

MEDO 2025./2026.

Prvo kolo

8.11.2025.

Loomen

Kadeti (5. i 6. r. OŠ)

Zadaci i rješenja

Zadatak K-1.1. [10 bodova]

Izračunaj

$$99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 4 \cdot (33 - 2 \cdot 11)]\}.$$

Rješenje.

Prisjetimo se pravilnog redoslijeda izvođenja računskih operacija:

1. najprije rješavamo zagrade, i to od **unutrašnjih prema vanjskima**
2. zatim provodimo množenje i dijeljenje, redom **sljeva nadesno**
3. na kraju zbrajamo i oduzimamo, također redom **sljeva nadesno**.

Primijenimo li to na izraz u zadatku, dobijemo:

$$\begin{aligned} 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 4 \cdot (33 - 2 \cdot 11)]\} &= 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 4 \cdot (33 - 22)]\} \\ &= 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 4 \cdot 11]\} \\ &= 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot [55 - 44]\} \\ &= 99 - 8 \cdot \{77 - 6 \cdot 11\} \\ &= 99 - 8 \cdot \{77 - 66\} \\ &= 99 - 8 \cdot 11 \\ &= 99 - 88 = 11. \end{aligned}$$

Zadatak K-1.2. [15 bodova]

Jakov je prvog dana u mjesecu dobio mjesečni džeparac. Na početku mjeseca, Jakov je kupio tri bilježnice na kvadratiće za ukupno 6 eura. Sredinom mjeseca Jakov je kupio novu loptu za polovinu preostalog iznosa koji mu je ostao od džeparca. Na kraju mjeseca kupio je četiri bilježnice na linije, koje koštaju (svaka pojedinačno) upola manje od bilježnica na kvadratiće. Za preostalih 18 eura džeparca Jakov je kupio ulaznice za kazališnu predstavu za svoju sestru i sebe.

Koliki džeparac je dobio Jakov?

Rješenje.

Zadatak ćemo riješiti „od kraja prema početku”. Naime, znamo da je tijekom mjeseca Jakov potrošio cijeli džeparac, tj. na kraju mu je ostalo 0 eura. To nam služi kao početna točka od koje se vraćamo unatrag da bismo odredili koliki džeparac je Jakov dobio na početku mjeseca.

Prije nego što je kupio karte za predstavu, Jakov je imao 18 eura.

Prije toga kupio je 4 bilježnice na linije. Odredimo koliko su one koštale. Svaka bilježnica na linije košta upola manje od jedne bilježnice na kvadratiće. Na početku saznamo da je Jakov tri bilježnice na

kvadratiće platio ukupno 6 eura. Iz toga zaključujemo da jedna bilježnica na kvadratiće košta $6 : 3 = 2$ eura. Tada vrijedi da jedna bilježnica na linije košta $2 : 2 = 1$ euro. Četiri takve bilježnice onda koštaju $4 \cdot 1 = 4$ eura. Dakle, Jakov je prije kupovine bilježnica na linije imao $18 + 4 = 22$ eura.

Jakov je dao pola iznosa koji mu je u tom trenutku ostao od džeparca da kupi loptu. Nakon toga mu je preostala druga polovina, dakle jednako koliko je i potrošio na loptu. Odredili smo da mu je ostalo 22 eura. Dakle, Jakov je loptu platio 22 eura, što znači da je prije kupovine lopte imao $22 \cdot 2 = 44$ eura.

Konačno, Jakov je na početku mjeseca kupio bilježnice na kvadratiće za 6 eura, što znači da je prije toga imao $44 + 6 = 50$ eura. Dakle, Jakov je na početku mjeseca dobio džeparac od 50 eura.

Zadatak K-1.3. [20 bodova]

Za tablicu koja se sastoji od tri retka i tri stupca kažemo da je *magični kvadrat* ako je u svako njeno polje upisan po jedan prirodan broj te vrijedi da su svi zbrojevi triju brojeva iz istog retka, stupca i glavne dijagonale međusobno jednaki. Dodatno, svi brojevi u poljima magičnog kvadrata moraju biti međusobno različiti. Glavne dijagonale tablice čine središnje polje i dva nasuprotna kutna polja.

Ivan i Lucija zapisali su na ploču svoje omiljene magične kvadrate. Zatim je Matej „zbrojio” Ivanov i Lucijin magični kvadrat, tj. zapisao je na ploču novi magični kvadrat u čijem je svakom polju zbroj brojeva koji su u odgovarajućim poljima u Ivanovom i Lucijinom magičnom kvadratu. No, kada je došla učiteljica, obrisala je neke od brojeva iz magičnih kvadrata. Na ploči je ostalo zapisano sljedeće:

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">2</td><td style="width: 40px;"></td><td style="width: 40px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">9</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	2			9						+	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">20</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">12</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>				20	12					=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center; padding: 5px;">17</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center; padding: 5px;">26</td></tr> </table>					17	5			26
2																															
9																															
20	12																														
	17	5																													
		26																													
Ivanova tablica		Lucijina tablica		Matejeva tablica																											

Odredi koji brojevi su bili upisani u preostalim poljima.

Rješenje.

Prema pravilu „zbroja tablica”, odmah možemo ispuniti središnje polje prve tablice brojem $17 - 12 = 5$ i prvo polje u drugom retku zadnje tablice brojem $9 + 20 = 29$. Polja koja ispunjavamo u ovom koraku označena su zelenom bojom:

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">2</td><td style="width: 40px;"></td><td style="width: 40px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">9</td><td style="background-color: #90EE90; text-align: center; padding: 5px;">5</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	2			9	5					+	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center; padding: 5px;">20</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">12</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>				20	12					=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="background-color: #90EE90; text-align: center; padding: 5px;">29</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">17</td><td style="text-align: center; padding: 5px;">5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center; padding: 5px;">26</td></tr> </table>				29	17	5			26
2																															
9	5																														
20	12																														
29	17	5																													
		26																													
Ivanova tablica		Lucijina tablica		Matejeva tablica																											

U zadnjoj (Matejevoj) tablici imamo ispunjen cijeli drugi redak pa možemo izračunati da je u njoj zbroj u svakom retku, stupcu i po dijagonali jednak $29 + 17 + 5 = 51$. To nam može pomoći da popunimo još neka polja zadnje tablice. Znamo da je

$$(\text{gornje lijevo polje}) + 17 + 26 = 51$$

pa u gornjem lijevom polju moramo imati broj 8. Slično, u drugom plavom polju (gornjem desnom) moramo imati $51 - (5 + 26) = 51 - 31 = 20$.

2		
9	5	

+

20	12	

=

8		20
29	17	5
		26

zbroy 51

Zadnju tablicu možemo u potpunosti popuniti na isti način, koristeći informaciju da je zbroj u svakom retku, stupcu i glavnoj dijagonali jednak 51. Za plava polja redom (odozgo prema dolje, slijeva nadesno) računamo:

$$\begin{aligned}
 51 - (8 + 20) &= 23 && \text{(prvi redak)} \\
 51 - (8 + 29) &= 14 && \text{(prvi stupac)} \\
 51 - (14 + 26) &= 11 && \text{(zadnji redak)}
 \end{aligned}$$

Još vidimo da znamo izračunati gornje lijevo (zeleno) polje druge tablice prema pravilu „zbroja tablica”. Kada broju 2 pribrojimo broj u tom polju dobivamo 8, pa u njemu mora biti 6.

2		
9	5	

+

6		
20	12	

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroy 51

Sada imamo potpuno popunjenu zadnju tablicu i po tri polja u prve dvije tablice. Za prve dvije tablice ne znamo koliki je zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama. Promotrimo desna polja u drugom retku. Znamo da zbroj žuto označenih polja mora biti jednak 5 te da svi brojevi u tablicama moraju biti prirodni. To znači da imamo samo četiri mogućnosti za popunjavanje žutih polja:

$$5 = 1 + 4, \quad 5 = 2 + 3, \quad 5 = 3 + 2, \quad 5 = 4 + 1$$

2		
9	5	

+

6		
20	12	

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroy 51

Provjerimo sve četiri mogućnosti. Prvo pretpostavimo da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 1, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 4. Na potpuno isti način na koji smo popunili treću tablicu sada možemo popuniti prvu i drugu. Naime, zbroj polja u drugom retku u prvoj je tablici jednak 15, a u drugoj 36. Koristeći te zbrojeve popunjavamo tablice po retcima i stupcima te dobivamo sljedeće rješenje:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

+

6	16	14
20	12	4
10	8	18

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 15
zbroj 36
zbroj 51

Provjerom možemo ustanoviti da su svi uvjeti u zadatku zadovoljeni (pravilo „zbroja tablica”, pravilo magičnog kvadrata, svi brojevi su prirodni i unutar svake tablice međusobno različiti) pa zaključujemo da je to zaista jedno rješenje.

