi postoje barem dvije osobe. Prema tome, baza potrebna za dokaz nije $n = 1$ nego $n = 2$. Naravno, u tom slučaju baza bi značila da svake dvije osobe imaju istu boju kose, što ne vrijedi pa stoga ni početna tvrdnja nije dokazana.

⚠ Oprez: Pazi na bazi!

Dokazivanje baze za neki n_0 uglavnom je najlakši dio posla i često je taj dokaz trivijalan. Svejedno ga moramo navesti i provesti, jer sama implikacija (pretpostavka i korak) nije dovoljna da se dokaže tvrdnja.

Možemo riješiti još jedan primjer kako bismo uvježbali metodu tj. navikli se na postupak dokazivanja:

Primjer 3

Dokaži da je

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

za sve prirodne brojeve.

Rješenje. **Baza:** Za $n = 1$ imamo

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1,$$

što je istinito.

Korak: Pretpostavimo da za neki prirodan broj k vrijedi

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Korak ćemo izvesti slično kao u prošlom primjeru, uz uvrštavanje pretpostavke:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

što je bilo traženo. Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Matematičkom indukcijom ne može se izračunati nikakva vrijednost, ali se može dokazati istinitost neke hipoteze. Tako u zadacima u kojima ne znamo koliko iznosi neki izraz ovisan o prirodnom broju možemo,

na temelju vrijednosti koje sami izračunamo za nekoliko malih brojeva, postaviti općenitu hipotezu i dokazati je indukcijom.

Primjer 4

Odredimo koliko je

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 99 \cdot 100.$$

Rješenje. Ideja je odrediti eksplicitnu formulu za izraz

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1).$$

Izračunajmo zbroj za prvih nekoliko prirodnih brojeva n, recimo za $n = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 &= 2 = 2 \cdot 1, \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 &= 8 = 2 \cdot 4, \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 &= 20 = 4 \cdot 5, \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 &= 40 = 4 \cdot 5 \cdot 2. \end{aligned}$$

Rastavivši ovako sve vrijednosti koje smo dobili na faktore, vidimo da bi množenje tih vrijednosti s 3 dalo umnožak tri uzastopna prirodna broja, pa postavljamo hipotezu za tvrdnju

$$T(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Provjerimo indukcijom istinitost te tvrdnje. **Bazu** indukcije smo već izveli, bila nam je dovoljna i prva vrijednost $n_0 = 1$.

Korak: Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja $T(k)$ i dokazujemo $T(k+1)$.

$$\begin{aligned} \underbrace{1 \cdot 2 + \cdots + k(k+1)}_{T(k)} + (k+1)(k+2) &= \underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}_{T(k)} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Sada možemo mnogo lakše izračunati

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 99 \cdot 100 = \frac{99 \cdot 100 \cdot 101}{3} = 333300. \qquad \square$$

Kako smo već spomenuli, indukcija se primjenjuje u različitim kontekstima. Za početak, osim algebarskih jednakosti možemo dokazivati i nejednakosti, kao u sljedećem primjeru.

Primjer 5

Dokaži da vrijedi

$$n! > 2^n$$

za sve prirodne brojeve n veće od 3. Ovdje je $n!$ umnožak prvih n prirodnih brojeva, tj. $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$.

Rješenje. Matematičkom indukcijom dokazujemo da za $n > 3$ vrijedi tvrdnja

$$T(n) : n! > 2^n.$$

Baza: Uočimo iz teksta da je najmanji broj za koji dokazujemo tvrdnju $n = 4$:

$$T(4) : 4! = 24 > 16 = 2^4.$$

Korak: Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja $T(k)$ i dokazujemo $T(k+1)$, uz korištenje pretpostavke.

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k! > (k+1)2^k > 2\cdot 2^k = 2^{k+1},$$

što je bilo traženo. □

U sljedećim primjerima vidjet ćemo da se indukcija pojavljuje u različitim matematičkim područjima, ne samo u algebri - može se pojaviti u teoriji brojeva, geometriji ili kombinatorici. Ako uočimo kako „prijeći" iz situacije s k elemenata u onu s $k+1$ elemenata, možemo primijeniti indukciju.

