

MEDO 2025./2026.

Treće kolo

17.1.2026.

Kadeti (5. i 6. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak K-3.1. [10 bodova]

Šest pasa ima veću masu od deset mačaka. Što ima veću masu: dva psa ili tri mačke?

Rješenje.

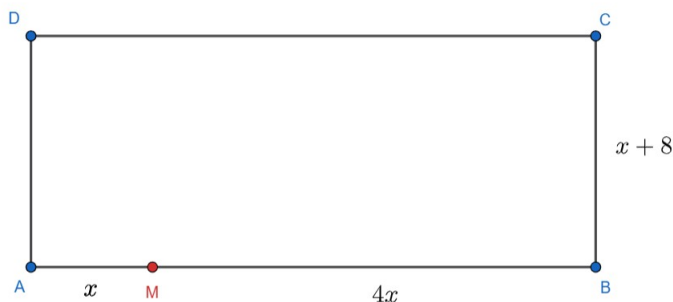
Budući da šest pasa ima veću masu od deset mačaka, šest pasa sigurno ima veću masu od devet mačaka. Tada i tri puta manje pasa ima veću masu od tri puta manje mačaka, tj. dva psa imaju veću masu od tri mačke.

Zadatak K-3.2. [15 bodova]

Dan je pravokutnik $ABCD$ čiji je opseg 64 cm. Na stranici $\overline{AB}$ istaknuta je točka M takva da je duljina $|AM|$ za 8 cm manja od duljine $|BC|$, a duljina $|MB|$ je četiri puta veća od duljine $|AM|$.

Izračunaj površinu pravokutnika $ABCD$.

Rješenje.



Označimo $|AM| = x$. Tada je $|MB| = 4x$, što znači da je $|AB| = 5x$. Također je $|BC| = x + 8$.

Budući da je opseg pravokutnika jednak 64 cm, redom vrijedi:

$$\begin{aligned}2|AB| + 2|BC| &= 64 \\2 \cdot 5x + 2(x + 8) &= 64 \\10x + 2x + 16 &= 64 \\12x &= 48 \\x &= 4 \text{ cm}\end{aligned}$$

S obzirom na to da je $|AB| = 5x$, vrijedi $|AB| = 5 \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$, a $|BC| = x + 8$, imamo $|BC| = 4 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

Površina pravokutnika $ABCD$ je jednaka $|AB| \cdot |BC| = 20 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^2$.

Zadatak K-3.3. [20 bodova]

Zgrade u gradskim ulicama označene su brojevima. Od početka ulice zgrade s lijeve strane označavaju se neparnim brojevima 1, 3, 5, ..., a s desne strane parnim brojevima 2, 4, 6,

U zapisu svih brojeva s lijeve strane jedne ulice nalazi se 26 znamenki 3 i 24 znamenke 5. U zapisu svih brojeva s desne strane iste ulice nalazi se 26 znamenki 2 i 9 znamenki 5. Koliko je ukupno zgrada u toj ulici?

Rješenje.

Promatrajmo najprije desnu stranu ulice na kojoj su zgrade označene parnim brojevima. Budući da se znamenka 5 pojavljuje samo 9 puta, prvo ćemo provjeriti koji je zadnji broj na desnoj strani koji sadrži znamenku 5. Kako je 5 neparna znamenka, za označavanje parnih brojeva trebat će nam samo kao znamenka desetica. Dvoznamenkastih parnih brojeva koji sadrže znamenku 5 ima pet, a to su:

50, 52, 54, 56, 58.

Vidimo da se u takvima znamenka 5 pojavljuje točno pet puta pa su nam ostale četiri znamenke 5 koje su korištene u zapisivanju troznamenkastih brojeva. Ponovno ju pronalazimo samo kao znamenku desetica i najmanja četiri broja koja ju sadrže su

150, 152, 154, 156.

Zaključujemo da ulica ima barem 156 zgrada. Preostaje nam provjeriti ima li ih 156 ili 157. Ako bi ulica imala i zgradu označenu brojem 158, tada bi se na desnoj strani pojavilo 10 znamenki 5. Primijetimo da iz informacije o broju znamenki 2 ne možemo zaključiti ništa o tome je li broj zgrada 156 ili 157.

Promotrimo sada brojeve na lijevoj strani ulice, označene neparnim brojevima, te ponovno prebrojimo znamenke 5. Kako je 5 neparna znamenka, na lijevoj strani potrebna nam je barem za označavanje svih brojeva koji na mjestu jedinica imaju znamenku 5. Takvih brojeva manjih od 100 ima ukupno 10:

5, 15, 25, ..., 95.

Osim toga, potrebna nam je za označavanje neparnih brojeva koji na mjestu desetice imaju znamenku 5:

51, 53, 55, 57, 59.

Za takve brojeve manje od 100 iskorišteno je još pet znamenaka 5 (znamenku jedinica u broju 55 već smo brojali u prvom dijelu). Sveukupno zato imamo $10 + 5 = 15$ znamenaka 5 na lijevoj strani ceste koje su se iskoristile za označavanje jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva. Dakle, još $24 - 15 = 9$ ih je u zapisu troznamenkastih neparnih brojeva. Ponovno promatramo znamenke jedinica. Za troznamenkaste brojeve manje od 150 znamenka 5 se na mjestu jedinica pojavljuje u sljedećih pet brojeva:

105, 115, 125, 135, 145.

Ostalo nam je još $9 - 5 = 4$ znamenaka 5. Preostaje nam zapisati dalje neparne brojeve koji imaju ukupno četiri znamenke 5, a to su

151, 153, 155.

Sada možemo zaključiti da ulica ima barem 155 zgrada. Ako bi imala 157 zgrada, na lijevoj strani ulice znamenka 5 bi se u zapisu pojavila 25 puta. Dakle, ulica ne može imati 157 zgrada pa zaključujemo da je u toj ulici ukupno 156 zgrada.

Zadatak K-3.4. [25 bodova]

Za koje će vrijeme tri radnika završiti neki posao radeći zajedno ako bi ga prvi završio sam za 4 sata, drugi za 5 sati, a treći za 20 sati?

Prvo rješenje.

Trećem radniku treba 5 puta više nego prvom radniku da bi završio posao, odnosno sporiji je 5 puta, pa zaključujemo da u nekom vremenu prvi radnik napravi 5 puta više posla od trećeg radnika. Slično, drugi radnik u tom istom vremenu napravi 4 puta više posla od trećeg radnika. Ako bi svi radili 20 sati, treći bi radnik obavio jedan cijeli posao, prvi radnik obavio bi 5 poslova, a drugi radnik 4 cijela posla. Sve skupa, u 20 sati napravili bi 10 puta cijeli posao. Ako im zajedno treba 20 sati za 10 poslova, jedan cijeli posao obavili bi u 10 puta manje vremenu, odnosno u 2 sata.

Drugo rješenje.

Podijelimo posao na 20 jednakih dijelova. Kako trećem radniku treba 20 sati da obavi svih 20 dijelova posla, u jednom satu treći radnik obavi jedan takav dio (na slici dolje označeno crvenom bojom). Trećem radniku treba 5 puta više nego prvom radniku da bi završio posao, odnosno sporiji je 5 puta, pa zaključujemo da u jednom satu prvi radnik napravi 5 puta više posla od trećeg radnika. Prvi radnik tada u jednom satu obavi 5 dijelova posla, označimo to na slici dolje zelenom bojom. Slično, drugi radnik u jednom satu napravi 4 puta više posla od trećeg radnika, tj. 4 dijela posla koje smo na slici dolje označili plavom bojom.

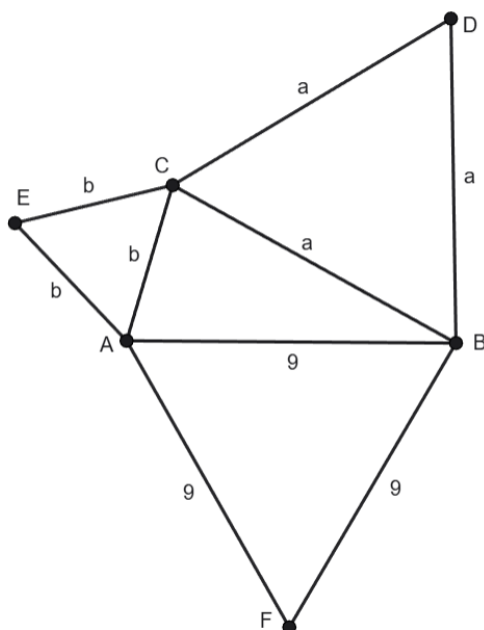
Uočimo da su u jednom satu svi trojica zajedno obavili točno pola cijelog posla pa zaključujemo da im za obavljanje cijelog posla zajedno treba 2 sata.

Zadatak K-3.5. [30 bodova]

S vanjske strane trokuta ABC nacrtani su jednakokranični trokuti CBD , ACE i BAF .

Koliko ima različitih mogućnosti za duljine stranica trokuta ABC ako se zna da su sve tri duljine prirodni brojevi te da opseg trokuta BAF iznosi 27, a opseg peterokuta $ABDCE$ iznosi 41?

Rješenje.



Opseg trokuta jednak je zbroju duljina svih stranica trokuta, a kako su stranice trokuta BAF sve jednake duljine, njegov opseg jednak je trostrukoj duljini stranice. Dakle, trostruka duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka je 27 pa je

$$|AB| = |AF| = |BF| = 9.$$

Uvedimo oznake i za duljine preostalih dužina:

$$a = |CB| = |BD| = |DC|$$

$$b = |CA| = |AE| = |EC|$$

Opseg peterokuta $ABDCE$ jednak je zbroju duljina svih njegovih stranica, odnosno imamo

$$9 + a + a + b + b = 41.$$

Zaključujemo da je $2a + 2b = 41 - 9 = 32$, odnosno $a + b = 16$. Sada znamo da je jedna stranica trokuta ABC duljine 9, a zbroj preostale dvije jednak je 16. Kako su sve duljine stranica prirodni brojevi, možemo ispisati mogućnosti za a i b :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Primijetimo da je $b + c > a$ za sve mogućnosti. Međutim, u nekoliko slučajeva ne vrijedi $a + c > b$ ili $b + c > a$ i trokuti s takvim duljinama stranica nisu mogući. Naime, u trokutu uvijek mora vrijediti da je zbroj duljina dviju stranica veći od duljine preostale stranice. To pravilo nazivamo **nejednakost trokuta**, a ono slijedi iz činjenice da je najkraći put između dvije točke dužina koja ih spaja. U sljedećoj tablici crvenom su bojom označeni zbrojevi koji nisu veći od duljine preostale stranice označene žutom bojom:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$a + c$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$b + c$	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

Neoznačeni stupci daju nam 9 mogućnosti za duljine stranica a i b , od kojih su neke međusobno simetrične. Ako zanemarimo oznake, vidimo da imamo 5 različitih mogućnosti za duljine stranica trokuta ABC :

1. 4, 12, 9
2. 5, 11, 9
3. 6, 10, 9
4. 7, 9, 9
5. 8, 8, 9.