Pretpostavimo sada da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 2, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 3. Odmah vidimo da ovaj slučaj zapravo nije dozvoljen budući da u prvoj tablici nisu svi brojevi međusobno različiti (pojavljuju se dvije dvojke).

2		
9	5	2

+

6		
20	12	3

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 51

Dalje pretpostavimo da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 3, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 2. Ponovno koristimo zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama da izračunamo preostale brojeve u tablicama (zbroj u prvoj tablici jednak je 17, a u drugoj 34). Međutim, u drugoj tablici ne možemo dobiti zadovoljeno svojstvo magičnog kvadrata — ako koristimo jednak zbroj po retcima i stupcima, na dijagonali označenoj crvenom bojom dobivamo drugačiji zbroj, 36 umjesto 34. Dakle, niti ovaj slučaj ne daje nam rješenje.

2	11	4
9	5	3
6	1	10

+

6	12	16
20	12	2
8	10	16

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 17
zbroj 34
zbroj 51

Za kraj, promotrimo i slučaj kada je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 4, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 1. Na potpuno isti način vidimo da je zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama u prvoj tablici jednak 18 i popunjavamo preostala polja. No, ponovno nailazimo na isti problem kao i u prethodnom slučaju.

2	10	6
9	5	4
7	3	8

+

6		
20	12	1

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 18
zbroj 51

Dobili smo samo jednu mogućnost koja zadovoljava sve postavljene uvjete. Dakle, prije učiteljičinog brisanja na ploči su bile sljedeće tablice:

2	7	6		6	16	14		8	23	20
9	5	1	+	20	12	4	=	29	17	5
4	3	8		10	8	18		14	11	26
Ivanova tablica				Lucijina tablica				Matejeva tablica		

Zadatak K-1.4. [25 bodova]

Tonka pomaže mami napraviti kolač. U receptu piše da je za kolač potrebno 4 dl mlijeka. Mlijeko se nalazi u posudi od 8 dl koja je do vrha ispunjena mlijekom. Tonka ima još dvije prazne posude na raspolaganju, jednu od 3 dl, a drugu od 5 dl. Tonka može prelijevati mlijeko iz posude u posudu.

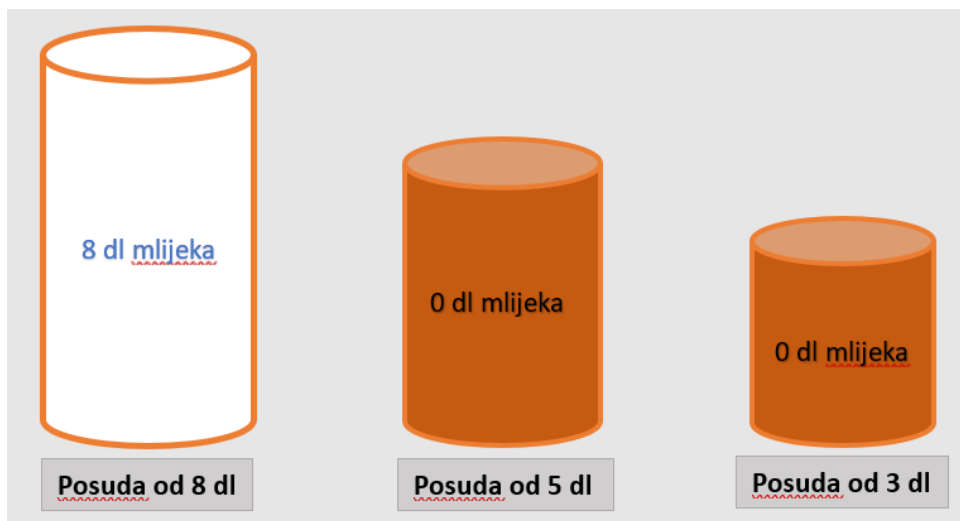
Može li Tonka postići da u nekoj od tri posude koje ima na raspolaganju bude točno 4 dl mlijeka?

Posude nemaju nikakve oznake na sebi. Tonka nema na raspolaganju nikakvo drugo pomagalo za određivanje količine mlijeka u posudi, niti može koristiti neku drugu posudu osim tri navedene, niti odliti mlijeko iz posude igdje drugdje.

Rješenje.

Ovdje ćemo opisati jedan slijed prelijevanja kojim dolazimo do tražene količine mlijeka, od mnogih mogućih.

Polazna situacija izgleda kao na slici:



Označimo tu situaciju s $(8, 0, 0)$. Prva brojka odgovara trenutnoj količini mlijeka u prvoj posudi (zapremine 8 dl), itd.

Tonka u prvom koraku može prelići mlijeko iz prve posude u drugu. Kako nema nikakav način da odredi koliku količinu prelijeva, mora napuniti drugu posudu do vrha da zna da je u njoj točno 5 dl mlijeka. U prvoj posudi tada ostaje $8 - 5 = 3$ dl, pa je stanje količine mlijeka nakon ovog prelijevanja opisano s $(3, 5, 0)$. Ovo prelijevanje možemo stoga zapisati na sljedeći način:

$$(8, 0, 0) \rightarrow (3, 5, 0).$$

Kao drugi korak Tonka može prelići 3 dl mlijeka iz druge posude u treću (da ispuni treću posudu do vrha). U drugoj posudi tada ostane $5 - 3 = 2$ dl mlijeka:

$$(3, \hat{5}, 0) \rightarrow (3, 2, 3).$$

Trenutno stanje:



Ako Tonka u sljedećem koraku prelije sadržaj treće posude u prvu posudu, doći ćemo do situacije opisane trojkom $(6, 2, 0)$.

Daljnji Tonkini koraci prelijevanja mogu biti:

$$(6, \hat{2}, 0) \rightarrow (\hat{6}, 0, 2) \rightarrow (1, \hat{5}, 2) \rightarrow (1, \boxed{4}, 3).$$

Primjećujemo da se u drugoj posudi sada nalazi točno 4 dl mlijeka, što smo željeli dobiti.

Zadatak K-1.5. [30 bodova]

Andreina soba ima oblik kvadra. Odlučila je obojiti sva četiri zida sobe. S jednom litrom boje može se obojiti 955 dm^2 zida. Duljina sobe je 42 dm, a širina 4 m. Vrata sobe su pravokutnog oblika, visine 21 dm, a širine 1 m. U sobi su dva jednaka pravokutna prozora visine 13 dm i širine 9 dm. Pod i strop sobe se ne bojaju, kao ni vrata i prozori.

Ako je Andrea za bojanje sobe potrošila točno 4 litre boje, kolika je visina njezine sobe?

Rješenje.

Zidovi Andreine sobe (uključujući vrata i prozore kao dio zida) imaju oblik pravokutnika. Površinu P pravokutnika sa stranicama duljine a i b računamo formulom $P = a \cdot b$.

Odredimo koliku površinu zida je obojila Andrea. Iskoristila je 4 litra boje, a svakom litrom oboja 955 dm^2 zida. Dakle, ukupno je obojila $4 \cdot 955 = 3820 \text{ dm}^2$ zida.

Ako ovoj površini pridodamo površine vrata i prozora, dobit ćemo ukupnu površinu 4 pravokutnika koje čine zidovi Andreine sobe. Kako su i vrata i prozori pravokutnog oblika, njihovu površinu također računamo kao umnožak njihove visine i širine. Vrata stoga imaju površinu (pazimo na mjerne jedinice, $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$) $21 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 210 \text{ dm}^2$. Svaki prozor ima površinu $13 \text{ dm} \cdot 9 \text{ dm} = 117 \text{ dm}^2$. Ukupna površina sva četiri zida Andreine sobe, zajedno s prozorima i vratima, iznosi:

$$3820 \text{ dm}^2 + 210 \text{ dm}^2 + 2 \cdot 117 \text{ dm}^2 = 4264 \text{ dm}^2.$$

Označimo visinu Andreine sobe s v (u decimetrima). Tada površina jednog dužeg zida Andreine sobe iznosi $42 \cdot v$, a kraćeg zida $40 \cdot v$. Ukupna površina svih zidova mora biti jednaka dobivenoj vrijednosti 4264 dm^2 , pa možemo zapisati jednadžbu:

$$2 \cdot (42 \cdot v) + 2 \cdot (40 \cdot v) = 4264.$$

Pojednostavljujemo jednadžbu tako da zbrajamo koeficijente uz nepoznanicu v :

$$84 \cdot v + 80 \cdot v = 4264$$

$$164 \cdot v = 4264$$

Pitamo se dakle koji broj pomnožen s brojem 164 daje broj 4264. Odgovor se dobije dijeljenjem $4264 : 164 = 26$. Dakle, visina Andreine sobe iznosi 26 dm.

