

MEDO 2025./2026.

Četvrto kolo

14.2.2026.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak S-4.1. [10 bodova]

U jednoj džungli živi nekoliko orangutana. Svaka dva orangutana su prijatelji ili su neprijatelji. Svaki orangutan ima točno tri neprijatelja. Orangutani se drže pravila: „Neprijatelj mog prijatelja je i moj neprijatelj“.

Koliko orangutana živi u toj džungli?

Rješenje.

Neka n orangutana živi u džungli. Tvrdimo da su rješenja $n = 4$ i $n = 6$.

Neka su A, B dva orangutana koji su prijatelji te neka je C neprijatelj od A . Tada je po pravilu i C neprijatelj od B . Ista tvrdnja vrijedi ako i zamijenimo uloge A i B , tj. svi orangutani koji su međusobno prijatelji imaju iste neprijatelje.

Stoga, kako svaki orangutan ima točno 3 neprijatelja, svaki orangutan ima najviše 2 prijatelja, odnosno, svaki orangutan može imati veze s najviše 5 drugih pa je $n \leq 6$. (te je očito $n \geq 4$ jer imamo barem jednog orangutana s njegova 3 neprijatelja)

Za $n = 4$ imamo da su svi međusobno neprijatelji.

Za $n = 5$ bi značilo da svaki orangutan ima samo jednog prijatelja, ali kada bismo ih pokušali grupirati imali bismo dvije grupe od 2 prijatelja te zadnji orangutan ne bi imao prijatelja.

Za $n = 6$ imamo po dvije grupe od 3 prijatelja.

Zadatak S-4.2. [15 bodova]

Riješi sustav jednadžbi:

$$\frac{5xy}{x+y} = 12, \quad \frac{5yz}{y+z} = 18, \quad \frac{5zx}{z+x} = 36.$$

Rješenje.

Jasno je da su x, y i z različiti od 0. Stoga možemo promatrati recipročne vrijednosti svake jednadžbe:

$$\frac{x+y}{5xy} = \frac{1}{12}, \quad \frac{y+z}{5yz} = \frac{1}{18}, \quad \frac{x+z}{5xz} = \frac{1}{36}.$$

Uvedemo li supstituciju $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, dobivamo sustav

$$a+b = \frac{5}{12}, \quad b+c = \frac{5}{18}, \quad a+c = \frac{5}{36}$$

Zbrajanjem svih jednadžbi imamo $2(a+b+c) = \frac{10}{12}$, odakle dobijemo $a+b+c = \frac{5}{12}$.

S obzirom da je $a + b = a + b + c$, slijedi da je $c = 0$. To međutim ne može vrijediti jer je $c = \frac{1}{z}$. Stoga sustav nema rješenja.

Napomena. Ako u brojniku treće jednadžbe umjesto 5 napišemo 13, sustav ima lijepa rješenja. Nikad nećemo znati je li to možda trebalo pisati u zadatku ...

Zadatak S-4.3. [20 bodova]

Odredi sve proste brojeve p i q takve da p dijeli $q^2 - 4$ i q dijeli $p^2 - 1$.

Rješenje.

Pretpostavimo najprije da je $p \leq q$, tada je $q > p - 1$ pa iz $q \mid (p - 1)(p + 1)$ znamo da je $q = p + 1$ pa su jedini prosti p, q ovdje $(2, 3)$, ali uvrštavanjem vidimo da to ne vrijedi jer 2 ne dijeli $3^2 - 4$.

Sada neka je $p > q$, tada je $p > q - 2$ pa iz $p \mid (q - 2)(q + 2)$ slijedi $q - 2 = 0$ ili $p = q + 2$. U prvom slučaju vidimo da vrijedi bilo koji $p > 2$, a u drugom slučaju imamo da $q \mid (q + 2)^2 - 1$ odnosno $q \mid 3$ pa je u tom slučaju rješenje $(5, 3)$.

Sva rješenja za (p, q) su $(5, 3)$, $(p, 2)$ za $p > 2$.

Zadatak S-4.4. [25 bodova]

Neka je ABC jednakokračan trokut u kojem je $|AB| = |AC|$. Tangenta na opisanu kružnicu k trokuta ABC , paralelna s $\overline{BC}$, dodiruje kružnicu k u točki E , gdje je $E \neq A$, i siječe pravac AB u točki D .