Zadatak K-3.6. [35 bodova]

Prirodan broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, a podijeljen s 15 daje ostatak 7.

Koji su mogući ostatci pri dijeljenju broja n s 30?

Rješenje.

Budući da broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, on se može zapisati u obliku $n = 6k + 4$, gdje je k prirodni broj ili 0. Također, budući da n pri dijeljenju s 15 daje ostatak 7, može se zapisati kao $n = 15\ell + 7$, gdje je ℓ prirodni broj ili 0. Primijetimo da mora vrijediti $k > \ell$.

Tražimo ostatak pri dijeljenju s 30 pa ćemo prvi izraz pomnožiti s 5, a drugi izraz s 2 te tako dobivamo $5n = 30k + 20$ i $2n = 30\ell + 14$.

Oduzmemo od prve jednakosti drugu i redom dobivamo:

$$\begin{aligned} 5n - 2n &= 30k + 20 - (30\ell + 14) \\ 3n &= 30k - 30\ell + 20 - 14 \\ 3n &= 30(k - \ell) + 6 \end{aligned}$$

Podijelimo sve članove ove jednakosti s 3 i dobivamo $n = 10(k - \ell) + 2$.

Budući da je $(k - \ell)$ prirodan broj, slijedi da broj n pri dijeljenju s 10 daje ostatak 2, a to znači da je njegova zadnja znamenka 2.

Zaključujemo da n pri dijeljenju s 30 može dati ostatak 2, 12 ili 22. Provjerimo ove mogućnosti. Zapišimo $n = 30m + r$, gdje je m prirodan broj ili 0.

Ako je $r = 2$, izjednačimo $n = 15\ell + 7$ i $n = 30m + 2$ pa imamo

$$\begin{aligned}15\ell + 7 &= 30m + 2 \\7 &= 30m - 15\ell + 2 \\5 &= 30m - 15\ell\end{aligned}$$

Uočimo da lijeva strana jednakosti nije djeljiva sa 15, a desna jest, stoga ovaj slučaj nije moguć.

Ako je $r = 12$, tada je $n = 30m + 12$, što je djeljivo s 6. No, iz uvjeta zadatka vrijedi da n pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, tako da ovaj slučaj otpada.

Ostaje slučaj $r = 22$. Treba provjeriti postoji li takav n za koji je $n = 30m + 22$. Ako stavimo $m = 1$, tada je $n = 52$. On pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, a pri dijeljenju s 15 ostatak 7 tako da su svi uvjeti zadatka zadovoljeni. Dakle, jedini mogući ostatak pri dijeljenju broja n s 30 je 22.

Zadatak K-3.7. [40 bodova]

Ime i prezime svakog učenika jedne škole zapisano je na zasebnoj ceduljici i ubačeno u kutiju. Lovro nasumce izvadi određeni broj ceduljica iz kutije, izbroji ih te bez gledanja imena i prezimena napisanih na njima kaže: „Sa sigurnošću mogu reći da među učenicima čija imena i prezimena su zapisana na izvađenim ceduljicama postoji dvoje koji imaju rođendan istog dana.”

Livia tada prebroji preostale papiriće u kutiji (bez gledanja imena) i kaže: „A ja sa sigurnošću mogu reći da među učenicima čija imena i prezimena su ostala u kutiji sigurno postoji troje učenika koji imaju rođendan istog dana.”

Ako su Lovro i Livia doista u pravu, koliki je najmanji broj učenika te škole?

Ne postoje dva učenika u školi koji imaju isto ime i prezime. Uzimamo u obzir da učenici mogu biti rođeni i 29. veljače, dakle smatramo da godina ima 366 dana.

Rješenje.

Kako godina ima 366 dana, ako Lovro izvuče 366 papirića može se dogoditi da svi učenici čija su imena na izvučenim papirićima imaju rođendan različitog dana, odnosno da ne postoji dvoje učenika koji imaju rođendan istog dana. Ako izvuče još samo jedan papirić, tj. ukupno 367, može biti siguran da barem dvoje učenika ima rođendan istog dana. Dakle, Lovro iz kutije mora izvući barem 367 papirića.

Slično, ako je u kutiji ostalo $366 \cdot 2 = 732$ papirića, može se dogoditi da svakog dana u godini rođendan ima točno dvoje učenika čija imena su na papirićima koji su ostali u kutiji. Međutim, ako je u kutiji još jedan papirić, Livia može biti sigurna da među učenicima čija imena su na papirićima koji su ostali u kutiji postoji barem troje koji imaju rođendan istog dana. Dakle, u kutiji mora ostati barem $366 \cdot 2 + 1 = 733$ papirića.

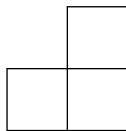
Zaključujemo da je najmanji broj učenika te škole $367 + 733 = 1100$.

Napomena. U ovom zadatku koristili smo jednostavno logičko-matematičko pravilo koje je poznato i pod imenom *Dirichletov princip*. Ono nam ilustrativno kaže da ako imamo $n + 1$ predmet koji želimo smjestiti u n kutija, tada će sigurno u nekoj kutiji biti barem dva predmeta. U našem slučaju, „kutije” su dani u godinu, a „predmeti” su rođendani učenika.

Zadatak K-3.8. [45 bodova]

Za koje se prirodne brojeve n pravokutna ploča dimenzija $n \times 9$ može potpuno prekriti *L-triominima* pločicama (kao na slici) tako da se one međusobno ne preklapaju?

Pločice se mogu rotirati.



Rješenje.

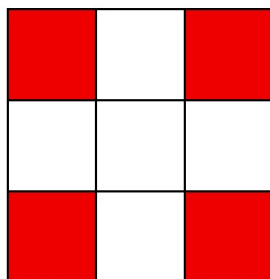
Promatrajmo ploču za male n -ove. Za $n = 1$ očito nema rješenja jer svaka L-triominom pločica pokriva polja u dva reda.

Za $n = 2$, ploča 2×9 se može pokriti na način kao na slici:



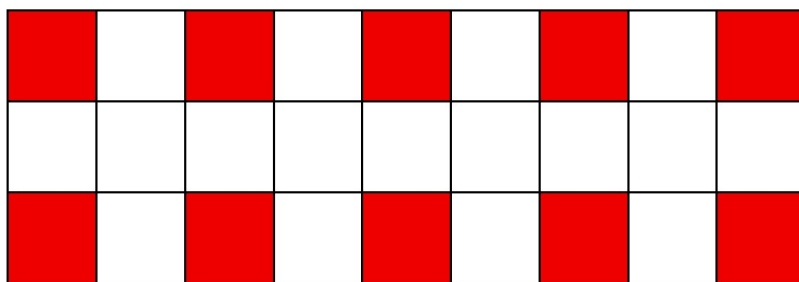
Sada možemo zaključiti i da se ploča $2k \times 9$, za $k \in \mathbb{N}$, može popločati L-triominom pločicama jer možemo spojiti k ploča dimenzija 2×9 , tj. moguće je svako popločavanje kada je n paran broj.

Promatrajmo ploču 3×9 . Da bismo došli do nekog zaključka, promatrimo najprije manju 3×3 ploču.

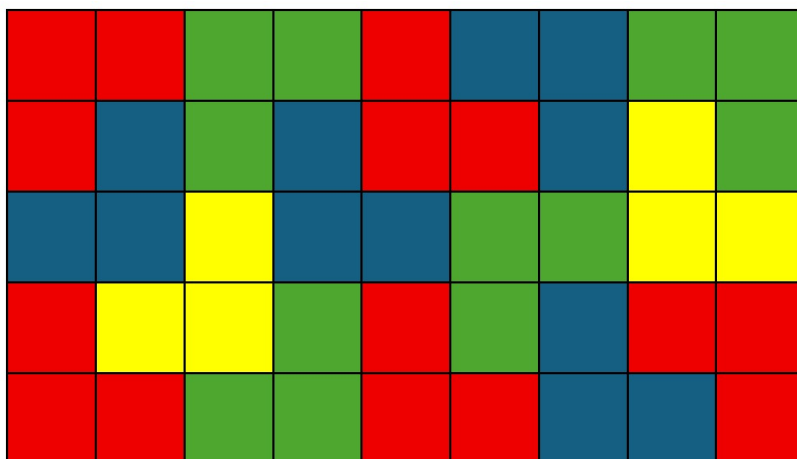


Primijetimo da je za popločavanje svakog označenog polja potrebna zasebna L-triominom pločica, jer jedna L-triominom pločica ne može istovremeno pokriti neka dva od tih polja. Dakle, trebale bi nam najmanje 4 L-triominom pločice, ali one pokrivaju ukupno 12 polja, stoga je popločavanje 3×3 ploče nemoguće.

Analogno tome, za pokrivanje označenih polja na slici unutar 3×9 ploče trebalo bi nam 10 L-triominom pločica koje pokrivaju ukupno 30 polja, ali 3×9 ploča ima samo 27 polja.

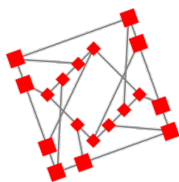


Pokušajmo sada popločati ploču 5×9 . To popločavanje je moguće, prikažimo ga:



Budući da je moguće ovo popločavanje, sada je moguće i svako popločavanje ploče dimenzija $(2k+1) \times 9$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, jer možemo spojiti ploču 5×9 i bilo koji broj ploča 2×9 . Drugim riječima, moguće je svako popločavanje kad je n neparan broj veći od 3.

Zaključujemo da se može popločati svaka ploča dimenzija $n \times 9$ za $n \geq 2$, $n \neq 3$.



MEDO 2025./2026.

Treće kolo

17.1.2026.

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak J-3.1. [10 bodova]

Zgrade u gradskim ulicama označene su brojevima. Od početka ulice zgrade s lijeve strane označavaju se neparnim brojevima 1, 3, 5, ..., a s desne strane parnim brojevima 2, 4, 6, ...

U zapisu svih brojeva s lijeve strane jedne ulice nalazi se 26 znamenki 3 i 24 znamenke 5. U zapisu svih brojeva s desne strane iste ulice nalazi se 26 znamenki 2 i 9 znamenki 5. Koliko je ukupno zgrada u toj ulici?

Rješenje.

Promatrajmo najprije desnu stranu ulice na kojoj su zgrade označene parnim brojevima. Budući da se znamenka 5 pojavljuje samo 9 puta, prvo ćemo provjeriti koji je zadnji broj na desnoj strani koji sadrži znamenku 5. Kako je 5 neparna znamenka, za označavanje parnih brojeva trebat će nam samo kao znamenka desetica. Dvoznamenkastih parnih brojeva koji sadrže znamenku 5 ima pet, a to su:

50, 52, 54, 56, 58.

Vidimo da se u takvima znamenka 5 pojavljuje točno pet puta pa su nam ostale četiri znamenke 5 koje su korištene u zapisivanju troznamenkastih brojeva. Ponovno ju pronalazimo samo kao znamenku desetica i najmanja četiri broja koja ju sadrže su

150, 152, 154, 156.