Zadatak K-1.6. [35 bodova]

Martin je prošle školske godine pisao ukupno šest testova iz matematike. Na svakom testu moguće je ostvariti bilo koji cijeli broj bodova između 0 i 100 (uključujući i te brojeve). Na prvih pet testova Martin je ostvario jednak broj bodova. Prosječan broj bodova koje je Martin ostvario na svih šest testova iznosi 72.

Koliko je bodova Martin mogao ostvariti na zadnjem testu?

Rješenje.

Prisjetimo se najprije da se prosjek nekih vrijednosti (primjerice ocjena ili bodova) računa tako da zbrojimo sve vrijednosti i podijelimo ih s njihovim brojem:

$$\text{prosjeck} = \frac{\text{zbroj vrijednosti}}{\text{broj vrijednosti}}.$$

U ovom slučaju, mi znamo da je broj vrijednosti 6, a njihov prosjek iznosi 72. Stoga možemo dobiti zbroj svih vrijednosti, tj. ukupni broj bodova koji je Martin ostvario na svih 6 testova zajedno, tako da pomnožimo prosjek i broj vrijednosti: $6 \cdot 72 = 432$.

Označimo sada broj bodova koji je Martin ostvario na prvih pet testova s A , a broj bodova koji je ostvario na zadnjem testu s B . Tada mora vrijediti jednakost:

$$5 \cdot A + B = 432.$$

Brojevi A i B su cijeli brojevi veći ili jednaki 0 i manji ili jednaki 100. Jednadžba u kojoj imamo više nepoznanica, koje su sve cijeli brojevi, naziva se *diofantska jednadžba*.

Jedno od najkorisnijih svojstava cijelih brojeva koje možemo koristiti u rješavanju diofantskih jednadžbi je **djeljivost** cijelih brojeva.

Promotrimo pomnije našu jednadžbu. Prvi pribrojnik s lijeve strane $5A$ je očito višekratnik broja 5. Broj s desne strane jednakosti 432 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5. Zato možemo zaključiti da drugi pribrojnik s lijeve strane B mora davati ostatak 2 pri dijeljenju s 5, da bi se ti ostatci poklapali s lijeve i desne strane (jer su to zapravo isti brojevi).

Dakle, broj B mora imati ostatak 2 pri dijeljenju s 5. Stoga su mogući kandidati za broj B sljedeći:

$$2, 7, 12, 17, 22, \dots, 87, 92, 97.$$

Ostaje još provjeriti da li za svaku ovu moguću vrijednost broja B postoji i odgovarajuća valjana vrijednost za broj A . Za najmanju vrijednost $B = 2$, dobijemo da mora biti $5A + 2 = 432$, odnosno $5A = 430$, pa je $A = 430 : 5 = 86$, što je valjana vrijednost. Za najveću vrijednost $B = 97$ dobijemo $5A + 97 = 432$, tj. $5A = 335$, pa je $A = 67$, što je također valjana vrijednost. Za sve vrijednosti između

ova dva ekstrema ćemo također dobiti valjanu vrijednost od A (znamo da je broj $432 - B$ djeljiv s 5, po našem izboru brojeva B , te će vrijednost od A biti između 67 i 86, što su sve moguće vrijednosti).

Dakle, na drugom testu je Jakov mogao dobiti bilo koji od sljedećih brojeva bodova: 2, 7, 12, 17, 22, ..., 87, 92, 97.

Zadatak K-1.7. [40 bodova]

Peteroznamenasti broj zovemo *pikantnim* ako za njega vrijede sljedeća tri svojstva:

- smije sadržavati samo znamenke 0, 1, 3, 5, 7 i 9
- sve znamenke su mu međusobno različite
- nije višekratnik broja 30.

Koliko ima pikantnih brojeva?

Rješenje.

Kada trebamo prebrojiti složene objekte s nekim svojstvima, korisno je zauzeti „konstruktivan” pristup: najprije uočimo od kojih se sastavnih dijelova sastoji svaki traženi objekt i pokušamo ga sastaviti dio po dio od tih dijelova, pazeći pritom da su tražena svojstva ispunjena. U svakom koraku „sastavljanja” brojimo koliko različitih mogućnosti imamo za pojedini sastavni dio i na kraju izbrojimo koliko ima mogućih kombinacija tih sastavnih dijelova.

U ovom zadatku, objekti koje želimo prebrojiti su peteroznamenasti brojevi s određenim svojstvima. Sastavni dijelovi peteroznamenastih brojeva su pet znamenki od kojih se oni sastoje (naravno, važno je u kojem poretku su posložene te znamenke). Dakle, svaki pikantni broj možemo konstruirati znamenku po znamenku, pazeći pritom da poštujemo svojstva koja oni moraju imati.

Krenimo najprije od jednostavnijeg problema – prebrojimo najprije koliko peteroznamenastih brojeva zadovoljava samo prvo svojstvo pikantnih brojeva. Pitamo se dakle koliko postoji peteroznamenastih brojeva koji su sastavljeni samo od znamenki 0, 1, 3, 5, 7 i 9 (za sada se mogu ponavljati unutar broja). Konstruiramo naš broj znamenku po znamenku i u svakom koraku bilježimo koliko imamo različitih mogućnosti.

- Prva znamenka našeg broja može biti bilo koja od 1, 3, 5, 7 ili 9. Naime, znamo da prva znamenka peteroznamenastog broja ne smije biti 0. Dakle, imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku našeg broja.
- Druga znamenka našeg broja može biti bilo koja od 0, 1, 3, 5, 7 ili 9. Nula može biti na drugom mjestu, a brojevi se smiju ponavljati pa smijemo uzeti i broj koji smo izabrali za prvo mjesto. Stoga za drugu znamenku imamo 6 mogućnosti.
- Treća znamenka se također može odabrati na 6 načina.
- Četvrta znamenka se također može odabrati na 6 načina.
- Peta znamenka se također može odabrati na 6 načina.

Sada znamo koliko imamo mogućnosti za svaku pojedinu znamenku. Dalje bismo htjeli odrediti na koliko načina se od ovih znamenki može sastaviti konačni broj. Da bismo izračunali tu vrijednost, koristimo princip poznat pod nazivom *princip uzastopnog prebrojavanja*. Naime, prebrojili smo broj mogućnosti za svaku pojedinu znamenku, a sada ih trebamo sastaviti uzastopno, jednu za drugom, i odrediti koliko je ukupni broj objekata koje dobijemo nakon svih takvih sastavljanja.

Princip uzastopnog prebrojavanja je vrlo jednostavan. On kaže da ako sastavni dijelovi ne ovise jedan o drugom (jedan ne uvjetuje ili ikako utječe na drugi), tada je broj mogućnosti za njihovo sastavljanje jednak **umnošku** broja mogućnosti za svaki pojedini sastavni dio. U našem slučaju, doista vrijedi da znamenke ne ovise jedna o drugoj. Stoga je ukupni traženi broj peteroznamenastih brojeva koji se

sastoje samo od znamenaka 0, 1, 3, 5, 7 ili 9 jednak umnošku

$$\frac{5}{\text{prva znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{druga znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{treća znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{četvrta znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{peta znamenka}}.$$

Uključimo sada i drugi uvjet u igru – znamenke u konstruiranom peteroznamenkastom broju ne smiju biti jednake. Sada se problem čini kompliciraniji, jer izbori znamenki počinju utjecati jedni na druge: čim iskoristimo jednu znamenku, ne smije se više pojavljivati nigdje drugdje u konačnom broju. Međutim, to možemo uzeti u obzir kada brojimo mogućnosti za pojedine znamenke i osigurati da izbori znamenki i dalje ostanu neovisni jedni o drugima.

Razmišljamo ovako. Na mjesto prve znamenke peteroznamenkastog broja ponovno možemo odabrati bilo koju od znamenki 1, 3, 5, 7 ili 9, dakle ponovno imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku. Koju god znamenku da odaberemo, ne smijemo više koristiti tu istu znamenku na drugim mjestima. Stoga u svakom sljedećem koraku imamo jednu mogućnost manje nego u prethodnom koraku.

- Druga znamenka našeg broja može biti bilo koja od 0, 1, 3, 5, 7 ili 9, osim one koja je na prvom mjestu. Stoga za drugu znamenku imamo $6 - 1 = 5$ mogućnosti.
- Treća znamenka ne smije biti jednaka prvoj niti drugoj. Stoga imamo $6 - 2 = 4$ mogućnosti.
- Četvrta znamenka se može odabrati na $6 - 3 = 3$ načina.
- Peta znamenka se može odabrati na $6 - 4 = 2$ načina.