Primjer 6

Dokaži da je zbroj kutova u svakom konveksnom n-terokutu jednak

$$180^\circ(n-2)$$

za $n \geqslant 3$, pri čemu je n prirodan broj.

Rješenje. **Baza:** Baza je $n = 3$, odnosno trokut, za koji znamo mu je zbroj kutova 180°.

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki k-terokut, za neki k.

Promatrajmo neki $(k+1)$-terokut. Označimo njegove vrhove redom s $V_1, V_2, \ldots, V_{k+1}$. Podijelimo sada $(k+1)$-terokut na trokut kojem su vrhovi V_1, V_2, V_3, te na k-terokut kojem su vrhovi svi osim vrha V_2. Zbroj kutova u $(k+1)$-terokutu jednak je zbroju kutova u trokutu i kutova u k-terokutu. U trokutu je zbroj kutova 180°, a u k-terokutu prema pretpostavci $180^\circ(k-2)$, dakle zbroj kutova u promatranom $(k+1)$-terokutu je

$$180^\circ + 180^\circ(k-2) = 180^\circ(k-1),$$

što je trebalo dokazati. □

Primjer 7

Ravnina je podijeljena pravcima na određeni broj regija. Dokaži da se bez obzira na položaj pravaca ravnina može obojiti u crno i bijelo tako da nikoje dvije susjedne regije nisu obojene istom bojom.

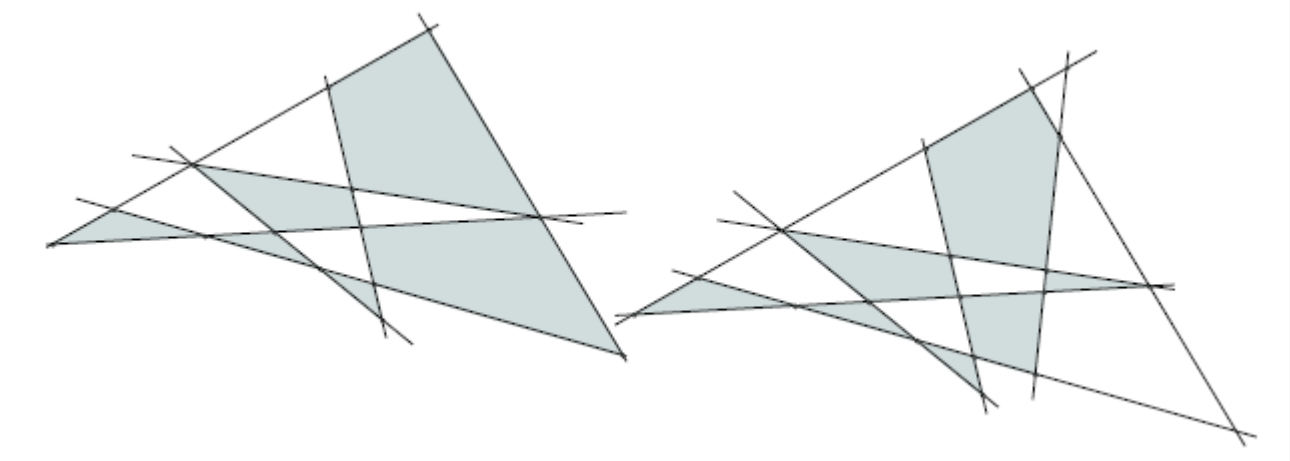
Rješenje. Na prvi pogled, u ovom zadatku se uopće ne spominju prirodni brojevi, ali upravo je indukcija ideja koja elegantno rješava zadatak. Možemo „iščitati između redaka" da se ovdje radi o tvrdnji za bilo koji (pa onda i svaki) broj pravaca. Stoga $T(n)$ glasi:

Podijelimo li ravninu s n pravaca, možemo obojati sve dobivene regije dvjema bojama tako da nikoje dvije susjedne regije nisu obojene istom bojom.

Baza: Uzimamo jedan pravac. Tada je ravnina podijeljena na 2 dijela, pa svaki od njih obojimo drugom bojom.

Korak: Pretpostavimo da je za k pravaca moguće obojiti ravninu na željeni način, tj. da vrijedi $T(k)$.