Neka je F presjek dužine $\overline{CD}$ s kružnicom k . Ako je F središte upisane kružnice trokuta BDE , odredi kutove trokuta ABC .

Rješenje.

Napomena. Konfiguracija iz uvjeta zadatka je nemoguća: točka F ne može biti središte upisane kružnice trokuta BDE . Stoga se zadatak proglašava nevažećim i svi natjecatelji na njemu ostvaruju sve bodove. U nastavku je rješenje koje bi bilo ispravno kad bi konfiguracija bila moguća.

Nazovimo $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle CBA = \beta$. Kako su BC i DE paralelni, vrijedi $\sphericalangle EDB = \beta$.

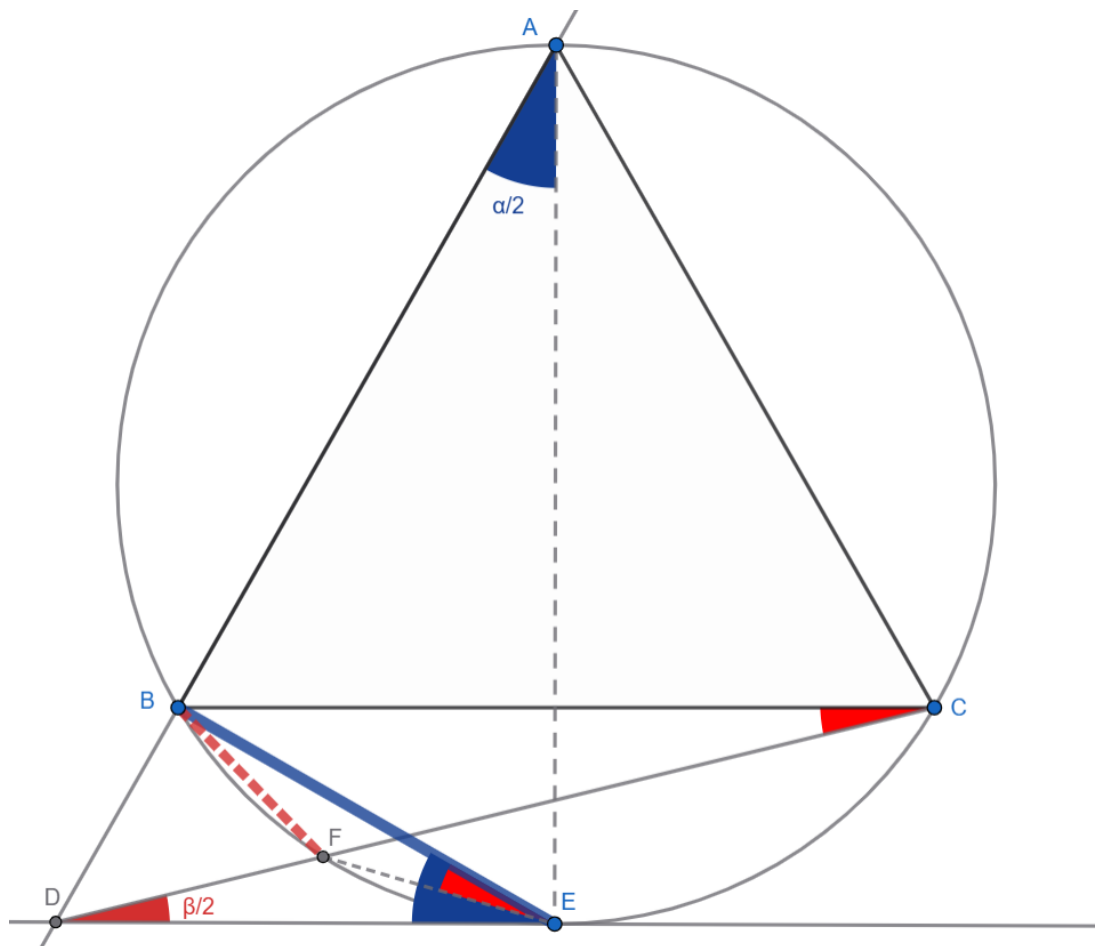
Kako je trokut ABC jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$, jasno je da je pravac AE simetrala kuta $\sphericalangle BAC = \alpha$. Kut $\sphericalangle BED$ je kut između tangente DE i tetive BE pa je jednak obodnom kutu nad tetivom BE , dakle $\sphericalangle BED = \frac{\alpha}{2}$ (prema poučku o kutu između tetive i tangente).