Koristeći princip uzastopnog prebrojavanja, dobijemo da je ukupan broj mogućnosti u ovom slučaju jednak:

$$\frac{5}{\text{prva znamenka}} \cdot \frac{5}{\text{druga znamenka}} \cdot \frac{4}{\text{treća znamenka}} \cdot \frac{3}{\text{četvrta znamenka}} \cdot \frac{2}{\text{peta znamenka}} = 600.$$

Konačno stižemo i do trećeg uvjeta, koji je i najkompliciraniji što se tiče prebrojavanja mogućnosti. Sada naime od svih 600 brojeva koje smo konstruirali u prethodnom prebrojavanju moramo pronaći koliko ih je koji nisu djeljivi s 30. Najprije primijetimo da možemo pokušati pronaći broj brojeva koji jesu djeljivi s 30 (to se čini prirodnije) i onda oduzeti taj broj od ukupnog broja svih brojeva (600). To pravilo prebrojavanja se zove *pravilo komplementa*.

Dakle, želimo brojati samo one brojeve koji su djeljivi s 30. Podsjetimo se stoga pravila o djeljivosti. Kada je broj djeljiv brojem 30? Onda (i samo onda) kada je djeljiv brojevima 3 i 10. Kada je broj djeljiv s 10? Onda (i samo onda) kada mu je zadnja znamenka 0. Što je s djeljivošću s brojem 3? Prisjetimo se da je broj djeljiv s brojem 3 ako (i samo ako) mu je zbroj svih znamenki djeljiv s 3.

Dakle, prilikom konstrukcije svih brojeva koje sada želimo prebrojiti moramo osigurati da im je zadnja znamenka jednaka 0 te da im je zbroj znamenki djeljiv s 3. Najprije odredimo koje kombinacije od 4 različite znamenke između preostalih dozvoljenih znamenki 1, 3, 5, 7 ili 9 u zbroju daju broj djeljiv s 3. To su samo sljedeće 2 kombinacije:

$$1, 3, 5, 9; 3, 5, 7, 9.$$

U svakom od ova dva podslučaja još samo trebamo rasporediti ove znamenke na prva 4 mjesta (na petom mjestu znamo da mora biti znamenka 0). Ponovno koristeći princip uzastopnog umnoška dobijemo da to možemo učiniti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Dakle, ukupno ćemo imati $2 \cdot 24 = 48$ brojeva djeljivih s 30 među ranije izbrojanih 600 koji zadovoljavaju prva dva svojstva pikantnih brojeva. Konačno zaključujemo, po pravilu komplementa, da pikantnih brojeva ima $600 - 48 = 552$.

Zadatak K-1.8. [45 bodova]

Neka je K prirodan broj. Ana i Bojan naprave hrpu od K kamenčića i zatim igraju igru. Naizmjenice, jedno za drugim uzimaju s hrpe ili jedan kamenčića ili četiri kamenčića, sve dok na hrpi ima još kamenčića. Pobjednik je onaj tko zadnji uzme kamenčić ili kamenčiće s hrpe.

Ako Ana igra prva, za koliko brojeva K manjih od 1000 Bojan ima strategiju koja mu osigurava pobjedu?

Rješenje.

Promotrimo prvo tko ima pobjedničku strategiju u slučaju da je K jedan od malih brojeva 1, 2, 3, 4, 5.

$K = 1$: Ana uzima jedan kamenčić i pobjeđuje.

$K = 2$: Ana može uzeti samo jedan kamenčić jer nema dovoljno kamenčića da uzme 4. Bojan uzima preostali kamenčić i pobjeđuje.

$K = 3$: Ana opet može uzeti samo 1 kamenčić, ali isto vrijedi i za Bojana. Ostaje jedan kamenčić koji uzima Ana.

$K = 4$: Ana uzima 4 kamenčića i pobjeđuje.

$K = 5$: Ako Ana uzme 1 kamenčić, Bojan će uzeti 4, a ako Ana uzme 4, Bojan će uzeti preostali kamenčić.

Dakle, Ana pobjeđuje za $K = 1, 3, 4$, a Bojan za $K = 2, 5$.

U nastavku ćemo pokazati da tko ima pobjedničku strategiju ovisi o tome koji je ostatak broja K pri dijeljenju s 5.

$K = 5N$: Ako je K djeljiv s 5, neovisno koliko kamenčića uzme Ana, Bojan uvijek može napraviti potez tako da nakon njega ostane broj kamenčića koji je ponovno djeljiv s 5 (ako Ana uzme 1, Bojan uzme 4 i obratno). Bojan nastavlja ovu strategiju u svakom sljedećem potezu i pobjeđuje.

$K = 5N + 1$: U ovom slučaju Ana može uzeti 1 kamenčić, tako da nakon njenog poteza broj kamenčića na hrpi bude djeljiv s 5. Sada je broj kamenčića djeljiv s 5, ali uloge su zamijenjene. Bojan igra sljedeći i neovisno što on napravi, Ana može koristiti Bojanovu strategiju kao igrača koji igra drugi iz prethodnog slučaja ($K = 5N$). Stoga, neovisno kako Bojan igra, Ana pobjeđuje.

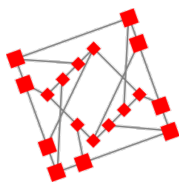
$K = 5N + 2$: Slično kao u slučaju kada je $K = 5N$, neovisno što Ana napravi, Bojan može napraviti potez tako da se djeljivost broja kamenčića s 5 ne promijeni nakon njegovog poteza. To može raditi sve dok ne ostanu samo 2 kamenčića na Aninom potezu. Na početku smo vidjeli da u tom slučaju Bojan pobjeđuje.

$K = 5N + 3$: Sada Ana može uzeti 1 kamenčić, nakon čega ostaje $5N + 2$ kamenčića. Koristeći istu strategiju kao Bojan u prethodnom slučaju, ovaj put Ana pobjeđuje.

$K = 5N + 4$: Analogno slučaju $K = 5N + 1$, samo što Ana u prvom potezu uzme 4 kamenčića.

Dakle, Bojan ima pobjedničku strategiju ako je K djeljiv s 5 ili daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5. U ostalim slučajevima pobjeđuje Ana.

Ostalo je prebrojati koliko ima takvih brojeva od 1 do 999. Kako je $999 = 199 \cdot 5 + 4$, brojevi djeljivi s 5 u traženom rasponu su $1 \cdot 5, 2 \cdot 5, \dots, 199 \cdot 5$. Njih ima 199. Brojevi koji daju ostatak 2 pri dijeljenju s 5 u ovom rasponu su $0 \cdot 5 + 2, 1 \cdot 5 + 2, \dots, 199 \cdot 5 + 2$. Dakle 200 brojeva. Stoga je ukupan broj brojeva K manjih od 1000 za koje Bojan ima pobjedničku strategiju $199 + 200 = 399$.



MEDO 2025./2026.

Prvo kolo

8.11.2025.

Loomen

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Zadaci i rješenja

Zadatak J-1.1. [10 bodova]

Jakov je prvog dana u mjesecu dobio mjesečni džeparac. Na početku mjeseca, Jakov je kupio tri bilježnice na kvadratiće za ukupno 6 eura. Sredinom mjeseca Jakov je kupio novu loptu za polovinu preostalog iznosa koji mu je ostao od džeparca. Na kraju mjeseca kupio je četiri bilježnice na linije, koje koštaju (svaka pojedinačno) upola manje od bilježnica na kvadratiće. Za preostalih 18 eura džeparca Jakov je kupio ulaznice za kazališnu predstavu za svoju sestru i sebe.

Koliki džeparac je dobio Jakov?

Prvo rješenje.

Zadatak ćemo riješiti „od kraja prema početku”. Naime, znamo da je tijekom mjeseca Jakov potrošio cijeli džeparac, tj. na kraju mu je ostalo 0 eura. To nam služi kao početna točka od koje se vraćamo unatrag da bismo odredili koliki džeparac je Jakov dobio na početku mjeseca.

Prije nego što je kupio karte za predstavu, Jakov je imao 18 eura.

Prije toga kupio je 4 bilježnice na linije. Odredimo koliko su one koštale. Svaka bilježnica na linije košta upola manje od jedne bilježnice na kvadratiće. Na početku saznamo da je Jakov tri bilježnice na kvadratiće platio ukupno 6 eura. Iz toga zaključujemo da jedna bilježnica na kvadratiće košta $6 : 3 = 2$ eura. Tada vrijedi da jedna bilježnica na linije košta $2 : 2 = 1$ euro. Četiri takve bilježnice onda koštaju $4 \cdot 1 = 4$ eura. Dakle, Jakov je prije kupovine bilježnica na linije imao $18 + 4 = 22$ eura.