Nacrtamo li novi, $(k+1)$. pravac, željeno bojenje možemo postići tako da sve regije s jedne strane pravca ostavimo obojene kako su bile i prije, a svim regijama s druge strane pravca promijenimo boju. Regije samo s jedne strane pravca obojene su na željeni način jer su tako bile obojene prije dodavanja pravca, a promjena boja to ne mijenja; sve regije kojima je granica upravo dodani pravac bit će pravilno obojene jer su susjedne regije različito obojene zbog „invertiranja" boja samo s jedne strane pravca. Time smo uz pretpostavku izveli $T(k+1)$ i završili dokaz.



□

Primjer 8

Dokaži da je izraz $7^n - 1$ djeljiv sa 6 za svaki prirodan broj n.

Rješenje. Ovaj zadatak možemo jednostavno riješiti i promatrajući ostatke tj. kongruencije, a sad ćemo pokazati kako bismo ga riješili indukcijom.

Baza: Za $n = 1$ vrijedi

$$7^1 - 1 = 6,$$

što je djeljivo sa 6.

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki k, tj. da vrijedi $7^k - 1 = 6m$, za neki $m \in \mathbb{N}$.

Sada imamo

$$7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 = 7(7^k - 1) + 6 = 7 \cdot 6m + 6 = 6(7m + 1).$$

Dakle, cijeli izraz je djeljiv s 6, što je i trebalo pokazati. □

U zadacima u kojima primjenjujemo indukciju nije nužno da se tvrdnja dokazuje za sve prirodne brojeve, niti za sve brojeve veće od nekog n_0. Indukcijom možemo dokazivati ako varijabla o kojoj ovisi tvrdnja poprima vrijednosti iz skupa prirodnih brojeva, odnosno ako se izmedu skupa iz kojeg varijabla poprima vrijednosti i skupa prirodnih brojeva može uspostaviti bijekcija. U terminologiji domino primjera: moramo pokazati da se *neka* pločica srušila, te utvrditi pravilo po kojem se ruše - svaka sljedeća, svaka prethodna, svaka druga sljedeća itd. Iz toga onda možemo zaključiti da se srušilo beskonačno mnogo pločica, i utvrditi koje su to.

Sljedeći primjeri pokazuju različite varijacije.

Primjer 9

Dokaži da je broj $n^2 - 1$ djeljiv s 8 za svaki neparan prirodan broj n.

Rješenje. Ovo je također zadatak koji možemo riješiti promatranjem ostataka, ali sad ćemo ga dokazati matematičkom indukcijom po neparnim prirodnim brojevima.

Baza: Za $n = 1$ vrijedi $1^2 - 1 = 0$, što je djeljivo s 8.

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki neparan broj k, odnosno neka je $k^2 - 1 = 8m$ za neki prirodni broj m.

Sljedeći neparan broj nakon k je $k + 2$. Trebamo dokazati da vrijedi

$$8 \mid \big((k + 2)^2 - 1\big).$$

Računamo:

$$(k + 2)^2 - 1 = k^2 + 4k + 4 - 1 = (k^2 - 1) + 4k + 4.$$

Dakle,

$$(k + 2)^2 - 1 = 8m + 4(k + 1).$$

Budući da je k neparan, broj $k+1$ je paran, pa je $4(k+1)$ djeljiv s 8. Zato je i cijeli izraz $(k+2)^2-1$ djeljiv s 8, što je trebalo pokazati. □

U sljedećem primjeru vidjet ćemo da nam za dokaz koraka treba (naizgled) jača pretpostavka nego dosadašnje.

Primjer 10

Niz (a_n) zadan je s $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, i za svaki $n \geqslant 3$ vrijedi

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a_n \leqslant 2^n.$$

Rješenje. Pokazat ćemo bazu za dva broja, kasnije će biti jasno zašto.