Kutovi $\sphericalangle BEF$ i $\sphericalangle BCF$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{BF}$, pa su jednaki. Kako je $BC \parallel DE$, vrijedi i $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BCF$, kao kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca.

Ako bi sada točka F bila središte upisane kružnice trokuta BDE , trebalo bi vrijediti

$$\frac{\beta}{2} = \sphericalangle EDF = \sphericalangle BCF = \sphericalangle BEF = \frac{\alpha}{4}.$$

Iz toga slijedi $\alpha = 2\beta$, iz čega proizlazi $\alpha = 90^\circ$ i $\beta = 45^\circ$. No, ponovno, ta situacija nije moguća jer središte upisane kružnice trokuta BDE **nije** na kružnici opisanoj trokutu ABC .



Zadatak S-4.5. [30 bodova]

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je broj $n^2 + 2^n$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

Neka je k prirodan broj tak da je $n^2 + 2^n = k^2$.

Prebacivanjem n^2 na drugu stranu i korištenjem formule za razliku kvadrata imamo da je

$$2^n = k^2 - n^2 = (k - n)(k + n).$$

Budući da je desna strana gornje jednakosti potencija broja 2 slijedi da svaki od faktora $(k - n)$ i $(k + n)$ također mora biti potencija broja 2, tj. postoje nenegativni cijeli brojevi a i b takvi da je $k - n = 2^a$ i $k + n = 2^b$.

Kako je $k + n > k - n$ slijedi da je $b > a$. Time sada redom imamo da je

$$k - n = 2^a \mid 2^b = k + n.$$

Kako $k - n \mid k + n$ imamo da također vrijedi i

$$k - n \mid (k + n) - (k - n) = 2n$$

iz čega slijedi da mora biti $k - n \leq 2n$, odnosno da je $k \leq 3n$.

Korištenjem nejednakosti $k \leq 3n$ u početnoj jednadžbi redom imamo

$$n^2 + 2^n = k^2 \leq 9n^2$$

$$2^n \leq 8n^2$$

$$2^{n-3} \leq n^2.$$

Uočimo da za $n = 10$ imamo $2^7 = 128 > 100 = 10^2$.

Nadalje, 2^{n-3} je eksponencijalna funkcija što brže raste od funkcije n^2 koja je kvadratna funkcija. Zato imamo da za $n \geq 10$ vrijedi $2^{n-3} > n^2$.

Dakle, $n \geq 10$ sigurno nije rješenje zadatka pa nam preostaje još provjeriti brojeve $n \leq 9$.

Direktnom provjerom vidimo da jedino za $n = 6$ dobijemo da je $n^2 + 2^n$ kvadrat prirodnog broja.

Dakle, jedini rješenje zadatka je $n = 6$.

Zadatak S-4.6. [35 bodova]

Neka je $P(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima, stupnja $n \geq 5$ i s pozitivnim vodećim koeficijentom takav da je $P(0) = 0$ te da ima točno n različitih cjelobrojnih nultočaka.

Dokaži da su sve cjelobrojne nultočke polinoma $P(P(x))$ ujedno i nultočke polinoma $P(x)$.

Rješenje.

Iz $P(0) = 0$ imamo da je 0 jedna od nultočki polinoma $P(x)$. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ preostale cjelobrojne nultočke polinoma $P(x)$.

Polinom $P(x)$ sada možemo zapisati kao

$$P(x) = ax(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})$$

pri čemu je a vodeći koeficijent polinoma $P(x)$.

Uvrštavanjem $P(x)$ umjesto x u prethodnu jednakost slijedi da je

$$P(P(x)) = aP(x)(P(x) - x_1)(P(x) - x_2) \cdots (P(x) - x_{n-1}).$$

Iz gornjeg slijedi da su sve nultočke polinoma $P(x)$ ujedno i nultočke polinoma $P(P(x))$.

Pretpostavimo da postoji cjelobrojna nultočka y polinoma $P(P(x))$ koja nije nultočka od $P(x)$, tj. $y \neq 0, x_1, \dots, x_{n-1}$.

Kako je $P(P(y)) = 0$ i $P(y) \neq 0$ slijedi da je $P(y) = x_i$ za neki $i = 1, \dots, n-1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $i = 1$, odnosno da je $P(y) = x_1$.