Jakov je dao pola iznosa koji mu je u tom trenutku ostao od džeparca da kupi loptu. Nakon toga mu je preostala druga polovina, dakle jednako koliko je i potrošio na loptu. Odredili smo da mu je ostalo 22 eura. Dakle, Jakov je loptu platio 22 eura, što znači da je prije kupovine lopte imao $22 \cdot 2 = 44$ eura.

Konačno, Jakov je na početku mjeseca kupio bilježnice na kvadratiće za 6 eura, što znači da je prije toga imao $44 + 6 = 50$ eura. Dakle, Jakov je na početku mjeseca dobio džeparac od 50 eura.

Drugo rješenje.

Postavimo pažljivo jednadžbu:

Na početku mjeseca je Jakov imao neki iznos X . Zatim je potrošio 6 eura, pa je nakon prve kupovine imao $X - 6$ preostalo.

Zatim je potrošio polovinu od iznosa koji mu je ostao na loptu, što znači da mu je ostala druga polovica, tj. $(X - 6)/2$.

Konačno, u zadnjoj kupnji je kupio 4 bilježnice na linije. Budući da su tri bilježnice na kvadratiće bile 6 eura, onda je svaka bilježnica na kvadratiće 2 eura. Budući da su bilježnice na linije upola jeftinije, onda je svaka koštala po 1 euro, odnosno ukupno je potrošio 4 eura.

Dakle, ostalo mu je $(X - 6)/2 - 4$, što nam zadatak kaže da je točno 18 eura za karte za kazalište.

Rješavamo:

$$\begin{aligned}
 (X - 6)/2 - 4 &= 18 \\
 (X - 6)/2 &= 18 + 4 \\
 (X - 6)/2 &= 22 && / \cdot 2 \\
 X - 6 &= 44 \\
 X &= 44 + 6 \\
 X &= 50
 \end{aligned}$$

Dakle, Jakov je na početku mjeseca dobio džeparac od 50 eura.

Zadatak J-1.2. [15 bodova]

Za tablicu koja se sastoji od tri retka i tri stupca kažemo da je *magični kvadrat* ako je u svako njeno polje upisan po jedan prirodan broj te vrijedi da su svi zbrojevi triju brojeva iz istog retka, stupca i glavne dijagonale međusobno jednaki. Dodatno, svi brojevi u poljima magičnog kvadrata moraju biti međusobno različiti. Glavne dijagonale tablice čine središnje polje i dva nasuprotna kutna polja.

Ivan i Lucija zapisali su na ploču svoje omiljene magične kvadrate. Zatim je Matej “zbrojio” Ivanov i Lucijin magični kvadrat, tj. zapisao je na ploču novi magični kvadrat u čijem je svakom polju zbroj brojeva koji su u odgovarajućim poljima u Ivanovom i Lucijinom magičnom kvadratu. No, kada je došla učiteljica, obrisala je neke od brojeva iz magičnih kvadrata. Na ploči je ostalo zapisano sljedeće:

2										
9			+	20	12		=		17	5
										26

Odredi koji brojevi su bili upisani u preostalim poljima.

Rješenje.

Prema pravilu „zbroja tablica”, odmah možemo ispuniti središnje polje prve tablice brojem $17 - 12 = 5$ i prvo polje u drugom retku zadnje tablice brojem $9 + 20 = 29$. Polja koja ispunjavamo u ovom koraku označena su zelenom bojom:

2										
9	5		+	20	12		=	29	17	5
										26
Ivanova tablica				Lucijina tablica				Matejeva tablica		

U zadnjoj (Matejevoj) tablici imamo ispunjen cijeli drugi redak pa možemo izračunati da je u njoj zbroj u svakom retku, stupcu i po dijagonali jednak $29 + 17 + 5 = 51$. To nam može pomoći da popunimo još neka polja zadnje tablice. Znamo da je

$$(\text{gornje lijevo polje}) + 17 + 26 = 51$$

pa u gornjem lijevom polju moramo imati broj 8. Slično, u drugom plavom polju (gornjem desnom) moramo imati $51 - (5 + 26) = 51 - 31 = 20$.

2		
9	5	

 $+$

20	12	

 $=$

8		20
29	17	5
		26

zbroj 51

Zadnju tablicu možemo u potpunosti popuniti na isti način, koristeći informaciju da je zbroj u svakom retku, stupcu i glavnoj dijagonali jednak 51. Za plava polja redom (odozgo prema dolje, slijeva nadesno) računamo:

$$\begin{aligned}
 51 - (8 + 20) &= 23 && \text{(prvi redak)} \\
 51 - (8 + 29) &= 14 && \text{(prvi stupac)} \\
 51 - (14 + 26) &= 11 && \text{(zadnji redak)}
 \end{aligned}$$

Još vidimo da znamo izračunati gornje lijevo (zeleno) polje druge tablice prema pravilu „zbroja tablica”. Kada broju 2 pribrojimo broj u tom polju dobivamo 8, pa u njemu mora biti 6.

2		
9	5	

 $+$

6		
20	12	

 $=$

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 51

Sada imamo potpuno popunjenu zadnju tablicu i po tri polja u prve dvije tablice. Za prve dvije tablice ne znamo koliki je zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama. Promotrimo desna polja u drugom retku. Znamo da zbroj žuto označenih polja mora biti jednak 5 te da svi brojevi u tablicama moraju biti prirodni. To znači da imamo samo četiri mogućnosti za popunjavanje žutih polja:

$$5 = 1 + 4, \quad 5 = 2 + 3, \quad 5 = 3 + 2, \quad 5 = 4 + 1$$

2		
9	5	

 $+$

6		
20	12	

 $=$

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 51

Provjerimo sve četiri mogućnosti. Prvo pretpostavimo da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 1, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 4. Na potpuno isti način na koji smo popunili treću tablicu sada možemo popuniti prvu i drugu. Naime, zbroj polja u drugom retku u prvoj je tablici jednak 15, a u drugoj 36. Koristeći te zbrojeve popunjavamo tablice po retcima i stupcima te dobivamo sljedeće rješenje:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

+

6	16	14
20	12	4
10	8	18

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 15
zbroj 36
zbroj 51

Provjerom možemo ustanoviti da su svi uvjeti u zadatku zadovoljeni (pravilo „zbroja tablica”, pravilo magičnog kvadrata, svi brojevi su prirodni i unutar svake tablice međusobno različiti) pa zaključujemo da je to zaista jedno rješenje.

Pretpostavimo sada da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 2, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 3. Odmah vidimo da ovaj slučaj zapravo nije dozvoljen budući da u prvoj tablici nisu svi brojevi međusobno različiti (pojavljuju se dvije dvojke).

2		
9	5	2

+

6		
20	12	3

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 51

Dalje pretpostavimo da je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 3, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 2. Ponovno koristimo zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama da izračunamo preostale brojeve u tablicama (zbroj u prvoj tablici jednak je 17, a u drugoj 34). Međutim, u drugoj tablici ne možemo dobiti zadovoljeno svojstvo magičnog kvadrata — ako koristimo jednak zbroj po retcima i stupcima, na dijagonali označenoj crvenom bojom dobivamo drugačiji zbroj, 36 umjesto 34. Dakle, niti ovaj slučaj ne daje nam rješenje.

2	11	4
9	5	3
6	1	10

+

6	12	16
20	12	2
8	10	16

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 17
zbroj 34
zbroj 51

Za kraj, promotrimo i slučaj kada je u prvoj tablici na desnom mjestu u drugom retku broj 4, a na odgovarajućem mjestu u drugoj tablici broj 1. Na potpuno isti način vidimo da je zbroj po retcima, stupcima i dijagonalama u prvoj tablici jednak 18 i popunjavamo preostala polja. No, ponovno nailazimo na isti problem kao i u prethodnom slučaju.

2	10	6
9	5	4
7	3	8

+

6		
20	12	1

=

8	23	20
29	17	5
14	11	26

zbroj 18
zbroj 51

Dobili smo samo jednu mogućnost koja zadovoljava sve postavljene uvjete. Dakle, prije učiteljičinog brisanja na ploči su bile sljedeće tablice:

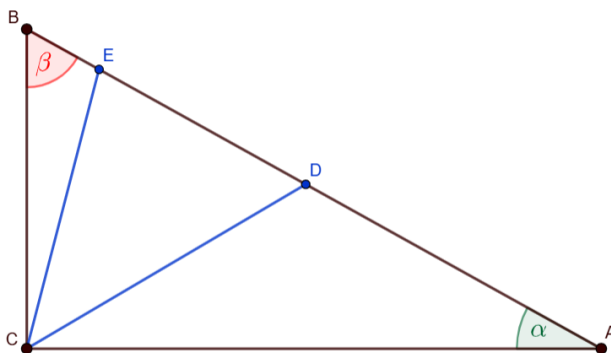
2	7	6		6	16	14		8	23	20
9	5	1	+	20	12	4	=	29	17	5
4	3	8		10	8	18		14	11	26
Ivanova tablica				Lucijina tablica				Matejeva tablica		

Zadatak J-1.3. [20 bodova]

Na hipotenuzi $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC istaknute su točke D i E tako da vrijedi $|BD| = |BC|$ i $|AC| = |AE|$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle DCE$.