Baza: Za $n = 1$ i $n = 2$ vrijedi

$$a_1 = 1 \leqslant 2 = 2^1, \quad a_2 = 2 \leqslant 4 = 2^2.$$

Korak: Pretpostavimo da za neki $k \geqslant 2$ tvrdnja vrijedi za brojeve $k-1$ i k. Odnosno,

$$a_i \leqslant 2^i \text{ za } i \in \{k-1, k\}.$$

Trebamo dokazati da vrijedi $a_{k+1} \leqslant 2^{k+1}$. Po definiciji niza imamo

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1}.$$

Sada koristimo pretpostavku indukcije za dva prethodna broja, k i $k-1$:

$$a_k \leqslant 2^k \quad \text{i} \quad a_{k-1} \leqslant 2^{k-1}.$$

Zato je

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \leqslant 2^k + 2^{k-1} < 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Dakle,

$$a_{k+1} \leqslant 2^{k+1}.$$

Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

U gornjem primjeru vidimo da smo već iz postavke zadatka mogli naslutiti da će nam trebati pretpostavka za dva prethodna broja, a ne samo jedan. Stoga se i u bazi dokazuje tvrdnja za dva broja. Općenito, gornji primjer je poseban slučaj situacije gdje koristimo pretpostavku za više prethodnih brojeva.

Napomena: Jaki princip matematičke indukcije

Indukciju možemo koristiti i u alternativnom obliku, tako da umjesto pretpostavke da vrijedi $T(k)$ koristimo pretpostavku da vrijede svi $T(n_0), \ldots, T(k)$. Može nam se učiniti da je ta tvrdnja na prvi pogled „jača", ali može se pokazati da je zapravo ekvivalentna općem obliku.

Zadaci za samostalnu vježbu

1. Dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Dokaži da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$(n+1)(n+2)\cdots 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

3. Dokaži da za sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

4. Dokaži da svaki prirodan broj $n \geqslant 12$ možemo zapisati u obliku

$$n = 4a + 5b,$$

gdje su $a, b \in \mathbb{N}_0$.

5. Dokaži da vrijedi $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$ za sve $n \geqslant 0$.

6. Dokaži da je broj dijagonala pravilnog n-terokuta jednak

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

7. Dokaži da za sve prirodne $n \geqslant 3$ vrijedi

$$3^n > 2^n + 3n.$$

8. a) Je li broj $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ djeljiv sa 33 za sve $n \in \mathbb{N}$?

b) Je li broj $1^{4n} + 2^{4n} + 3^{4n} + 4^{4n}$ djeljiv s 5 za sve $n \in \mathbb{N}$?

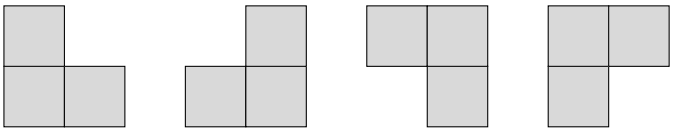
9. Dokaži da vrijedi $3^n > n^4$ za sve $n \geqslant 8$.

10. Dokaži da su princip matematičke indukcije i princip jake matematičke indukcije ekvivalentni, u smislu da se dokaz jednom metodom može pretvoriti u dokaz drugom.

11. Dokaži da se za svaki prirodan broj n ploča dimenzija

$$2^n \times 2^n$$

iz koje je uklonjeno jedno proizvoljno polje može popločati trominama oblika slova L s jednakim krakovima (kao na slici).



Upute za zadatke za samostalnu vježbu

1. Klasičan primjer, rješava se kao primjeri s početka - samo uvrsti pretpostavku.

2. Standardno rješavanje, potrebno je samo uvrstiti pretpostavku.

3. Uvrsti pretpostavku u korak i sredi nejednakost.

4. Pokaži $T(k) \implies T(k+4)$. Koristi jaki princip matematičke indukcije. Što moramo uzeti za bazu?

5. Iskoristi $2^{3^{n+1}}+1=\left(2^{3^n}+1\right)\left[\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1\right]$. Promatraj ostatke koji potencije broja 2 daju pri dijeljenju s 3.

6. Što se događa ako dodamo jedan vrh?

7. Indukcija s bazom $n=3$.

8. a) DA - dokaži indukcijom; b) NE - nađi primjer.

9. Indukcija po n.

10. U težem smjeru, označimo s npr. $P(n)$ tvrdnju

$$T(m) \text{ vrijedi za svaki } m \text{ takav da je } n_0 \leqslant m \leqslant n.$$

Ta tvrdnja $P(n)$ sada postaje tvrdnja koju dokazujemo običnom indukcijom.