Iz zapisa polinoma $P(x)$ preko njegovih nultočaka tada imamo da vrijedi

$$ay(y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_{n-1}) = x_1.$$

Kako su $y, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ međusobno različiti cijeli brojevi i $n \geq 5$ imamo da je

$$|(y - x_2)(y - x_3)(y - x_4) \cdots (y - x_{n-1})| \geq |(-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdots (y - x_{n-1})| \geq 2.$$

Prema tome imamo da je

$$|x_1| \geq a \cdot 2|y(y - x_1)|.$$

Budući da je $y \neq 0, x_1$ primjenom nejednakosti $mn \geq m + n - 1$ koja vrijedi za sve prirodne brojeve m i n redom dobivamo

$$|x_1| \geq 2a|y| \cdot |y - x_1| \geq 2(|y| + |y - x_1| - 1) \geq 2(|x_1| - 1).$$

Iz gornjeg slijedi da mora biti $|x_1| \leq 2$.

Imamo da je $x_1 \neq 0$. Nadalje, kako je

$$x_1 = ay(y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_{n-1})$$

i $y, y - x_1, \dots, y - x_{n-1}$ je $n \geq 5$ međusobno različitih cijelih brojeva slijedi da $x_1 \neq \pm 1, \pm 2$. Kontradikcija!

Dakle, sve cjelobrojne nultočke polinoma $P(P(x))$ su ujedno i nultočke polinoma $P(x)$ što smo i trebali dokazati.

Zadatak S-4.7. [40 bodova]

Medvjedica Lina i medo Lino igraju sljedeću igru na školskoj ploči. Prvo Lina napiše konačno mnogo različitih prirodnih brojeva na ploču. Nakon toga Lino može raditi sljedeće poteze s brojevima koji se trenutno nalaze na ploči:

- (i) može zamijeniti bilo koji par brojeva n i $n + 1$ na ploči brojem $n - 2$
- (ii) može zamijeniti bilo koji par brojeva n i $n + 4$ brojem $n - 1$.

Lino može raditi gornje poteze koliko god puta želi (i može). Tijekom igre na ploči se mogu pojaviti negativni brojevi te se brojevi na ploči mogu ponavljati.

Postoji li najmanji broj koji Lina i Lino mogu dobiti na ploči igranjem ove igre? Ako postoji, odredi ga.

Rješenje.

Odgovor: Najmanji broj koji Lina i Lino mogu postići je broj -3 .

Pokažimo da se broj -3 može postići.

Lina na ploču može zapisati brojeve 1, 2, 3, 4 i 5.

Lino u prvom koraku može primjeniti potez (i) na brojeve 4 i 5. Time se nakon toga na ploči nalaze brojevi 1, 2, 3 i 2. Nakon toga Lino može ponovo primjeniti potez (i) na brojeve 2 i 4. Nakon toga se na ploči redom nalaze brojevi 1, 2, 0. Ponovno primjenom poteza (i) na brojeve 1 i 2 na ploči ostanu brojevi -1 i 0. Konačno, primjenom poteza (i) na preostale brojeve Lino dobiva broj -3 .

Dokažimo sada da se na ploči nikad ne može pojaviti broj manji od -3 .

Neka je L konačan skup brojeva koje je Lina napisala na ploču.

Odredit ćemo realan broj x za koji ćemo moći svakom broj $k \in L$ pridružiti težinu x^k tako da se ukupna težina $\sum_{n \in L} x^n$ svih brojeva na ploči ne promijeni nakon što Lino napravi potez (i) ili (ii).

Potezom (i) ukupna težina na ploči se promijeni za $x^{n-2} - x^n - x^{n+1}$ za neki $n \in L$. pa želimo da za naš broj x vrijedi

$$\begin{aligned}x^{n-2} - x^n - x^{n+1} &= 0, \\1 - x^2 - x^3 &= 0.\end{aligned}$$

Promotrimo polinom $P(t) = t^3 + t^2 - 1$. Iz gornjeg imamo da naš broj x mora biti nultočka polinoma $P(t)$. Kako je $P(0) = -1$ i $P(1) = 1$ slijedi da postoji nultočka polinoma $P(t)$ u intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Stavimo da je naš broj x upravo ta nultočka polinoma $P(t)$.