Zaključujemo da ulica ima barem 156 zgrada. Preostaje nam provjeriti ima li ih 156 ili 157. Ako bi ulica imala i zgradu označenu brojem 158, tada bi se na desnoj strani pojavilo 10 znamenki 5. Primijetimo da iz informacije o broju znamenki 2 ne možemo zaključiti ništa o tome je li broj zgrada 156 ili 157.

Promotrimo sada brojeve na lijevoj strani ulice, označene neparnim brojevima, te ponovno prebrojimo znamenke 5. Kako je 5 neparna znamenka, na lijevoj strani potrebna nam je barem za označavanje svih brojeva koji na mjestu jedinica imaju znamenku 5. Takvih brojeva manjih od 100 ima ukupno 10:

5, 15, 25, ..., 95.

Osim toga, potrebna nam je za označavanje neparnih brojeva koji na mjestu desetice imaju znamenku 5:

51, 53, 55, 57, 59.

Za takve brojeve manje od 100 iskorišteno je još pet znamenaka 5 (znamenku jedinica u broju 55 već smo brojali u prvom dijelu). Sveukupno zato imamo $10 + 5 = 15$ znamenaka 5 na lijevoj strani ceste koje su se iskoristile za označavanje jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva. Dakle, još $24 - 15 = 9$ ih je u zapisu troznamenkastih neparnih brojeva. Ponovno promatramo znamenke jedinica. Za troznamenkaste brojeve manje od 150 znamenka 5 se na mjestu jedinica pojavljuje u sljedećih pet brojeva:

105, 115, 125, 135, 145.

Ostalo nam je još $9 - 5 = 4$ znamenaka 5. Preostaje nam zapisati dalje neparne brojeve koji imaju ukupno četiri znamenke 5, a to su

151, 153, 155.

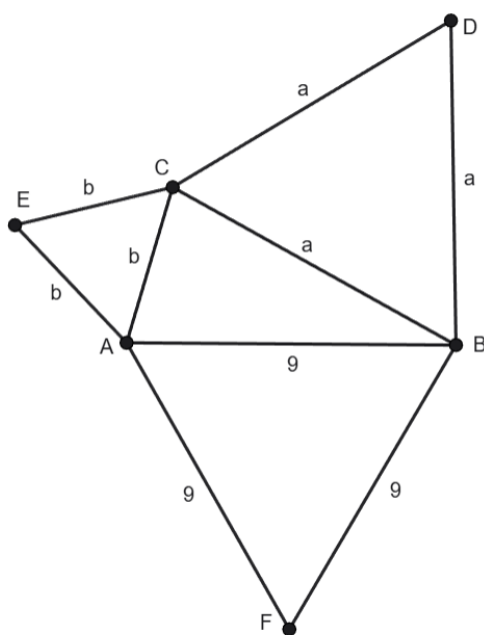
Sada možemo zaključiti da ulica ima barem 155 zgrada. Ako bi imala 157 zgrada, na lijevoj strani ulice znamenka 5 bi se u zapisu pojavila 25 puta. Dakle, ulica ne može imati 157 zgrada pa zaključujemo da je u toj ulici ukupno 156 zgrada.

Zadatak J-3.2. [15 bodova]

S vanjske strane trokuta ABC nacrtani su jednakostranični trokuti CBD , ACE i BAF .

Koliko ima različitih mogućnosti za duljine stranica trokuta ABC ako se zna da su sve tri duljine prirodni brojevi te da opseg trokuta BAF iznosi 27, a opseg peterokuta $ABDCE$ iznosi 41?

Rješenje.



Opseg trokuta jednak je zbroju duljina svih stranica trokuta, a kako su stranice trokuta BAF sve jednake duljine, njegov opseg jednak je trostrukoj duljini stranice. Dakle, trostruka duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka je 27 pa je

$$|AB| = |AF| = |BF| = 9.$$

Uvedimo oznake i za duljine preostalih dužina:

$$a = |CB| = |BD| = |DC|$$

$$b = |CA| = |AE| = |EC|$$

Opseg peterokuta $ABDCE$ jednak je zbroju duljina svih njegovih stranica, odnosno imamo

$$9 + a + a + b + b = 41.$$

Zaključujemo da je $2a + 2b = 41 - 9 = 32$, odnosno $a + b = 16$. Sada znamo da je jedna stranica trokuta ABC duljine 9, a zbroj preostale dvije jednak je 16. Kako su sve duljine stranica prirodni brojevi, možemo ispisati mogućnosti za a i b :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Primijetimo da je $b + c > a$ za sve mogućnosti. Međutim, u nekoliko slučajeva ne vrijedi $a + c > b$ ili $b + c > a$ i trokuti s takvim duljinama stranica nisu mogući. Naime, u trokutu uvijek mora vrijediti da je zbroj duljina dviju stranica veći od duljine preostale stranice. To pravilo nazivamo **nejednakost trokuta**, a ono slijedi iz činjenice da je najkraći put između dvije točke dužina koja ih spaja. U sljedećoj tablici crvenom su bojom označeni zbrojevi koji nisu veći od duljine preostale stranice označene žutom bojom:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$a + c$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$b + c$	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

Neoznačeni stupci daju nam 9 mogućnosti za duljine stranica a i b , od kojih su neke međusobno simetrične. Ako zanemarimo oznake, vidimo da imamo 5 različitih mogućnosti za duljine stranica trokuta ABC :

1. 4, 12, 9
2. 5, 11, 9
3. 6, 10, 9
4. 7, 9, 9
5. 8, 8, 9.

Zadatak J-3.3. [20 bodova]

Na raspolaganju imamo tri sokovnika za cijedenje naranči. Za cijedenje 7 kg naranči prvom je sokovniku potrebno 10 minuta, a drugom 15 minuta. Ako naranče istodobno cijedimo sa sva tri sokovnika, završit ćemo cijedenje za 5 minuta.

Koliko je vremena potrebno za cijedenje 7 kg naranči ako koristimo samo treći sokovnik, a koliko ako istodobno koristimo drugi i treći sokovnik?

Rješenje.

Prvom sokovniku potrebno je 10 minuta za cijedenje 7 kg naranči, pa u jednoj minuti ocijedi desetinu naranči, odnosno $\frac{7}{10}$ kg naranči. Slično, drugi sokovnik u jednoj minuti ocijedi $\frac{7}{15}$ kg naranči. Ako sva tri sokovnika cijede zajedno, potrebno je 5 minuta za 7 kg, pa u jednoj minuti ocijede $\frac{7}{5}$ kg naranči. Od tih $\frac{7}{5}$ kg naranči, prvi sokovnik ocijedio je $\frac{7}{10}$ kg, a drugi sokovnik $\frac{7}{15}$ kg. Dakle, treći sokovnik ocijedio je ostatak:

$$\frac{7}{5} \text{ kg} - \frac{7}{10} \text{ kg} - \frac{7}{15} \text{ kg} = \frac{7}{30} \text{ kg}.$$

Kako treći sokovnik ocijedi $\frac{7}{30}$ kg u jednoj minuti, zaključujemo da mu treba 30 minuta za cijedenje svih 7 kg.

Drugi i treći sokovnik u jednoj minuti ocijede

$$\frac{7}{15} \text{ kg} + \frac{7}{30} \text{ kg} = \frac{7}{10} \text{ kg},$$

pa im za istodobno cijedenje 7 kg treba 10 minuta.

Zadatak J-3.4. [25 bodova]

Prirodan broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, a podijeljen sa 15 daje ostatak 7.

Koji su mogući ostatci pri dijeljenju broja n sa 30?

Rješenje.

Budući da broj n podijeljen sa 6 daje ostatak 4, on se može zapisati u obliku $n = 6k + 4$, gdje je k prirodni broj ili 0. Također, budući da n pri dijeljenju sa 15 daje ostatak 7, može se zapisati kao $n = 15\ell + 7$, gdje je ℓ prirodni broj ili 0. Primijetimo da mora vrijediti $k > \ell$.

Tražimo ostatak pri dijeljenju s 30 pa ćemo prvi izraz pomnožiti s 5, a drugi izraz s 2 te tako dobivamo $5n = 30k + 20$ i $2n = 30\ell + 14$.

Oduzmemo od prve jednakosti drugu i redom dobivamo:

$$\begin{aligned} 5n - 2n &= 30k + 20 - (30\ell + 14) \\ 3n &= 30k - 30\ell + 20 - 14 \\ 3n &= 30(k - \ell) + 6 \end{aligned}$$

Podijelimo sve članove ove jednakosti s 3 i dobivamo $n = 10(k - \ell) + 2$.

Budući da je $(k - \ell)$ prirodan broj, slijedi da broj n pri dijeljenju s 10 daje ostatak 2, a to znači da je njegova zadnja znamenka 2.

Zaključujemo da n pri dijeljenju s 30 može dati ostatak 2, 12 ili 22. Provjerimo ove mogućnosti. Zapišimo $n = 30m + r$, gdje je m prirodan broj ili 0.

Ako je $r = 2$, izjednačimo $n = 15\ell + 7$ i $n = 30m + 2$ pa imamo

$$\begin{aligned} 15\ell + 7 &= 30m + 2 \\ 7 &= 30m - 15\ell + 2 \\ 5 &= 30m - 15\ell \end{aligned}$$

Uočimo da lijeva strana jednakosti nije djeljiva sa 15, a desna jest, stoga ovaj slučaj nije moguć.

Ako je $r = 12$, tada je $n = 30m + 12$, što je djeljivo s 6. No, iz uvjeta zadatka vrijedi da n pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, tako da ovaj slučaj otpada.

Ostaje slučaj $r = 22$. Treba provjeriti postoji li takav n za koji je $n = 30m + 22$. Ako stavimo $m = 1$, tada je $n = 52$. On pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, a pri dijeljenju s 15 ostatak 7 tako da su svi uvjeti zadatka zadovoljeni. Dakle, jedini mogući ostatak pri dijeljenju broja n s 30 je 22.

Zadatak J-3.5. [30 bodova]

Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{3}{3x-y+3} = \frac{7}{10} \\ \frac{3}{x+y} + \frac{1}{y-3x-3} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rješenje.

Uvodimo supstituciju $u = \frac{1}{x+y}$, $v = \frac{1}{3x-y+3}$.

Budući da je

$$\frac{1}{y-3x-3} = \frac{1}{-(3x-y+3)} = -\frac{1}{3x-y+3} = -v,$$

sustav postaje:

$$\begin{cases} 2u + 3v = \frac{7}{10} \\ 3u - v = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sada ovaj sustav možemo riješiti bilo kojom metodom, npr. metodom suprotnih koeficijenata: pomnožimo drugu jednadžbu s 3 i zbrojimo je s prvom jednadžbom pa dobivamo: $11u = \frac{22}{10}$, odakle je $u = \frac{1}{5}$.

Uvrštavanjem u u bilo koju od jednažbi dobivamo $v = \frac{1}{10}$.