11. Podijeli $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ploču na $2^n \times 2^n$ dijelove.

Rješenja zadataka za samostalnu vježbu

1. **Baza:** Za $n = 1$ imamo

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}.$$

Korak: Pretpostavimo da za neki prirodan broj k vrijedi

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $k+1$. Uz korištenje pretpostavke, možemo računati

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+2-1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}\end{aligned}$$

što je upravo tvrdnja zadatka kada uvrstimo $n = k+1$. Principom matematičke indukcije dokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

2. **Baza:**

$$T(1) : 1 \cdot 2 = 2 = 2^1 \cdot 1.$$

Korak: Pretpostavimo da vrijedi

$$T(k) : (k+1)(k+2) \cdots 2k = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1).$$

Dokazujemo $T(k+1)$:

$$\begin{aligned}(k+2)(k+3) \cdots (2k+2) &= (k+2)(k+3) \cdots 2k\,(2k+1)\underbrace{(2k+2)}_{2(k+1)} \\ &= 2\underbrace{(k+1)(k+2)(k+3) \cdots 2k}_{T(k)}(2k+1) \\ &= 2 \cdot 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)(2k+1) = 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1),\end{aligned}$$

što je upravo $T(k+1)$. Principom matematičke indukcije dokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

3.

$$T(n) : \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Baza: Vrijedi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 0.375 < \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.378.$$

Korak: Pretpostavimo da za neki k vrijedi

$$T(k) : \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

$$T(k+1): \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Iz pretpostavke slijedi

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}}_{T(k)}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Preostaje dokazati

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3k+4}},$$

odnosno

$$\frac{2k+1}{2k+2}<\sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}},$$

što se lako sređuje kvadriranjem i svodi se na istinitu nejednakost za sve prirodne brojeve. Time smo dokazali i početnu tvrdnju.

4. **Baza:** Provjerimo tvrdnju za prve četiri vrijednosti:

$$12=4\cdot 3+5\cdot 0,$$

$$13=4\cdot 2+5\cdot 1,$$

$$14=4\cdot 1+5\cdot 2,$$

$$15=4\cdot 0+5\cdot 3.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n=12,13,14,15$.

Korak: Pretpostavimo da za neki $k\geqslant 12$ vrijedi

$$k=4a+5b$$

za neke $a,b\in\mathbb{N}_0$. Tada je

$$k+4=4a+5b+4=4(a+1)+5b.$$

Budući da je $a+1\in\mathbb{N}_0$ i $b\in\mathbb{N}_0$, broj $k+4$ također ima traženi oblik.

Prema tome, iz svake od četiri baze $12,13,14,15$ možemo uzastopnim dodavanjem broja 4 dobiti sve prirodne brojeve veće ili jednake 12. Stoga po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n\geqslant 12$.

5. **Baza:** Za $n=0$ imamo

$$3^1=3\mid 2^{3^0}+1=3,$$

što očito vrijedi.

Korak: Pretpostavimo da za neki k vrijedi

$$3^{k+1}\mid 2^{3^k}+1.$$

Dokažimo da vrijedi i za $k+1$, odnosno trebamo pokazati

$$3^{k+2} \mid 2^{3^{k+1}} + 1.$$

Primijetimo da vrijedi

$$2^{3^{k+1}} + 1 = \left(2^{3^k} + 1\right)\left[\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1\right].$$

Po pretpostavci indukcije, prvi faktor je djeljiv s 3^{k+1}.

Nadalje, promatrajmo nekoliko potencija broja 2 i njihove ostatke pri dijeljenju s 3:

$$2, 4, 8, 16, 32 \ldots \Rightarrow \text{ ostaci } 2, 1, 2, 1, \ldots.$$

Možemo primijetiti da 2^m daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 kada je m paran, a ostatak 2 kad je m neparan. Kako je 3^k neparan broj, možemo zaključiti da 2^{3^k} daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Dakle, broj

$$\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1$$

daje isti ostatak kao i $2^2 - 2 + 1 = 3$, pa možemo zaključiti da je broj djeljiv s 3.