Promotrimo još promjenu težina nakon poteza (ii). Neka je Lino napravio potez na brojevima n i $n + 4$. Tada imamo da je promjena u težinama upravo

$$x^{n-1} - x^n - x^{n+4} = x^{n-1}(1 - x - x^5) = x^{n-1}(x^2 - x + 1)(1 - x^2 - x^3) = 0$$

što smo i htjeli postići.

Dakle, ovako definiranim brojem x zaista možemo postići da se ukupna težina $\sum_{n \in L} x^n$ ne mijenja nakon što se napravi neki od mogućih poteza.

Uočimo sada da za ukupnu težinu svih brojeva na ploči vrijedi

$$\sum_{n \in L} x^n < \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = x^{-4}.$$

Pretpostavimo da se u nekom trenutku na ploči nalazi broj $k \leq -4$. Kako je $0 < x < 1$ i kako je ukupna težina svih brojeva na ploči očuvana slijedi

$$\sum_{n \in L} x^n \geq x^k \geq x^{-4}$$

što dovodi do kontradikcije s prethodnom nejednakosti $\sum_{n \in L} x^n < x^{-4}$.

Time smo pokazali da se na ploči ne mogu pojaviti brojevi manji od -3 .

Dakle, -3 je zaista najmanji broj kojeg Lina i Lino mogu postići.

Zadatak S-4.8. [45 bodova]

Četverokutu $ABCD$ upisana je kružnica k . Neka je točka O sjecište pravaca AB i CD . Neka je k_1 kružnica koja dira stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, a k_2 kružnica koja dira stranicu $\overline{AD}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Neka je K točka u kojoj k_1 dira $\overline{BC}$ i L točka u kojoj k_2 dira $\overline{AD}$.

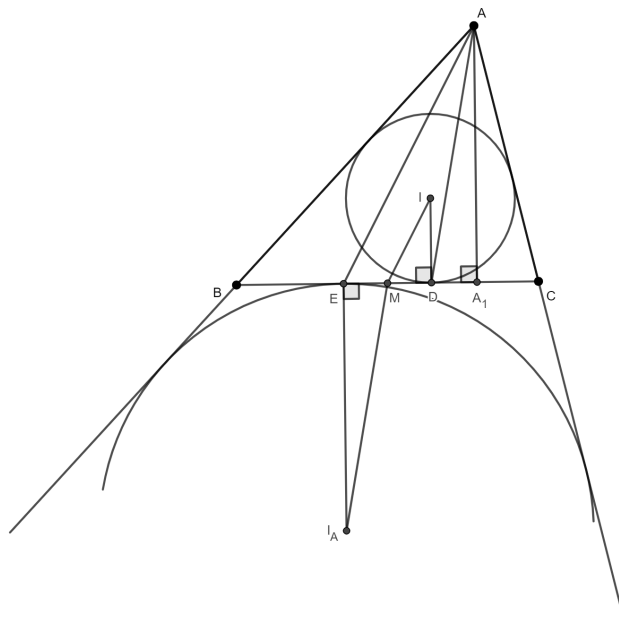
Pretpostavimo da se točke O , K i L nalaze na istom pravcu. Dokaži da se tada polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ te središte kružnice k također nalaze na istom pravcu.

Rješenje.

Dokažimo najprije sljedeću tvrdnju.

Lema: Neka je I središte upisane kružnice k trokuta ABC , a I_A središte pripisane kružnice trokuta ABC nasuprot vrha A . Kružnice k i k_A redom diraju stranicu $\overline{BC}$ u točkama D i E . Neka je točka M polovište stranice $\overline{BC}$. Tada vrijedi:

- (i) Pravci MI i AE su paralelni.
- (ii) Pravci MI_A i AD su paralelni.



Dokaz leme:

- (i) Označimo s a , b i c redom duljine stranica trokuta ABC nasuprot vrhova A , B i C , a sa α , β i γ mjere kutova u vrhovima A , B i C . Neka je r polumjer upisane kružnice k te neka je A_1 nožište visine iz vrha A u trokutu ABC i neka je v_a duljina visine $\overline{AA_1}$.

Tvrdnja očito vrijedi ako je $b = c$ jer se u tom slučaju sve točke nalaze na istom pravcu. Zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b < c$. U tom slučaju imamo da se točka E nalazi između točaka B i M , a točka D između točaka M i C .

Da bi dokazali da su pravci MI i AE paralelni dovoljno nam je dokazati da su trokuti MDI i EA_1A slični.