Budući da je $u = \frac{1}{x+y}$, a $v = \frac{1}{3x-y+3}$, uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za u i v dobivamo sustav:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3x-y+3} = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Izjednačavanjem nazivnika u razlomcima s istim brojnikom dobivamo sljedeći sustav:

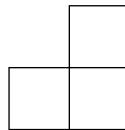
$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-y+3=10. \end{cases}$$

Rješavanjem tog sustava konačno dobivamo jedinstveno rješenje $(x, y) = (3, 2)$.

Zadatak J-3.6. [35 bodova]

Za koje se prirodne brojeve n pravokutna ploča dimenzija $n \times 9$ može potpuno prekriti *L-triomino pločicama* (kao na slici) tako da se one međusobno ne preklapaju?

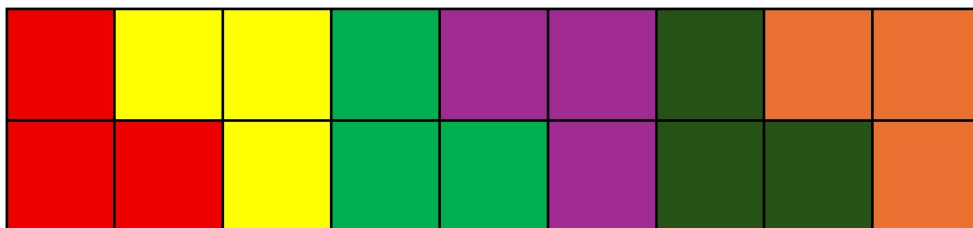
Pločice se mogu rotirati.



Rješenje.

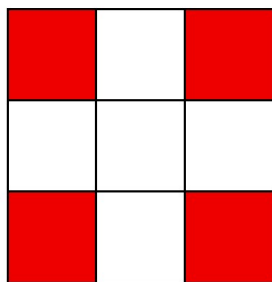
Promatrajmo ploču za male n -ove. Za $n = 1$ očito nema rješenja jer svaka L-triomino pločica pokriva polja u dva reda.

Za $n = 2$, ploča 2×9 se može pokriti na način kao na slici:



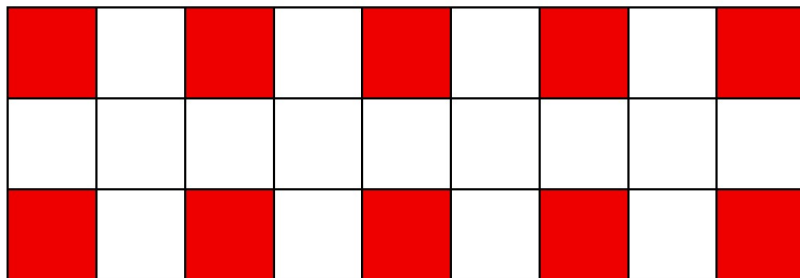
Sada možemo zaključiti i da se ploča $2k \times 9$, za $k \in \mathbb{N}$, može popločati L-triomino pločicama jer možemo spojiti k ploča dimenzija 2×9 , tj. moguće je svako popločavanje kada je n paran broj.

Promatrajmo ploču 3×9 . Da bismo došli do nekog zaključka, promatrimo najprije manju 3×3 ploču.

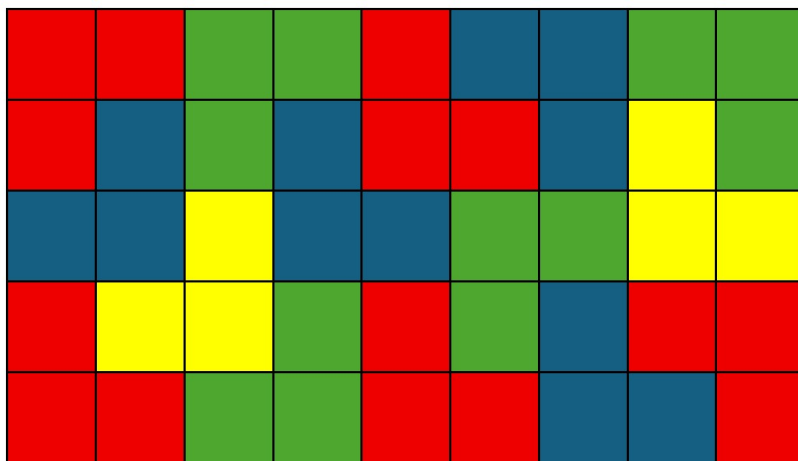


Primijetimo da je za popločavanje svakog označenog polja potrebna zasebna L-triomino pločica, jer jedna L-triomino pločica ne može istovremeno pokriti neka dva od tih polja. Dakle, trebale bi nam najmanje 4 L-triomino pločice, ali one pokrivaju ukupno 12 polja, stoga je popločavanje 3×3 ploče nemoguće.

Analogno tome, za pokrivanje označenih polja na slici unutar 3×9 ploče trebalo bi nam 10 L-triomino pločica koje pokrivaju ukupno 30 polja, ali 3×9 ploča ima samo 27 polja.



Pokušajmo sada popločati ploču 5×9 . To popločavanje je moguće, prikažimo ga:



Budući da je moguće ovo popločavanje, sada je moguće i svako popločavanje ploče dimenzija $(2k+1) \times 9$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, jer možemo spojiti ploču 5×9 i bilo koji broj ploča 2×9 . Drugim riječima, moguće je svako popločavanje kad je n neparan broj veći od 3.

Zaključujemo da se može popločati svaka ploča dimenzija $n \times 9$ za $n \geq 2$, $n \neq 3$.

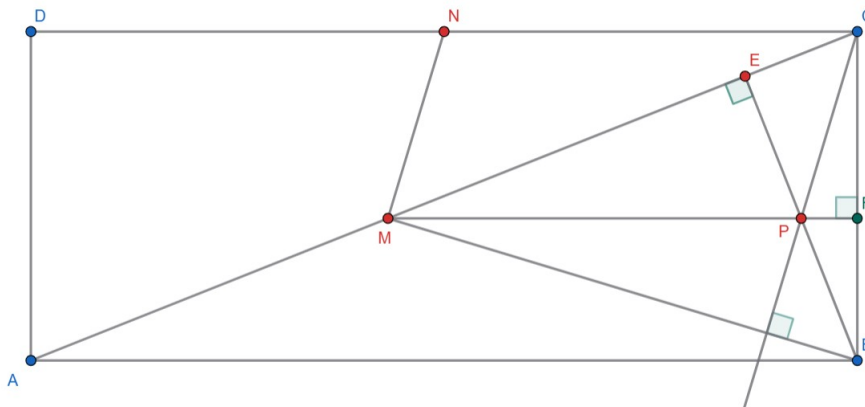
Zadatak J-3.7. [40 bodova]

U pravokutniku $ABCD$ točka E je nožište okomice iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$. Neka je točka M polovište dužine $\overline{AE}$, a točka N polovište stranice $\overline{CD}$.

Dokaži da je $\sphericalangle BMN = 90^\circ$.

Prvo rješenje.

Prvo nacrtajmo skicu i sve zadane elemente na njoj.

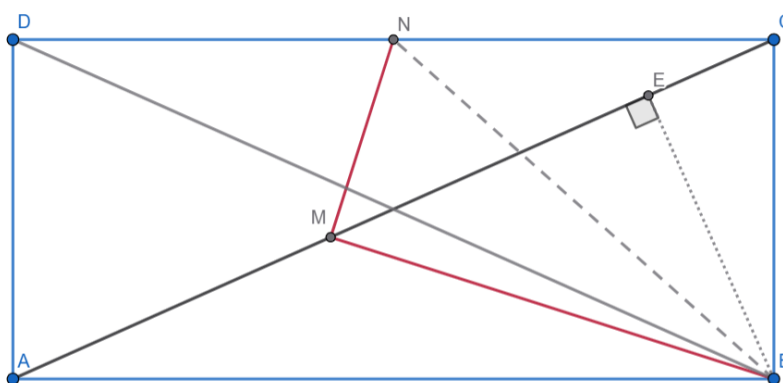


Primijetimo da je dužina $\overline{BE}$ visina trokuta MBC , stoga nacrtajmo visinu iz vrha M te označimo nožište s F . Točka P u kojoj se sijeku te dvije visine je ortocentar trokuta MBC . To znači da je pravac CP okomit na $\overline{MB}$ jer sadrži treću visinu trokuta MBC .

Budući da je točka M polovište od $\overline{AE}$ i zbog $AB \parallel MP$ vrijedi da je $\overline{MP}$ srednjica trokuta ABE što povlači $|MP| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CD| = |CN|$. Također, zbog $MP \parallel CD$ slijedi da je četverokut $MPCN$ paralelogram.

Sada iz $CP \parallel MN$ i $CP \perp MB$ slijedi $MN \perp MB$, tj. $\sphericalangle BMN = 90^\circ$.

Drugo rješenje.

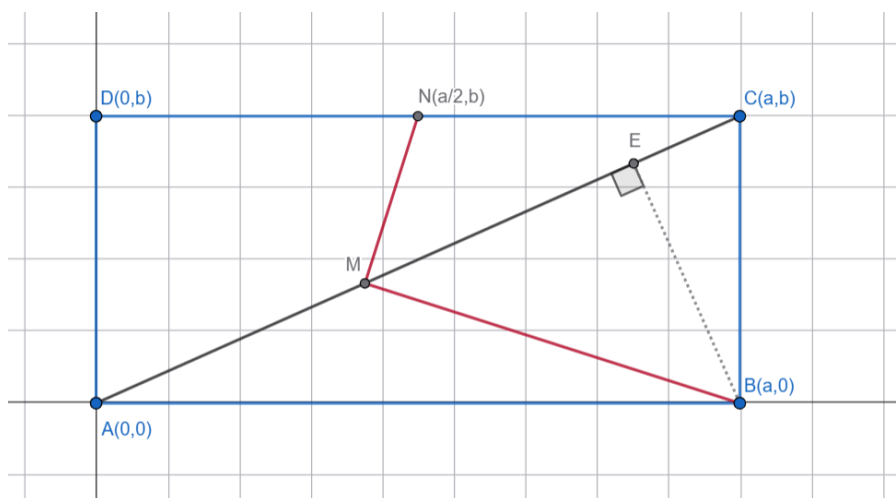


Kako bismo dokazali da je $\sphericalangle BMN = 90^\circ$, dovoljno je dokazati da je četverokut $MBCN$ tetivan. Dokazat ćemo da vrijedi $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BNC$, iz čega će slijediti da su ova dva kuta obodni kutovi nad tetivom $\overline{AC}$, što znači da točke M , B , C i N leže na istoj kružnici.

Krenemo od sličnosti trokuta ABC i AEB (podudaraju se u dva kuta). Prebacimo se na trokut DCB , koji je sukladan s ABC , pa vrijedi i $\triangle DCB \sim \triangle AEB$. Sada, kako su u ovim trokutima točke M i N polovišta odgovarajućih stranica, zaključujemo da vrijedi i $\triangle NCB \sim \triangle MEB$ (omjeri stranica se i dalje podudaraju).