Dakle $2^{3^{k+1}} + 1$ smo prikazali kao umnožak dva faktora od kojih je jedan djeljiv s 3^{k+1} a drugi s 3, pa je sve skupa djeljivo s 3^{k+2}, što je trebalo dokazati. Principom matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

6. **Baza:** Tvrdnja ima smisla za $n \geqslant 3$, pa je baza trokut. Trokut ima nula dijagonala, i zaista vrijedi

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0.$$

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki k, tj. da svaki k-terokut ima $\frac{k(k-3)}{2}$ dijagonala.

Uzmimo sad proizvoljni $(k+1)$-terokut $\mathcal{P}$ i neka je T jedan njegov vrh. Neka su Q_1 i Q_2 vrhovi koji su susjedni vrhu T. Ako „izbacimo" vrh T te umjesto toga spojimo vrhove Q_1 i Q_2, dobijemo k-terokut kojeg možemo izjednačiti s $\mathcal{P}_1$. Primijetimo da $\mathcal{P}_1$ ima k vrhova, pa prema pretpostavci indukcije ima $\dfrac{k(k-3)}{2}$ dijagonala.

Primijetimo dalje da su sve dijagonale mnogokuta $\mathcal{P}_1$ ujedno i dijagonale mnogokuta $\mathcal{P}$. Nadalje, $\mathcal{P}$ ima još neke dijagonale - to je dužina $\overline{Q_1Q_2}$ te sve dijagonale iz vrha T, kojih ima ukupno $k-2$. Prema tome, mnogokut $\mathcal{P}$ ima ukupno

$$\frac{k(k-3)}{2} + 1 + (k-2) = \frac{k(k-3) + 2(k-1)}{2} = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k+1-3)}{2},$$

što je trebalo pokazati.

Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki $n \geqslant 3$.

7. **Baza:** Za $n = 3$ imamo

$$3^3 = 27 > 2^3 + 3 \cdot 3 = 17,$$

što očito vrijedi.

Korak: Pretpostavimo da za neki k vrijedi

$$3^k > 2^k + 3k.$$

Sada je za $k+1$ potrebno pokazati da vrijedi

$$3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1).$$

Iz pretpostavke imamo

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3(2^k + 3k) = 3 \cdot 2^k + 9k.$$

Za $k \geqslant 1$ vrijedi

$$3 \cdot 2^k + 9k > 2 \cdot 2^k + 3k + 6k > 2 \cdot 2^k + 3k + 3 = 2^{k+1} + 3(k+1),$$

što je trebalo pokazati.

Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki $n \geqslant 3$.

8. a) Dokazat ćemo da tvrdnja vrijedi metodom matematičke indukcije.
Baza: za $n = 1$ imamo

$$6^2 + 3^3 + 3^1 = 36 + 27 + 3 = 66 = 2 \cdot 33,$$

pa vrijedi baza.
Korak: Pretpostavimo sad da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi tvrdnja, tj. postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k = 33m.$$

Sada za $k+1$ imamo

$$\begin{aligned} 6^{2(k+1)} + 3^{k+1+2} + 3^{k+1} &= 36 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k \\ &= 36 \cdot \left(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k\right) - 33 \cdot 3^{k+2} - 33 \cdot 3^k \\ &= 36 \cdot 33m - 33 \cdot 3^{k+2} - 33 \cdot 3^k = 33(36m - 3^{k+2} - 3^k). \end{aligned}$$

Kako je izraz s desne strane djeljiv s 33, možemo zaključiti da vrijedi tvrdnja i za $k+1$, pa smo matematičkom indukcijom dokazali da vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

b) Možemo pokušati kao u gornjem slučaju, međutim kad uvrstimo $n = 1$ dobijemo

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 1 + 16 + 81 + 256 = 354,$$

što nije djeljivo s 5. Kako tvrdnja ne vrijedi za $n = 1$, svakako možemo reći da ne vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

9. **Baza:** Za $n = 8$ imamo

$$3^8 = 6561 > 8^4 = 4096.$$

Korak: Pretpostavimo da za neki k vrijedi $3^k > k^4$. Dokažimo da vrijedi i za $k+1$, tj. da vrijedi

$$3^{k+1} > (k+1)^4.$$

Kako je $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k$, po pretpostavci vrijedi