Budući da su oba trokuta pravokutna za dokazati gornju sličnost nam je dovoljno pokazati da vrijedi omjer

$$\frac{|ID|}{|AA_1|} = \frac{|DM|}{|A_1E|}.$$

Imamo da je

$$\frac{|ID|}{|AA_1|} = \frac{r}{v_a}.$$

Izračunajmo duljine dužina $\overline{DM}$ i $\overline{A_1E}$.

Redom imamo

$$|DM| = |CM| - |CD| = \frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-b}{2}.$$

Iz trigonometrije pravokutnog trokuta AA_1C i kosinusovog poučka u trokutu ABC redom imamo

$$|A_1C| = b \cos \gamma = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Tim sada možemo izračunati duljinu dužine $\overline{A_1E}$

$$|A_1E| = |CE| - |A_1C| = \frac{a+c-b}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{(c-b)(a+b+c)}{2a}.$$

Konačno imamo da je

$$\frac{|DM|}{|A_1E|} = \frac{a}{a+b+c}.$$

Dakle, dovoljno nam je dokazati da vrijedi

$$\frac{r}{v_a} = \frac{a}{a+b+c},$$

odnosno da vrijedi

$$av_a = r(a+b+c).$$

Međutim, iz formule za površinu trokuta ABC i radijus upisane kružnice r trokuta ABC imamo da vrijedi

$$av_a = 2P(ABC) = r(a+b+c).$$

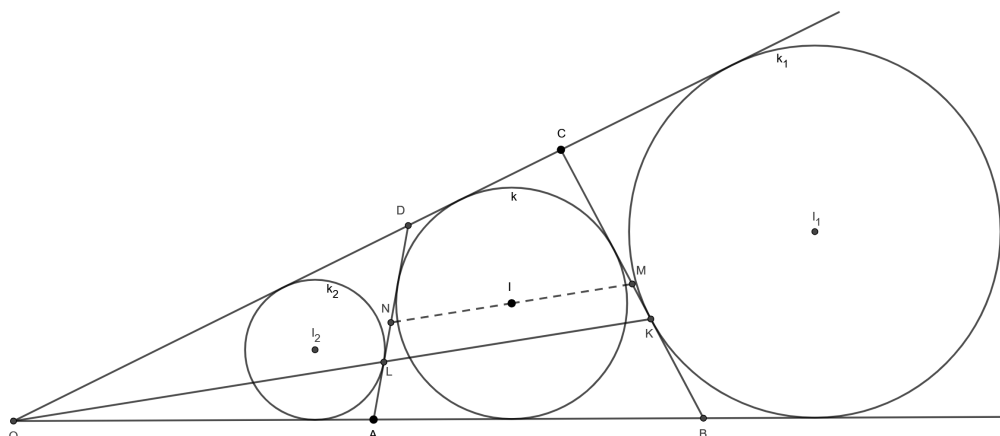
Dakle, trokuti MDI i EA_1A su zaista slični te time slijedi da su pravci MI i AE paralelni.

- (ii) Analognim računom kao u (i) se dokaže da su trokuti MEI_A i DA_1A slični iz čega slijedi da su pravci MI_A i AD paralelni.

Vratimo se sada na početni zadatak.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se točka O nalazi na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha A , a na produžetku stranice $\overline{CD}$ preko vrha D .

Neka su I , I_1 i I_2 redom središta kružnica k , k_1 i k_2 te neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.



Uočimo da je k_2 upisana kružnica trokuta OAD , a k pripisana kružnica trokuta OAD nasuprot vrha O .

Primjenom Leme na trokut OAD iz tvrdnja (ii) zaključujemo da su pravci IN i OL paralelni.

Nadalje, k je upisana kružnica trokuta OBC , a k_1 je pripisana kružnica trokuta OBC nasuprot vrha O .

Ponovnom primjenom Leme na trokut OBC iz tvrdnje (i) dobivamo da su pravci IM i OK paralelni.

Budući da se točke O , K i L nalaze na istom pravcu iz prethodnih paralelnosti slijedi da su pravci IM i IN međusobno paralelni.

Međutim, kako pravci IM i IN imaju zajedničku točku I te su međusobno paralelni slijedi da je zapravo riječ o istim pravcima, tj. točke I , M i N se nalaze na istom pravcu što smo i trebali dokazati.