Rješenje.

Označimo kut $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle CBA = \beta$. Iz pravila za zbroj kutova u trokutu primijenjenom na trokut ABC dobijemo da vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$.



Uočimo da su trokuti CDB i ECA jednakokrani budući da je $|BD| = |BC|$ i $|AC| = |AE|$. Za oba ova trokuta poznati su nam kutovi nasuprot osnovice: to su $\sphericalangle CBD = \beta$ i $\sphericalangle CAE = \alpha$. Kako su kutovi uz krakove jednakokrannog trokuta jednaki, a zbroj kutova u trokutu je jednak 180° , možemo izračunati kutove uz krakove u trokutima CDB i ECA :

$$\begin{aligned}\sphericalangle BDC &= \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \\ \sphericalangle CEA &= \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Sada u trokutu $\triangle CDE$ imamo poznata dva od tri kuta, a preostali nepoznati kut je točno onaj koji želimo izračunati. Dobijemo:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DCE &= 180^\circ - (\sphericalangle BDC + \sphericalangle CEA) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 180^\circ - 180^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.\end{aligned}$$

Zadatak J-1.4. [25 bodova]

Peteroznamenasti broj zovemo *pikantnim* ako za njega vrijede sljedeća tri svojstva:

- smije sadržavati samo znamenke 0, 1, 3, 5, 7 i 9
- sve znamenke su mu međusobno različite
- nije višekratnik broja 30.

Koliko ima pikantnih brojeva?

Rješenje.

Kada trebamo prebrojiti složene objekte s nekim svojstvima, korisno je zauzeti „konstruktivan” pristup: najprije uočimo od kojih se sastavnih dijelova sastoji svaki traženi objekt i pokušamo ga sastaviti dio po dio od tih dijelova, pazeći pritom da su tražena svojstva ispunjena. U svakom koraku „sastavljanja” brojimo koliko različitih mogućnosti imamo za pojedini sastavni dio i na kraju izbrojimo koliko ima mogućih kombinacija tih sastavnih dijelova.

U ovom zadatku, objekti koje želimo prebrojiti su peteroznamenasti brojevi s određenim svojstvima. Sastavni dijelovi peteroznamenastih brojeva su pet znamenki od kojih se oni sastoje (naravno, važno je u kojem poretku su posložene te znamenke). Dakle, svaki pikantni broj možemo konstruirati znamenku po znamenku, pazeći pritom da poštujemo svojstva koja oni moraju imati.

Krenimo najprije od jednostavnijeg problema – prebrojimo najprije koliko peteroznamenastih brojeva zadovoljava samo prvo svojstvo pikantnih brojeva. Pitamo se dakle koliko postoji peteroznamenastih brojeva koji su sastavljeni samo od znamenki 0, 1, 3, 5, 7 i 9 (za sada se mogu ponavljati unutar broja). Konstruiramo naš broj znamenku po znamenku i u svakom koraku bilježimo koliko imamo različitih mogućnosti.

- Prva znamenka našeg broja može biti bilo koja od 1, 3, 5, 7 ili 9. Naime, znamo da prva znamenka peteroznamenastog broja ne smije biti 0. Dakle, imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku našeg broja.
- Druga znamenka našeg broja može biti bilo koja od 0, 1, 3, 5, 7 ili 9. Nula može biti na drugom mjestu, a brojevi se smiju ponavljati pa smijemo uzeti i broj koji smo izabrali za prvo mjesto. Stoga za drugu znamenku imamo 6 mogućnosti.
- Treća znamenka se također može odabrati na 6 načina.
- Četvrta znamenka se također može odabrati na 6 načina.
- Peta znamenka se također može odabrati na 6 načina.

Sada znamo koliko imamo mogućnosti za svaku pojedinu znamenku. Dalje bismo htjeli odrediti na koliko načina se od ovih znamenki može sastaviti konačni broj. Da bismo izračunali tu vrijednost, koristimo princip poznat pod nazivom *princip uzastopnog prebrojavanja*. Naime, prebrojili smo broj mogućnosti za svaku pojedinu znamenku, a sada ih trebamo sastaviti uzastopno, jednu za drugom, i odrediti koliko je ukupni broj objekata koje dobijemo nakon svih takvih sastavljanja.

Princip uzastopnog prebrojavanja je vrlo jednostavan. On kaže da ako sastavni dijelovi ne ovise jedan o drugom (jedan ne uvjetuje ili ikako utječe na drugi), tada je broj mogućnosti za njihovo sastavljanje jednak **umnošku** broja mogućnosti za svaki pojedini sastavni dio. U našem slučaju, doista vrijedi da znamenke ne ovise jedna o drugoj. Stoga je ukupni traženi broj peteroznamenastih brojeva koji se sastoje samo od znamenaka 0, 1, 3, 5, 7 ili 9 jednak umnošku

$$\frac{5}{\text{prva znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{druga znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{treća znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{četvrta znamenka}} \cdot \frac{6}{\text{peta znamenka}}.$$

Uključimo sada i drugi uvjet u igru – znamenke u konstruiranom peteroznamenastom broju ne smiju biti jednake. Sada se problem čini kompliciraniji, jer izbori znamenki počinju utjecati jedni na

druge: čim iskoristimo jednu znamenku, ne smije se više pojavljivati nigdje drugdje u konačnom broju. Međutim, to možemo uzeti u obzir kada brojimo mogućnosti za pojedine znamenke i osigurati da izbori znamenki i dalje ostanu neovisni jedni o drugima.

Razmišljamo ovako. Na mjesto prve znamenke peteroznamenkastog broja ponovno možemo odabrati bilo koju od znamenki 1, 3, 5, 7 ili 9, dakle ponovno imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku. Koju god znamenku da odaberemo, ne smijemo više koristiti tu istu znamenku na drugim mjestima. Stoga u svakom sljedećem koraku imamo jednu mogućnost manje nego u prethodnom koraku.

- Druga znamenka našeg broja može biti bilo koja od 0, 1, 3, 5, 7 ili 9, osim one koja je na prvom mjestu. Stoga za drugu znamenku imamo $6 - 1 = 5$ mogućnosti.
- Treća znamenka ne smije biti jednaka prvoj niti drugoj. Stoga imamo $6 - 2 = 4$ mogućnosti.
- Četvrta znamenka se može odabrati na $6 - 3 = 3$ načina.
- Peta znamenka se može odabrati na $6 - 4 = 2$ načina.

Koristeći princip uzastopnog prebrojavanja, dobijemo da je ukupan broj mogućnosti u ovom slučaju jednak:

$$\frac{5}{\text{prva znamenka}} \cdot \frac{5}{\text{druga znamenka}} \cdot \frac{4}{\text{treća znamenka}} \cdot \frac{3}{\text{četvrta znamenka}} \cdot \frac{2}{\text{peta znamenka}} = 600.$$

Konačno stižemo i do trećeg uvjeta, koji je i najkompliciraniji što se tiče prebrojavanja mogućnosti. Sada naime od svih 600 brojeva koje smo konstruirali u prethodnom prebrojavanju moramo pronaći koliko ih je koji nisu djeljivi s 30. Najprije primijetimo da možemo pokušati pronaći broj brojeva koji jesu djeljivi s 30 (to se čini prirodnije) i onda oduzeti taj broj od ukupnog broja svih brojeva (600). To pravilo prebrojavanja se zove *pravilo komplementa*.

Dakle, želimo brojati samo one brojeve koji su djeljivi s 30. Podsjetimo se stoga pravila o djeljivosti. Kada je broj djeljiv brojem 30? Onda (i samo onda) kada je djeljiv brojevima 3 i 10. Kada je broj djeljiv s 10? Onda (i samo onda) kada mu je zadnja znamenka 0. Što je s djeljivošću s brojem 3? Prisjetimo se da je broj djeljiv s brojem 3 ako (i samo ako) mu je zbroj svih znamenki djeljiv s 3.