Iz posljednje sličnosti upravo dobijemo traženu jednakost veličina kutova $\sphericalangle BNC = \sphericalangle BME = \sphericalangle BMC$.

Treće rješenje.



Postavimo pravokutnik u koordinatni sustav kao na slici, tj. tako da je točka A u ishodištu, točka B ima koordinate $(a, 0)$, gdje je a označena duljina stranice $\overline{AB}$, točka C ima koordinate (a, b) , gdje je b označena duljina stranice $\overline{BC}$, a točka D ima koordinate $(0, b)$. Tada su koordinate točke N jednake $(\frac{a}{2}, b)$.

Koordinate točke E određujemo kao presjek pravaca AC i njemu okomitog pravca iz točke B . Jednadžba pravca AC glasi $y = \frac{b}{a}x$. Svaki njemu okomit pravac ima koeficijent smjera $-\frac{a}{b}$. Želimo da naš pravac prolazi točkom $B(a, 0)$, pa dobijemo da njegova jednadžba glasi $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b}$. Izjednačavanjem ovih jednadžbi i rješavanjem sustava dobijemo da su koordinate točke E jednake $(\frac{a^3}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2})$. Koordinate točke M su polovina odgovarajućih koordinata točke E , jer je M polovište dužine koja spaja ishodište (točku A) i točku E .

Sada preostaje dokazati da su pravci BM i MN okomiti. To znači da za njihove koeficijente smjera k_{BM} i k_{MN} treba vrijediti da im je umnožak jednak -1 . Izračunajmo ove koeficijente smjera:

$$k_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)} - 0}{\frac{a^3}{2(a^2+b^2)} - a} = \frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}}{\frac{a^3 - 2a(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}} = \frac{a^2b}{-a^3 - 2ab^2} = -\frac{ab}{a^2 + 2b^2}$$

$$k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)} - b}{\frac{a^3}{2(a^2+b^2)} - \frac{a}{2}} = \frac{\frac{a^2b - 2b(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}}{\frac{a^3 - a(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)}} = \frac{-a^2b - 2b^3}{-ab^2} = \frac{a^2 + 2b^2}{ab}.$$

Očito vrijedi $k_{BM} \cdot k_{MN} = -1$, čime je tvrdnja dokazana.

Četvrto rješenje.

Posljednje rješenje koje ćemo prezentirati koristi vektore i skalarni umnožak vektora, koji zahtijeva (minimalno) poznavanje trigonometrije. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Tada vrijedi $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su okomiti, pa njihov skalarni umnožak iznosi 0, tj. vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Također, vektori $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{AC}$ su okomiti, pa vrijedi $\overrightarrow{BE} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$.

Želimo pokazati da su vektori $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{NM}$ okomiti, za što treba pokazati da vrijedi $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$. Izrazimo vektore $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{NM}$ preko vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\overrightarrow{BE}$. Točka M je polovište dužine AE , pa iz zbrajanja vektora po pravilu paralelograma zaključujemo da vrijedi $\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}}{2} = \frac{-\vec{a} + \overrightarrow{BE}}{2}$.

Vektor $\overrightarrow{NM}$ sada možemo izračunati kao zbroj vektora $\overrightarrow{NB}$ i $\overrightarrow{BM}$, po pravilu trokuta. Stoga vrijedi:

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) + \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} - \vec{b}.$$

Konačno možemo izračunati vrijednost skalarnog umnoška vektora $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{NM}$ (pomnožimo odmah sve s 4 da se riješimo nazivnika):

$$\begin{aligned} 4 \cdot \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{NM} &= (-\vec{a} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{BE} - 2\vec{b}) = \overrightarrow{BE} \cdot (-\vec{a} - 2\vec{b}) + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BE} + 2\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=0} \\ &= -\underbrace{\overrightarrow{BE} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}_{=0} - \overrightarrow{BE} \cdot \vec{b} + |BE|^2 = -|BE| \cdot \underbrace{|BC| \cdot \cos(\angle CBE)}_{=|BE|} + |BE|^2 \\ &= -|BE|^2 + |BE|^2 = 0. \end{aligned}$$

Ovime je dokaz završen.

Zadatak J-3.8. [45 bodova]

Matematičar Matko želi povući 2023 dijagonale u pravilnom 2026-erokutu S tako da se nikoje dvije od njih ne sijeku. *Raspon* dijagonale d definiramo kao manji broj stranica mnogokuta S između vrhova dijagonale d .

Neka je D najveća razlika raspona dijagonala među svim dijagonalama od S koje je Matko nacrtao. Odredi najmanju vrijednost D koju Matko može postići.

Rješenje.

Označimo s d_{min} raspon najmanje dijagonale i s d_{max} raspon najveće dijagonale. Tada je

$$D = d_{max} - d_{min}.$$

Pokažimo najprije da mora vrijediti $d_{min} = 2$. To će slijediti iz sljedeće leme.

Lema: Najveći broj dijagonala koje se mogu povući bez presijecanja u pravilnom n -terokutu iznosi $n - 3$. Te dijagonale dijele mnogokut na trokute.

Dokaz leme: Ovu tvrdnju možemo dokazati **jakom** (ili **potpunom**) matematičkom indukcijom. Jasno je da za $n = 3$ ne možemo povući ni jednu dijagonalu, a za $n = 4$ možemo jednu, koja raspolažlja četverokut na dva trokuta. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 3, 4, \dots, k$. Pokazat ćemo da vrijedi i za $k + 1$. Povucimo bilo koju dijagonalu u konveksnom $(k + 1)$ -terokutu. Ona ga dijeli na n_1 -terokut i n_2 -terokut, gdje je

$$n_1 + n_2 = (k + 1) + 2 = k + 3$$

jer ova dva mnogokuta dijele 2 vrha. Oдавde je $n_2 = k + 3 - n_1$. Sve dijagonale koje dalje povlačimo moraju biti sadržane unutar jednog od dva manja mnogokuta, jer bi inače dijagonala sjekla početnu dijagonalu. U n_1 -terokutu po pretpostavci indukcije možemo povući maksimalno $n_1 - 3$ dijagonale koje se ne sijeku, a u n_2 -terokutu $n_2 - 3 = k - n_1$ dijagonale. Ove dijagonale dijele manje mnogokute na trokute. Uključujući dijagonalu koja dijeli mnogokut na dva, imamo da je ukupan maksimalni broj dijagonala koje se ne sijeku u velikom mnogokutu jednak

$$1 + (n_1 - 3) + (k - n_1) = k - 2 = (k + 1) - 3.$$

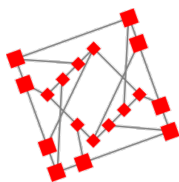
Kako su manji mnogokuti podijeljeni na trokute, i veliki mnogokut će biti podijeljen na trokute, jer je dobiven spajanjem dva manja mnogokuta. Stoga tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. $\square$

Pretpostavimo sada da je $d_{min} = k > 2$. Ta dijagonala s $k - 1$ vrhova između njenih krajeva čini $(k + 1)$ -terokut u kojem Matko nije povukao niti jednu dijagonalu. No, to je kontradikcija s lemom, jer $k + 1 > 3$, pa 2026-erokut ne bi bio podijeljen na trokute s povučenih $2023 = 2026 - 3$ dijagonale.

Preostaje sada minimizirati vrijednost d_{max} . U nastavku dokazujemo da najmanji d_{max} koji Matko može postići iznosi $M := \left\lceil \frac{2026}{3} \right\rceil = 676$. Za nesusjedne vrhove U i V mnogokuta S označit ćemo s $d(\overline{UV})$ raspon dijagonale $\overline{UV}$ te s $\widehat{UV}$ skup svih vrhova mnogokuta S koji su u rasponu dijagonale $\overline{UV}$ (dakle, svi vrhovi mnogokuta S koji se nalaze između vrhova U i V , uključujući i njih, i to „s kraće strane”).

Pokažimo najprije da se $d_{max} = M$ može postići. Označimo vrhove 2026-erokuta S redom s $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$, počevši od proizvoljnog. Povucimo prvo dijagonale $A_1A_{677}, \overline{A_{677}A_{1352}}$ i $\overline{A_{1352}A_1}$. Time smo S podijelili na 677-erokut $A_1A_2 \dots A_{677}$, dva 676-erokuta $A_{677}A_{678} \dots A_{1352}$ i $A_{1352}A_{1353} \dots A_1$ i jedan trokut $A_1A_{677}A_{1352}$. Veće mnogokokute možemo podijeliti na trokute s ukupno $(677-3) + 2 \cdot (676-3) = 2020$ dijagonala. Zajedno s prve tri dijagonale, ovo čini podjelu mnogokuta S na trokute s ukupno 2023 dijagonale. Jasno je da u ovom slučaju vrijedi $d_{max} = d(A_1A_{677}) = 676$.

Dokažimo sada kontradikcijom da je $d_{max} < M$ nemoguće postići. Pretpostavimo suprotno, tj. da Matko može povući 2023 dijagonale u mnogokutu S tako da je maksimalni raspon dijagonale koji je postigao manji od M . Neka je $\overline{AB}$ neka od dijagonala s najvećim rasponom, tj. vrijedi $d(AB) = d_{max} < M$. Uzmimo točku $C \notin \widehat{AB}$ takvu da je Matko povukao dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ – ova točka sigurno postoji jer je mnogokut S podijeljen na trokute s 2023 dijagonale koje se ne sijeku, pa dijagonala AB mora s obje strane biti dio nekog trokuta. Ako je sada $\widehat{AB} \subset \widehat{AC}$ ili $\widehat{AB} \subset \widehat{BC}$, tada $\overline{AB}$ nije dijagonala s najvećim rasponom. Stoga mora biti $\widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \widehat{CA} = S$, a to znači da je suma raspona stranica trokuta ABC jednaka 2026. Kako je raspon od $\overline{AB}$ manji od $M = \left\lceil \frac{2026}{3} \right\rceil$, barem jedna od stranica $\overline{BC}$ ili $\overline{CA}$ ima raspon veći ili jednak M . No tada $\overline{AB}$ nije dijagonala s najvećim rasponom – kontradikcija. Zaključujemo da je najbolje što Matko može postići $d_{max} = 676$ i $d_{min} = 2$, odnosno da je $D = 674$.



MEDO 2025./2026.

Treće kolo

17.1.2026.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak S-3.1. [10 bodova]

Izračunaj

$$\frac{1}{\frac{1^2}{2026^2} + 1} + \frac{1}{\frac{2^2}{2025^2} + 1} + \frac{1}{\frac{3^2}{2024^2} + 1} + \dots + \frac{1}{\frac{2026^2}{1^2} + 1}.$$

Rješenje.