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot k^4.$$

Da bismo dokazali tvrdnju, dovoljno je pokazati $3 \cdot k^4 > (k+1)^4$. Ekvivalentno, imamo

$$3k^4 > (k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$
$$2k^4 > 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

Sada, kako je $k \geqslant 8$ imamo $2k \geqslant 16$, odnosno $2k^4 = 2k \cdot k^3 \geqslant 16k^3$. Dakle, dovoljno je dokazati

$$16k^3 > 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1,$$

odnosno

$$12k^3 > 6k^2 + 4k + 1.$$

Međutim, kako je $k \geqslant 8$, očito vrijedi $6k^3 > 6k^2$ te $6k^3 > 4k + 1$. Prema tome, vrijedi i početna tvrdnja pa smo matematičkom indukcijom dokazali da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n \geqslant 8$.

10. Jaka indukcija ekvivalentna je običnoj matematičkoj indukciji u smislu da se dokaz jednom metodom može pretvoriti u dokaz drugom metodom.

Pretpostavimo da postoji dokaz tvrdnje $T(n)$ pomoću jake indukcije. Tada se taj dokaz može pretvoriti u dokaz običnom indukcijom tako da uzmemo jaču indukcijsku tvrdnju.

Neka je $P(n)$ tvrdnja:

$$T(m) \text{ vrijedi za svaki } m \text{ takav da je } n_0 \leqslant m \leqslant n.$$

Ta tvrdnja $P(n)$ sada postaje tvrdnja koju dokazujemo običnom indukcijom.

Treba pokazati da vrijedi $P(n_0)$, a zatim da iz $P(n)$ slijedi $P(n+1)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Ako to dokažemo, tada po običnoj indukciji vrijedi $P(n)$ za svaki n. Budući da iz $P(n)$ posebno slijedi $T(n)$, dobivamo da vrijedi $T(n)$ za svaki n.

S druge strane, ako je tvrdnja $T(n)$ dokazana običnom indukcijom, tada je taj dokaz već zapravo dokaz jakom indukcijom.

Naime, $T(n_0)$ se dokazuje u bazi indukcije, bez ikakvih pretpostavki. U indukcijskom koraku dokazuje se $T(n+1)$. Kod jake indukcije smijemo pretpostaviti sve ranije slučajeve, ali u ovom dokazu dovoljno je koristiti samo tvrdnju $T(n)$.

11. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po n.

Baza: Za $n = 1$ imamo ploču dimenzija $2^1 \times 2^1 = 2 \times 2$.

Ako iz ploče uklonimo jedno polje, ostaju točno tri polja. Ona se mogu popločati jednom trominom oblika slova L, jer je takva tromina upravo 2×2 kvadrat bez jednog polja. Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Korak: Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi tvrdnja za svaku ploču dimenzija $2^k \times 2^k$ iz koje je uklonjeno jedno proizvoljno polje. Svaka takva ploča može se popločati trominama oblika slova L.

Trebamo dokazati da tvrdnja vrijedi za ploču dimenzija $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ iz koje je uklonjeno jedno proizvoljno polje.

Podijelimo tu ploču na četiri jednake manje ploče dimenzija $2^k \times 2^k$.

Uklonjeno, tj. prazno polje nalazi se u jednoj od te četiri manje ploče.

Sada u središte velike ploče postavimo jednu trominu oblika slova L tako da ona pokrije po jedno središnje polje u svakoj od preostale tri manje ploče, odnosno u onim manjim pločama koje ne sadrže zadano prazno polje.

Time smo dobili četiri manje ploče dimenzija $2^k \times 2^k$, pri čemu svaka od njih ima točno jedno prazno polje: jedna ploča ima početno zadano prazno polje, a ostale tri ploče imaju po jedno prazno polje nastalo postavljanjem središnje tromine.

Prema pretpostavci indukcije, svaka od te četiri manje ploče može se popločati trominama oblika slova L.

Dakle, i cijela ploča dimenzija

$$2^{k+1} \times 2^{k+1}$$

s jednim praznim poljem može se popločati trominama oblika slova L.

Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.