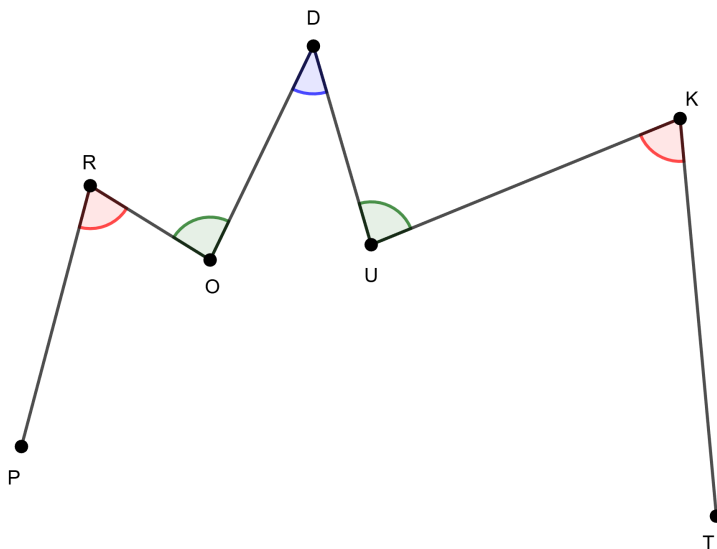
Dakle, prilikom konstrukcije svih brojeva koje sada želimo prebrojiti moramo osigurati da im je zadnja znamenka jednaka 0 te da im je zbroj znamenki djeljiv s 3. Najprije odredimo koje kombinacije od 4 različite znamenke između preostalih dozvoljenih znamenki 1, 3, 5, 7 ili 9 u zbroju daju broj djeljiv s 3. To su samo sljedeće 2 kombinacije:

$$1, 3, 5, 9; 3, 5, 7, 9.$$

U svakom od ova dva podslučaja još samo trebamo rasporediti ove znamenke na prva 4 mjesta (na petom mjestu znamo da mora biti znamenka 0). Ponovno koristeći princip uzastopnog umnoška dobijemo da to možemo učiniti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Dakle, ukupno ćemo imati $2 \cdot 24 = 48$ brojeva djeljivih s 30 među ranije izbrojanih 600 koji zadovoljavaju prva dva svojstva pikantnih brojeva. Konačno zaključujemo, po pravilu komplementa, da pikantnih brojeva ima $600 - 48 = 552$.

Zadatak J-1.5. [30 bodova]

Mjera kutova označenih crvenom bojom na slici iznosi 73° (kutovi $\angle PRO$ i $\angle UKT$), plavom bojom 42° (kut $\angle ODU$), a zelenom bojom 84° (kutovi $\angle DOR$ i $\angle KUD$). Odredi mjeru kuta koji zatvaraju pravci PR i TK .

**Prvo rješenje.**

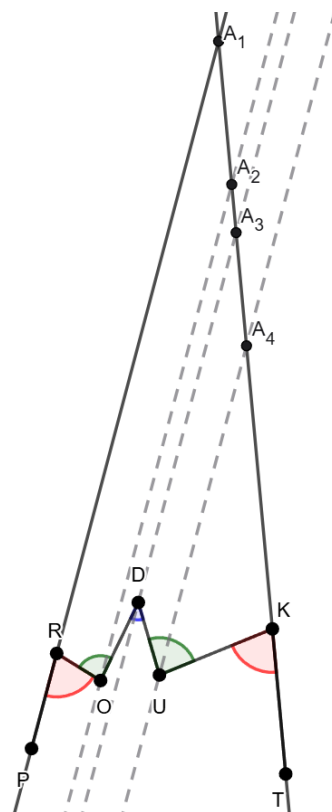
Docrtajmo pravce paralelne s PR kroz svaku od točaka O , D i U . Označimo s A_1 presjek pravca PR s pravcem TK , te s A_2 , A_3 i A_4 redom presjeke novopovučениh pravaca kroz točke O , D i U s pravcem TK , kao što je označeno na slici.

Pravac OA_2 dijeli kut $\angle DOR$ na kutove $\angle DOA_2$ i $\angle A_2OR$. Kut $\angle A_2OR$ je jednak 73° jer je jednak kutu $\angle PRO$ budući da su pravci PR i OA_2 paralelni, a RO njihova presječna. Dakle, budući da se radi o kutovima uz presječnicu paralelnih pravaca, $\angle DOA_2$ mora biti jednak 11° .

Nadalje, pravac DA_3 dijeli kut $\angle ODU$ na dva kuta sličnih svojstava. Lijevi kut je jednak 11° jer je jednak kutu $\angle DOA_2$ budući da su pravci OA_2 i DA_3 paralelni, pa desni kut mora biti jednak 31° .

Konačno, pravac UA_4 dijeli kut $\angle KUD$ na kutove $\angle KUA_4$ i $\angle A_4UD$. Kut $\angle A_4UD$ je jednak 31° . Dakle, $\angle KUA_4$ mora biti jednak 53° .

Promotrimo za kraj trokut UKA_4 . Jasno, $\angle A_4KU = 107^\circ$, pa dobivamo da je $\angle UA_4K = 20^\circ$, a budući da je UA_4 paralelan s PR , onda je i traženi kut $\angle RA_1K$ jednak 20° .



Drugo rješenje.

Docrtajmo točku I kao presijek pravaca PR i TK .

Tada možemo prepoznati da je $RODUKI$ šesterokut, pa zbroj njegovih kuteva mora biti $180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ$.

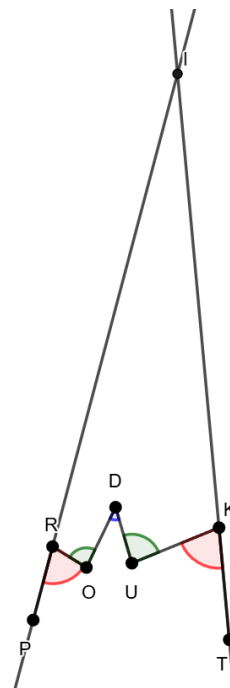
Kutove $\sphericalangle ORI$ i $\sphericalangle IKU$ možemo prepoznati kao suplementarne kuteve crvenim kutovima, pa je njihova mjera $180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$.

Kut $\sphericalangle UDO$ prepoznavamo kao vanjski kut plavom kutu, pa je njegova mjera $360^\circ - 42^\circ = 318^\circ$.

Dakle, prema zbroju kuteva u šesterokutu vrijedi:

$$\begin{aligned}720^\circ &= \sphericalangle RIK + \sphericalangle IKU + \sphericalangle KUD + \sphericalangle UDO + \sphericalangle DOR + \sphericalangle ORI \\720^\circ &= \sphericalangle RIK + \sphericalangle 107^\circ + 84^\circ + 318^\circ + 84^\circ + 107^\circ \\ \sphericalangle RIK &= 720^\circ - 700^\circ\end{aligned}$$

Dakle, traženi kut iznosi 20° .



Treće rješenje.

Zadatak možemo interpretirati na sljedeći način. Neka se osoba nalazi u gradu P i treba doći do grada T , prolazeći kroz gradove R, O, D, U, K . Osoba inicijalno gleda u smjeru grada R . Pitanje je za koliko će se promijeniti smjer gledanja u odnosu na inicijalni smjer kada osoba stigne u grad T iz grada K .

Skretanje u desno (0° do 180° u smjeru kazaljke na sat) ćemo interpretirati kao pozitivnu promjenu smjera, a skretanje u lijevo (0° do 180° u smjeru obrnutom od kazaljke na satu) ćemo interpretirati kao negativnu promjenu. Osoba se kreće na sljedeći način: najprije od P do R pa desno za 73° do O , lijevo za 84° do D , desno za 42° do U , lijevo za 84° do K i na koncu desno za 73° do T .

Stoga se ukupno smjer promijenio za $+73^\circ - 84^\circ + 42^\circ - 84^\circ + 73^\circ = 20^\circ$ pa je kut koji zatvaraju pravci PR i TK jednak 20° .

Zadatak J-1.6. [35 bodova]

Neka je K prirodan broj. Ana i Bojan naprave hrpu od K kamenčića i zatim igraju igru. Naizmjenice, jedno za drugim uzimaju s hrpe ili jedan kamenčić ili četiri kamenčića, sve dok na hrpi ima još kamenčića. Pobjednik je onaj tko zadnji uzme kamenčić ili kamenčiće s hrpe.

Ako Ana igra prva, za koliko brojeva K manjih od 1000 Bojan ima strategiju koja mu osigurava pobjedu?

Rješenje.

Promotrimo prvo tko ima pobjedničku strategiju u slučaju da je K jedan od malih brojeva 1, 2, 3, 4, 5.

K = 1: Ana uzima jedan kamenčić i pobjeđuje.

K = 2: Ana može uzeti samo jedan kamenčić jer nema dovoljno kamenčića da uzme 4. Bojan uzima preostali kamenčić i pobjeđuje.

K = 3: Ana opet može uzeti samo 1 kamenčić, ali isto vrijedi i za Bojana. Ostaje jedan kamenčić koji uzima Ana.