Primijetimo da k -ti član sume možemo napisati kao

$$\frac{1}{\frac{k^2}{(2027-k)^2} + 1},$$

gdje je $k = 1, 2, \dots, 2026$. Sada možemo gledati kao parove članove na pozicijama k i $2027 - k$ (prvi i zadnji, drugi i predzadnji, ...). Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{k^2}{(2027-k)^2} + 1} + \frac{1}{\frac{(2027-k)^2}{(2027-(2027-k))^2} + 1} &= \frac{1}{\frac{k^2 + (2027-k)^2}{(2027-k)^2}} + \frac{1}{\frac{(2027-k)^2 + k^2}{k^2}} = \\ &= \frac{(2027-k)^2}{k^2 + (2027-k)^2} + \frac{k^2}{(2027-k)^2 + k^2} = \\ &= \frac{k^2 + (2027-k)^2}{k^2 + (2027-k)^2} = 1. \end{aligned}$$

Ukupno ima 1013 parova pa suma iznosi $1013 \cdot 1 = 1013$.

Zadatak S-3.2. [15 bodova]

Neka je $p \neq 3$ prost broj i neka su a i b cijeli brojevi takvi da

$$p \mid a + b \quad \text{i} \quad p^2 \mid a^3 + b^3.$$

Dokaži da vrijedi $p^2 \mid a + b$ ili $p^3 \mid a^3 + b^3$.

Rješenje.

Izraz $a^3 + b^3$ možemo raspisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) = \\ &= (a + b)(a^2 + b^2 + 2ab - 3ab) = \\ &= (a + b)((a + b)^2 - 3ab) \end{aligned}$$

Kako $p^2 \mid a^3 + b^3$ i $p \mid a + b$ zaključujemo da $p^2 \mid a + b$ ili $p \mid (a + b)^2 - 3ab$.

Pretpostavimo da $p^2 \nmid a + b$, tj. da $p \mid (a + b)^2 - 3ab$. Kako $p \mid a + b$, vrijedi i $p \mid 3ab$. S obzirom da je $p \neq 3$, mora biti da $p \mid a$ ili $p \mid b$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $p \mid a$. Tada kako $p \mid a + b$, slijedi da $p \mid b$. Oдавде imamo $p^3 \mid a^3$ i $p^3 \mid b^3$ па $p^3 \mid a^3 + b^3$.

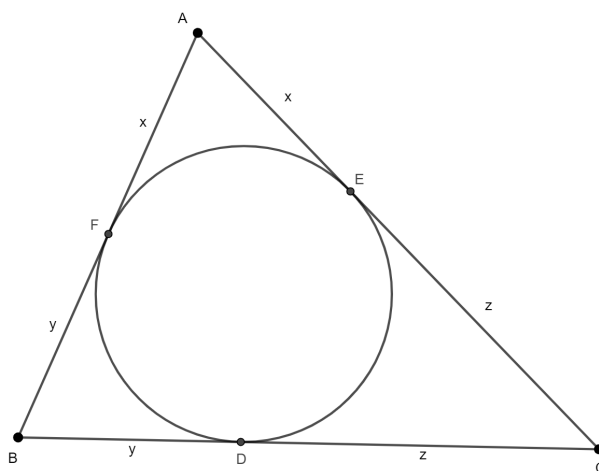
Zadatak S-3.3. [20 bodova]

Zadan je trokut ABC sa stranicama duljina $|BC| = 2025$, $|AC| = 2026$ i $|AB| = 2027$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka D tako da upisane kružnice trokuta ABD i ADC dodiruju dužinu $\overline{AD}$ u istoj točki.

Odredi duljinu dužine $\overline{BD}$.

Rješenje.

Dokažimo najprije sljedeću poznatu lemu.



Lema: Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D , E i F . Neka su a , b i c redom duljine stranica trokuta ABC nasuprot vrhova A , B i C . Tada je

$$|AE| = |AF| = \frac{b + c - a}{2},$$

$$|BD| = |BF| = \frac{a + c - b}{2},$$

$$|CD| = |CE| = \frac{a + b - c}{2}.$$

Dokaz leme: Kako su AE i AF tangente iz točke A na upisanu kružnicu trokuta ABC slijedi da je $|AE| = |AF|$.

Analogno je $|BD| = |BF|$ i $|CD| = |CE|$.

Označimo s $x = |AE| = |AF|$, $y = |BD| = |BF|$ i $z = |CD| = |CE|$.

Redom imamo da je

$$x + y = |AF| + |FB| = c,$$

$$x + z = |AE| + |EC| = b,$$

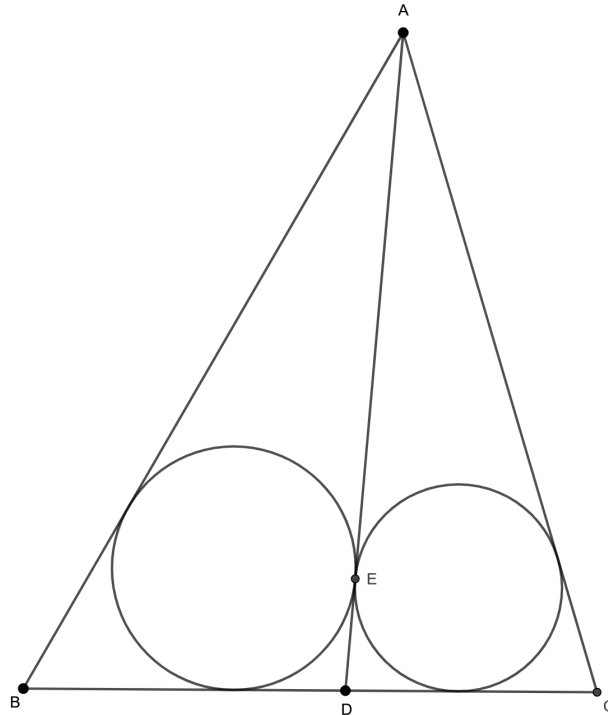
$$y + z = |BD| + |DC| = a.$$

Rješavanjem gornjeg sustava po x , y i z konačno dobivamo

$$\begin{aligned}x &= \frac{b + c - a}{2}, \\y &= \frac{a + c - b}{2}, \\z &= \frac{a + b - c}{2}\end{aligned}$$

što smo i trebali pokazati. □

Vratimo se sada natrag na početni zadatak. Označimo s $x = |BD|$ te neka je E zajedničko diralište upisanih kružnica trokuta ABD i ADC na dužini $\overline{AD}$.



Primjenom gornje leme na trokut ABD imamo

$$|DE| = \frac{|BD| + |AD| - |AB|}{2} = \frac{x + |AD| - 2027}{2}.$$

Primjenom leme na trokut ADC dobivamo

$$|DE| = \frac{|DC| + |AD| - |AC|}{2} = \frac{2025 - x + |AD| - 2026}{2} = \frac{|AD| - x - 1}{2}.$$

Iz gornjih jednakosti slijedi

$$\frac{x + |AD| - 2027}{2} = \frac{|AD| - x - 1}{2}$$

iz čega konačno dobivamo da je $x = 1013$.

Dakle, tražena duljina dužine $\overline{BD}$ iznosi 1013.

Zadatak S-3.4. [25 bodova]

Matematičar Matko želi povući 2023 dijagonale u pravilnom 2026-erokutu S tako da se nikoje dvije od njih ne sijeku. *Raspon* dijagonale d definiramo kao manji broj stranica mnogokuta S između vrhova dijagonale d .

Neka je D najveća razlika raspona dijagonala među svim dijagonalama od S koje je Matko nacrtao. Odredi najmanju vrijednost D koju Matko može postići.

Rješenje.

Označimo s d_{min} raspon najmanje dijagonale i s d_{max} raspon najveće dijagonale. Tada je

$$D = d_{max} - d_{min}.$$

Pokažimo najprije da mora vrijediti $d_{min} = 2$. To će slijediti iz sljedeće leme.

Lema: Najveći broj dijagonala koje se mogu povući bez presijecanja u pravilnom n -terokutu iznosi $n - 3$. Te dijagonale dijele mnogokut na trokute.

Dokaz leme: Ovu tvrdnju možemo dokazati **jakom** (ili **potpunom**) matematičkom indukcijom. Jasno je da za $n = 3$ ne možemo povući ni jednu dijagonalu, a za $n = 4$ možemo jednu, koja raspolavlja četverokut na dva trokuta. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = 3, 4, \dots, k$. Pokazat ćemo da vrijedi i za $k + 1$. Povucimo bilo koju dijagonalu u konveksnom $(k + 1)$ -terokutu. Ona ga dijeli na n_1 -terokut i n_2 -terokut, gdje je

$$n_1 + n_2 = (k + 1) + 2 = k + 3$$

jer ova dva mnogokuta dijele 2 vrha. Oдавde je $n_2 = k + 3 - n_1$. Sve dijagonale koje dalje povlačimo moraju biti sadržane unutar jednog od dva manja mnogokuta, jer bi inače dijagonala sjekla početnu dijagonalu. U n_1 -terokutu po pretpostavci indukcije možemo povući maksimalno $n_1 - 3$ dijagonale koje se ne sijeku, a u n_2 -terokutu $n_2 - 3 = k - n_1$ dijagonale. Ove dijagonale dijele manje mnogokute na trokute. Uključujući dijagonalu koja dijeli mnogokut na dva, imamo da je ukupan maksimalni broj dijagonala koje se ne sijeku u velikom mnogokutu jednak

$$1 + (n_1 - 3) + (k - n_1) = k - 2 = (k + 1) - 3.$$

Kako su manji mnogokuti podijeljeni na trokute, i veliki mnogokut će biti podijeljen na trokute, jer je dobiven spajanjem dva manja mnogokuta. Stoga tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. $\square$

Pretpostavimo sada da je $d_{min} = k > 2$. Ta dijagonala s $k - 1$ vrhova između njenih krajeva čini $(k + 1)$ -terokut u kojem Matko nije povukao niti jednu dijagonalu. No, to je kontradikcija s lemom, jer $k + 1 > 3$, pa 2026-erokut ne bi bio podijeljen na trokute s povučenih 2023 = 2026 - 3 dijagonale.

Preostaje sada minimizirati vrijednost d_{max} . U nastavku dokazujemo da najmanji d_{max} koji Matko može postići iznosi $M := \left\lceil \frac{2026}{3} \right\rceil = 676$. Za nesusjedne vrhove U i V mnogokuta S označit ćemo s $d(\overline{UV})$ raspon dijagonale $\overline{UV}$ te s $\widehat{UV}$ skup svih vrhova mnogokuta S koji su u rasponu dijagonale $\overline{UV}$ (dakle, svi vrhovi mnogokuta S koji se nalaze između vrhova U i V , uključujući i njih, i to „s kraće strane”).

Pokažimo najprije da se $d_{max} = M$ može postići. Označimo vrhove 2026-erokuta S redom s $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$, počevši od proizvoljnog. Povucimo prvo dijagonale $\overline{A_1 A_{677}}$, $\overline{A_{677} A_{1352}}$ i $\overline{A_{1352} A_1}$. Time smo S podijelili na 677-erokut $A_1 A_2 \dots A_{677}$, dva 676-erokuta $A_{677} A_{678} \dots A_{1352}$ i $A_{1352} A_{1353} \dots A_1$ i jedan trokut $A_1 A_{677} A_{1352}$. Veće mnogokute možemo podijeliti na trokute s ukupno $(677 - 3) + 2 \cdot (676 - 3) = 2020$ dijagonala. Zajedno s prve tri dijagonale, ovo čini podjelu mnogokuta S na trokute s ukupno 2023 dijagonale. Jasno je da u ovom slučaju vrijedi $d_{max} = d(\overline{A_1 A_{677}}) = 676$.

Dokažimo sada kontradikcijom da je $d_{max} < M$ nemoguće postići. Pretpostavimo suprotno, tj. da Matko može povući 2023 dijagonale u mnogokutu S tako da je maksimalni raspon dijagonale koji je postigao manji od M . Neka je $\widehat{AB}$ neka od dijagonala s najvećim rasponom, tj. vrijedi $d(AB) = d_{max} < M$. Uzmimo točku $C \notin \widehat{AB}$ takvu da je Matko povukao dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ – ova točka sigurno postoji jer je mnogokut S podijeljen na trokute s 2023 dijagonale koje se ne sijeku, pa dijagonala AB mora s obje strane biti dio nekog trokuta. Ako je sada $\widehat{AB} \subset \widehat{AC}$ ili $\widehat{AB} \subset \widehat{BC}$, tada $\overline{AB}$ nije dijagonala s najvećim rasponom. Stoga mora biti $\widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \widehat{CA} = S$, a to znači da je suma raspona stranica

trokuta ABC jednaka 2026. Kako je raspon od $\overline{AB}$ manji od $M = \left\lceil \frac{2026}{3} \right\rceil$, barem jedna od stranica $\overline{BC}$ ili $\overline{CA}$ ima raspon veći ili jednak M . No tada $\overline{AB}$ nije dijagonala s najvećim rasponom – kontradikcija. Zaključujemo da je najbolje što Matko može postići $d_{max} = 676$ i $d_{min} = 2$, odnosno da je $D = 674$.

Zadatak S-3.5. [30 bodova]

Medvjedi Branko, Bruna i Brundo žive u različitim kućama (točkama u ravnini). Medvjedi su odlučili spremati zalihe hrane na jedno mjesto (točku u ravnini) tako da zbroj vremena koja su im potrebna da dođu od svojih kuća do spremišta bude najmanji mogući.

Svi medvjedi hodaju od svoje kuće do spremišta po pravcu i svi prave korake iste duljine, ali dok Branko napravi jedan korak, Bruna napravi dva koraka, a Brundo tri koraka.

Odredi gdje medvjedi trebaju napraviti spremište hrane.

Rješenje.

Neka su točke X , Y i Z redom Brankova, Brunina i Brundina kuća te neka je točka S mjesto gdje će spremati hranu.

Označimo s $x = |XS|$, $y = |YS|$ i $z = |ZS|$ redom brojeve koraka koji su potrebni Branku, Bruni i Brundu da dođu do spremišta hrane.

Ukupno vrijeme potrebno da dođu do spremišta je tada

$$t = x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}.$$

Primjenom nejednakosti trokuta na $XY S$ imamo da je

$$x + y \geq |XY|,$$

iz čega slijedi da je $y \geq |XY| - x$.

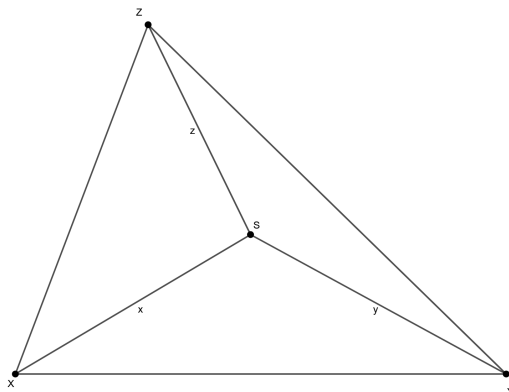
Analogno, primjenom nejednakosti trokuta na XSZ dobivamo da je $z \geq |XZ| - x$.

Sada redom imamo da je

$$t = x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \geq x + \frac{|XY| - x}{2} + \frac{|XZ| - x}{3} = \frac{|XY|}{2} + \frac{|XZ|}{3} + \frac{x}{6} \geq \frac{|XY|}{2} + \frac{|XZ|}{3}.$$

Iz gornje nejednakosti vidimo da je minimalno ukupno vrijeme za doći do spremišta $\frac{|XY|}{2} + \frac{|XZ|}{3}$ i ono se postiže kada je $x = 0$, odnosno kada je $S = X$.

Dakle, medvjedi trebaju napraviti spremište hrane u Brankovoj kući.



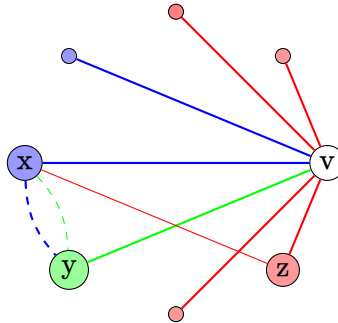
Zadatak S-3.6. [35 bodova]

Na konferenciji je 25 diplomata. Prije konferencije, svaka dva diplomata su se dogovorila na kojem jeziku će razgovarati. Poznato je da među bilo koja tri diplomata postoji diplomat koji će koristiti isti jezik za razgovor s preostala dva diplomata.

Dokaži da postoji diplomat koji na istom jeziku razgovara s najmanje devet drugih diplomata.

Prvo rješenje.

Diplomate možemo prikazati kao vrhove u obojanom grafu, gdje boja brida označava jezik kojim 2 diplomata komuniciraju.



Neka je v diplomat koji priča na istom jeziku s najviše drugih diplomata, tj. v je vrh u grafu iz kojeg izlazi najviše istoboјnih bridova. Neka su ti bridovi **crvene** boje i taj skup označimo s S , a neka je s broj elemenata tog skupa ($v \notin S$). Sve vrhove, osim v oboјimo u onu boju koje boje je brid između v i tog vrha. Označimo s K skup svih vrhova koji nisu v , niti su iz S . Za vrh k iz K , označimo s $f(k)$ skup svih vrhova iz S koji su povezani **crvenim** bridom s k .

Lema: Za dva vrha različite boje x i y iz K , ili je $f(x) \subset f(y)$ ili $f(y) \subset f(x)$.

Dokaz: Neka je x **plave** boje, a y **zelene** boje. x i y su zbog uvjeta zadatka povezani **plavim** ili **zelenim** bridom. Bez smanjenja općenitosti neka su povezani **plavim** bridom. Uzmimo vrh $z \in f(x)$ koji je povezan s x **crvenim** bridom. Onda iz uvjeta zadatka (gledajući trokut xyz), on mora biti povezan s y **crvenim** ili **plavim** bridom. Ako bi bio s **plavim**, onda bi u trokutu vyz imali 3 stranice različite boje. Stoga y i z moraju biti povezani **crvenim** bridom, tj. $z \in f(y)$. Pokazali smo da ako je $z \in f(x)$, da je onda $z \in f(y)$ pa je $f(x) \subset f(y)$. Da su x i y povezani **zelenim** bridom vrijedilo bi $f(y) \subset f(x)$. $\square$

Pokažimo sada da je za svaki $k \in K$, $f(k)$ neprazan skup.

Lema: Za svaki x iz K je $|f(x)| \geq 2$.

Dokaz: Uzmimo vrh x **plave** boje i y zelene boje iz K . x je povezan s vrhovima iz S **crvenom** ili **plavom** bojom. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, da je s barem $s - 1$ vrhova iz S povezan **plavom** bojom. Ako su x i y povezani **plavom** bojom, onda iz x imamo barem $(s - 1) + 1 + 1 = s + 1$ **plavih** bridova (vrhovi iz S , v i y), što je kontradikcija s time da je v vrh iz kojeg ide najviše istoboјnih bridova. Stoga su barem 2 vrha iz S povezana s x **crvenom** bojom. Ako su pak x i y povezani **zelenom** bojom tada je iz prethodne leme $f(y) \subset f(x)$. Sada istim zaključivanjem dobivamo $|f(y)| \geq 2$ pa je i $|f(x)| \geq 2$. $\square$

Uzmimo sada vrh x iz K s najmanje **crvenih** susjeda u S . Neka je x **plave** boje. Označimo s P skup svih **plavih** vrhova ($P \subset K$) i s p broj elemenata skupa P . Vrhova iz K koji nisu **plave** boje ima $|K \setminus P| = 25 - s - p - 1$ (svi vrhovi bez vrhova iz S , P i vrha v).

Zbog pretpostavke da je x vrh iz K s najmanje **crvenih** susjeda, za svaki vrh y iz K koji nije **plave** boje, po prethodnoj lemi vrijedi $f(x) \subset f(y)$. Stoga za svaki $z \in f(x)$ koji je povezan s x **crvenom** bojom, je povezan **crvenom** bojom sa svim vrhovima iz $K \setminus P$. Također je povezan **crvenom** bojom s v i x pa iz z izlazi barem $(25 - s - p - 1) + 2 = n - s - p + 1$ **crvenih** bridova. Kako je v vrh s najviše

istobojnih bridova, vrijedi $p \leq s$ i $25 - s - p + 1 \leq s$. Odavde imamo

$$25 + 1 \leq 2s + p \leq 3s \implies s \geq \frac{26}{3}.$$

Stoga je s barem 9.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da svaki diplomat razgovara na istom jeziku s najviše 8 drugih diplomata.

Za uređenu trojku diplomata (x, y, z) kažemo da je *dobra* ako u toj trojci diplomat x razgovara s preostalim dvojicom (y i z) na istom jeziku. Po uvjetu zadatka za svaka 3 diplomata možemo naći redoslijed takav da uređena trojka s ta 3 diplomata bude *dobra*. Stoga *dobrih* trojki ima barem $\binom{25}{3} = 2300$.

Za proizvoljnog diplomata x , neka je k broj jezika koje diplomat x koristi. Označimo s X_i skup preostalih diplomata s kojima x razgovara na i -tom jeziku i neka je x_i broj diplomata u tom skupu, $i = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$. Jasno je da je $\sum_{i=1}^k x_k = 24$. Također, ako uzmemo bilo koja dva elementa iz skupa X_i , x s njima čini dobru trojku. Zato je broj *dobrih* trojki u kojima je x na prvom mjestu

$$\sum_{i=1}^k \binom{x_i}{2} = \sum_{i=1}^k \frac{x_i(x_i - 1)}{2} = \frac{1}{2} \left(-\sum_{i=1}^k x_k + \sum_{i=1}^k x_k^2 \right) = -12 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k x_k^2.$$

Promotrimo sada koliko ovaj izraz može najviše iznositi. Za to je potrebno naći maksimum od $\sum_{i=1}^k x_k^2$, uz uvjet da je $\sum_{i=1}^k x_k = 24$ i $x_i \leq 8$ za svaki $i = 1, \dots, k$.

Lema: Za $a, b \in \mathbb{N}_0$, t.d. $a \geq b$ vrijedi $a^2 + b^2 < (a + 1)^2 + (b - 1)^2$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} (a + 1)^2 + (b - 1)^2 &= a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = \\ &= a^2 + b^2 + 2(a - (b - 1)) \end{aligned}$$

Kako je $a > b - 1$, slijedi da je $2(a - (b - 1)) > 0$, odakle slijedi tvrdnja. $\square$

Primijetimo da ako iterativno primjenjujemo prethodnu lemu za dva broja a i b , dolazimo do brojeva $(a + b)$ i 0 čija je suma kvadrata najveća moguća od brojeva koji u sumi daju $a + b$.

Analogno zaključujemo da uz uvjete $\sum_{i=1}^k x_k = 24$ i $x_i \leq 8$ za svaki $i = 1, \dots, k$ je suma kvadrata najveća ako je $k = 3$ i $x_1 = x_2 = x_3 = 8$. Tada suma iznosi $3 \cdot 8^2 = 192$.

To znači da *dobrih* trojki s x na prvom mjestu ima najviše $3 \cdot \binom{8}{2} = 84$. Kako je x proizvoljan diplomat, zaključujemo da je maksimalan broj *dobrih* trojki $25 \cdot 84 = 2100$. To je kontradikcija jer smo na početku zaključili da po uvjetu zadatka postoji barem 2300 *dobrih* trojki. Stoga postoji diplomat koji na istom jeziku razgovara s najmanje devet drugih diplomata.

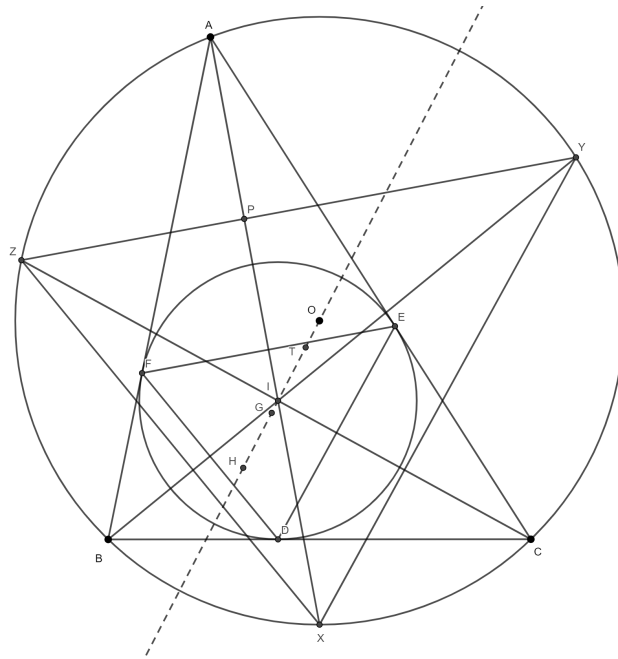
Zadatak S-3.7. [40 bodova]

Neka je O središte opisane kružnice te I središte upisane kružnice trokuta ABC . Upisana kružnica trokuta ABC dira stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama D , E i F .

Neka je G težište trokuta DEF . Dokaži da se točke I , O i G nalaze na istom pravcu.

Rješenje.

Neka su X , Y i Z redom polovišta lukova $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ i $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokuta ABC kao na slici. Neka je točka P sjecište pravaca AX i YZ . Neka su α , β i γ redom mjere kutova u vrhovima A , B i C trokuta ABC .



Kako je X polovište luka $\widehat{BC}$ slijedi da se točka X nalazi na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$, tj. točke A , I i X su kolinearne. Sasvim analogno se dobije da su točke B , I i Y te točke C , I i Z kolinearne.

Korištenjem obodnih kutova na opisanoj kružnici trokuta ABC redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle PXZ &= \sphericalangle AXZ = \sphericalangle ACZ = \frac{\gamma}{2}, \\ \sphericalangle CZP &= \sphericalangle CZY = \sphericalangle CBY = \frac{\beta}{2}, \\ \sphericalangle XZC &= \sphericalangle XAC = \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Uočimo da je

$$\sphericalangle XZP = \sphericalangle XZC + \sphericalangle CZP = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \sphericalangle PXZ,$$

iz čega slijedi da je trokut XPZ pravokutan. Posebno pravac AX je okomit na pravac YZ .

Na isti način se pokaže da je BY okomito na XZ te CZ okomito na XY .

Iz prijašnjih okomitosti slijedi da visine trokuta XYZ leže na pravcima AX , BY i CZ pa je zato točka I ortocentar trokuta XYZ .

Nadalje, uočimo da je pravac AX okomit na pravac EF jer je trokut AEF jednakokrani ($|AE| = |AF|$) te je AX simetrala kuta $\sphericalangle FAE$.

Kako su pravci EF i YZ okomiti na pravac AX slijedi da je YZ paralelna s pravcem EF .

Sasvim analogno je pravac XY paralelan s pravcem DE te pravac XZ paralelan s pravcem DF .

Iz prethodnih paralelnosti imamo da su odgovarajuće stranice trokuta XYZ i DEF međusobno paralelne. Zbog toga postoji neka homotetija h s centrom u točki H koja trokut XYZ slika u trokut DEF .

Neka je točka T težište trokuta XYZ . Kako homotetija preslikava karakteristične točke prvog trokuta u odgovarajuće karakteristične točke drugog trokuta slijedi da se težište T trokuta XYZ se preslikava u težište G trokuta DEF . Posebno to znači da su točke T , G i H kolinearne.

Nadalje, središte opisane kružnice trokuta XYZ je točka O i ona se po homotetiji h slika u središte opisane kružnice trokuta DEF što je točka I . Iz toga slijedi da su točke O , I i H također kolinearne.

Napokon, kako je I ortocentar, O središte opisane kružnice te T težište trokuta XYZ slijedi da se točke I , O i T nalaze na Eulerovom pravcu trokuta XYZ . Dakle, točke I , O i T su također kolinearne.

Konačno, iz prethodnih kolinearnosti slijedi da se točke O , I , T , G i H sve nalaze na istom pravcu iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak S-3.8. [45 bodova]

Neka je a cijeli broj i n prirodan broj. Dokaži da je zbroj

$$\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)}$$

djeljiv s n .

$D(x, y)$ označava najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva x i y .

Rješenje.

Zapišimo najprije početnu sumu $\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)}$ na drugačiji način.

U tu svrhu fiksirajmo prirodan broj d koji je djelitelj broja n i odredimo broj pribrojnika oblika a^d koji se javljaju u početnoj sumi. Za prebrojiti takve pribrojнике trebamo odrediti broj prirodnih brojeva $k \leq n$ takvih da je $D(k, n) = d$.

Kako je $D(k, n) = d$ slijedi da je tada $D\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$. Brojeva $k \leq n$ takvih da je $\frac{k}{d}$ relativno prosto s $\frac{n}{d}$ upravo ima $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Dakle, prema prethodnom imamo da je za svaki prirodan broj $d \mid n$ broj pribrojnika a^d u početnoj sumi jednak $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. Time početnu sumu možemo zapisati u obliku

$$\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)} = \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d.$$

Dokažimo sada najprije tvrdnju zadatka za brojeve n oblika $n = p^k$ gdje je p prost broj, a k prirodan broj, tj. dokazat ćemo sljedeću tvrdnju:

Lema: Suma $\sum_{d \mid p^k} \varphi\left(\frac{p^k}{d}\right) a^d$ je djeljiva s p^k za svaki prosti broj p i prirodan broj k .

Dokaz leme: Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po k .

Za $k = 1$ imamo da je

$$\sum_{d \mid p} \varphi\left(\frac{p}{d}\right) a^d = a^p + (p-1)a \equiv pa \equiv 0 \pmod{p}$$

pri čemu smo u gornjem računu koristili Mali Fermatov teorem, tj. da je $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Pretpostavimo da je za neki prirodan broj k suma $\sum_{d \mid p^k} \varphi\left(\frac{p^k}{d}\right) a^d$ djeljiva s p^k i dokažimo da ista tvrdnja vrijedi i za $k+1$.

Primjenom Eulerovog teorema imamo da je

$$a^{p^{j+1}} + (p-1)a^{p^j} \equiv pa^{p^j} \pmod{p^{j+1}}$$

za svaki prirodan broj j .

Sada redom imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{d|p^{k+1}} \varphi\left(\frac{p^{k+1}}{d}\right) a^d &= \sum_{i=0}^{k+1} \varphi(p^i) a^{p^{k+1-i}} \\
&= a^{p^{k+1}} + (p-1)a^{p^k} + \sum_{i=2}^{k+1} \varphi(p^i) a^{p^{k+1-i}} \\
&\equiv pa^{p^k} + \sum_{j=2}^{k+1} \varphi(p^j) a^{p^{k+1-j}} \\
&= pa^{p^k} + \sum_{i=2}^{k+1} p\varphi(p^{i-1}) a^{p^{k+1-i}} \\
&= p \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(p^{i-1}) a^{p^{k+1-i}} \\
&= p \sum_{i=0}^k \varphi(p^i) a^{p^{k-i}} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj kongruenciji iskoristili pretpostavku da je suma

$$\sum_{d|p^k} \varphi\left(\frac{p^k}{d}\right) a^d = \sum_{i=0}^k \varphi(p^i) a^{p^{k-i}}$$

djeljiva s p^k . □

Dokažimo konačno tvrdnju zadatka za sve prirodne brojeve $n \geq 2$ (za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi).

Neka je p prost djeliteľ broja n te p^α najveća potencija prostog broja p koja dijeli n . Tada djeliteľe od n možemo particionirati u skupove oblika $\{d, dp, \dots, dp^\alpha\}$ za svaki $d \mid n$ takav da je $D(d, p) = 1$. Time sada početnu sumu možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a^{(k,n)} &= \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d = \sum_{\substack{d|n \\ D(d,p)=1}} \left[\varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d + \varphi\left(\frac{n}{dp}\right) a^{dp} + \dots + \varphi\left(\frac{n}{dp^\alpha}\right) a^{dp^\alpha} \right] \\
&= \sum_{\substack{d|n \\ D(d,p)=1}} \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi\left(\frac{n}{dp^k}\right) a^{dp^k} \\
&= \sum_{\substack{d|n \\ D(d,p)=1}} \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi\left(\frac{n}{dp^\alpha}\right) \varphi(p^{\alpha-k}) a^{dp^k} \\
&= \sum_{\substack{d|n \\ D(d,p)=1}} \left[\varphi\left(\frac{n}{dp^\alpha}\right) \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi(p^{\alpha-k}) a^{dp^k} \right].
\end{aligned}$$

Prema prethodnoj lemi imamo da je

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \varphi(p^{\alpha-k}) a^{dp^k} = \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi(p^{\alpha-k}) (a^d)^{p^k} \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

pa iz prethodne jednakosti imamo da je onda također

$$\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)} \equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

Budući da je p bio proizvoljan djeliteľ broja n iz prethodnog slijedi da je tada suma $\sum_{k=1}^n a^{D(k,n)}$ djeljiva s n što smo i trebali dokazati.