K = 4: Ana uzima 4 kamenčića i pobjeđuje.

K = 5: Ako Ana uzme 1 kamenčić, Bojan će uzeti 4, a ako Ana uzme 4, Bojan će uzeti preostali kamenčić.

Dakle, Ana pobjeđuje za $K = 1, 3, 4$, a Bojan za $K = 2, 5$.

U nastavku ćemo pokazati da tko ima pobjedničku strategiju ovisi o tome koji je ostatak broja K pri dijeljenju s 5.

K = 5N: Ako je K djeljiv s 5, neovisno koliko kamenčića uzme Ana, Bojan uvijek može napraviti potez tako da nakon njega ostane broj kamenčića koji je ponovno djeljiv s 5 (ako Ana uzme 1, Bojan uzme 4 i obratno). Bojan nastavlja ovu strategiju u svakom sljedećem potezu i pobjeđuje.

K = 5N + 1: U ovom slučaju Ana može uzeti 1 kamenčić, tako da nakon njenog poteza broj kamenčića na hrpi bude djeljiv s 5. Sada je broj kamenčića djeljiv s 5, ali uloge su zamijenjene. Bojan igra sljedeći i neovisno što on napravi, Ana može koristiti Bojanovu strategiju kao igrača koji igra drugi iz prethodnog slučaja ($K = 5N$). Stoga, neovisno kako Bojan igra, Ana pobjeđuje.

K = 5N + 2: Slično kao u slučaju kada je $K = 5N$, neovisno što Ana napravi, Bojan može napraviti potez tako da se djeljivost broja kamenčića s 5 ne promijeni nakon njegovog poteza. To može raditi sve dok ne ostanu samo 2 kamenčića na Aninom potezu. Na početku smo vidjeli da u tom slučaju Bojan pobjeđuje.

K = 5N + 3: Sada Ana može uzeti 1 kamenčić, nakon čega ostaje $5N + 2$ kamenčića. Koristeći istu strategiju kao Bojan u prethodnom slučaju, ovaj put Ana pobjeđuje.

K = 5N + 4: Analogno slučaju $K = 5N + 1$, samo što Ana u prvom potezu uzme 4 kamenčića.

Dakle, Bojan ima pobjedničku strategiju ako je K djeljiv s 5 ili daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5. U ostalim slučajevima pobjeđuje Ana.

Ostalo je prebrojati koliko ima takvih brojeva od 1 do 999. Kako je $999 = 199 \cdot 5 + 4$, brojevi djeljivi s 5 u traženom rasponu su $1 \cdot 5, 2 \cdot 5, \dots, 199 \cdot 5$. Njih ima 199. Brojevi koji daju ostatak 2 pri dijeljenju s 5 u ovom rasponu su $0 \cdot 5 + 2, 1 \cdot 5 + 2, \dots, 199 \cdot 5 + 2$. Dakle 200 brojeva. Stoga je ukupan broj brojeva K manjih od 1000 za koje Bojan ima pobjedničku strategiju $199 + 200 = 399$.

Zadatak J-1.7. [40 bodova]

Odredi najveći prirodan broj n za koji vrijedi sljedeća tvrdnja:

postoji prirodan broj A takav da za svaki $2 \leq k \leq n$ postoji k uzastopnih prirodnih brojeva čiji je umnožak A .

Rješenje.

Rješenja zadataka ovog tipa, u kojem se traži najveći prirodan broj za koji vrijedi neka tvrdnja, uvijek se sastoje od dva dijela. Naime, treba dokazati

- a) da za broj za koji tvrdimo da je tražena najveća vrijednost navedena tvrdnja doista vrijedi
- b) da za sve brojeve veće od njega tvrdnja više ne vrijedi.

Kako pristupiti nalaženju n i A ? Jasno, kada bi n bio jednak 2, nije teško pronaći puno načina da se odabere dobar A za njega; točnije, bilo koji A oblika $m(m+1)$ za prirodan broj m zadovoljava taj uvjet.

Možemo li povećati n na 3, 4, ...? Jedan način za pronaći broj koji se prirodno faktorizira na n uzastopnih prirodnih brojeva je promatrati $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Takav broj će uvijek biti moguće raspisati i kao umnožak $n-1$ uzastopnih brojeva: $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Tako recimo za $n = 3$ možemo uzeti $A = 6$ što zaista radi. (Pokazuje se da smo za $n = 3$ mogli uzeti i recimo $A = 210$, koji je moguće zapisati kao $14 \cdot 15$ i kao $5 \cdot 6 \cdot 7$. Možeš li naći još koji dobar A za $n = 3$?)

Ipak, kada uzmemo $n = 4$ i $A = 24$, iako je $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, pokazuje se da 24 ne možemo zapisati kao umnožak dva uzastopna broja. Nakon još malo isprobavanja (recimo možemo probati popraviti konstrukciju tako da gledamo višekratnike od $n!$ ili isprobamo neku potpuno novu konstrukciju), zaista se čini da nećemo uspjeti. Dakle, u ovom trenutku imamo dvije opcije: ili smisliti novi način za konstruirati neki A za $n = 4$ (i onda se fokusirati na traženje konstrukcije za $n = 5$ ili pokazati da ne može više) ili pokazati da takav A ne postoji već za $n = 4$.

Mi ćemo pokazati da za $n = 4$ takav A ne postoji. Pretpostavimo suprotno, tj. da za $n = 4$ možemo pronaći takav A . Neka je $A = x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2)$, tj. A smo prikazali kao umnožak dva uzastopna prirodna broja x i $x+1$ te kao umnožak četiri uzastopna prirodna broja $y-1$, y , $y+1$, $y+2$.

Raspišimo izraz malo:

$$x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2) = [(y-1)(y+2)][y(y+1)] = [y^2 + y - 2][y^2 + y]$$

Intuitivno, $x \approx y^2 + y - 1$ (ali ne baš), pa ćemo pokazati da x ne može biti prirodan broj ako je y prirodan broj.

Ako bi x bio jednak baš $y^2 + y - 2$, vrijedilo bi

$$\begin{aligned} x(x+1) &= (y^2 + y - 2)(y^2 + y) \\ \cancel{(y^2 + y - 2)}(y^2 + y - 1) &= \cancel{(y^2 + y - 2)}(y^2 + y) \end{aligned}$$

što očito ne vrijedi jer je $y^2 + y - 1 < y^2 + y$ i svi faktori su pozitivni prirodni brojevi. Dakle, za $x = y^2 + y - 2$, lijeva strana je premala da bi bila jednaka desnoj.

Ako bi x bio jednak $y^2 + y - 1$, što je sljedeći prirodni broj, vrijedilo bi

$$\begin{aligned} x(x+1) &= (y^2 + y - 2)(y^2 + y) \\ (y^2 + y - 1)\cancel{(y^2 + y)} &= (y^2 + y - 2)\cancel{(y^2 + y)} \end{aligned}$$

što očito ne vrijedi jer je $y^2 + y - 1 > y^2 + y - 2$ i svi faktori su pozitivni prirodni brojevi. Dakle, za $x = y^2 + y - 1$, lijeva strana je prevelika da bi bila jednaka desnoj.

Dakle, zaključujemo da ako vrijedi $x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2)$, onda vrijedi $y^2 + y - 2 < x < y^2 + y - 1$. Kako smo x smjestili strogo između dva prirodna broja, onda x ne može biti prirodan broj! Znači da je naša početna pretpostavka da postoji A koji se tako može zapisati bila kriva; odnosno ne postoji A takav da vrijedi svojstvo iz zadatka za $n = 4$.

Dakle, pokazali smo da za $n = 3$ imamo rješenje ($A = 6$) te da za $n = 4$ nema rješenja. Onda je posve jasno da ni za $n > 4$ nema rješenja, budući da kad bi imali koje rješenje, ono bi automatski bilo rješenje i za $n = 4$. Dakle, najveći prirodan broj n za koji vrijedi tvrdnja iz zadatka je $n = 3$.

Zadatak J-1.8. [45 bodova]

Neka je N prirodan broj. Dana je $N \times N$ tablica u čije je svako polje upisan po jedan prirodan broj (upisani brojevi nisu nužno međusobno različiti). Roko može mijenjati brojeve u tablici tako da u svakom koraku odabere bilo koji 2×2 kvadrat tablice te unutar njega odabere tri polja u kojima uveća upisane brojeve za 1.

Za prirodan broj N kažemo da je *Rokov* ako Roko može postići da, nakon konačno mnogo takvih koraka, svi brojevi u tablici budu jednaki, bez obzira na to koji su brojevi bili upisani u tablicu na početku.

Dokaži:

- (a) 2025 nije Rokov broj
- (b) 2048 jest Rokov broj.

Rješenje.

Pozabavimo se najprije slučajem (a). Prvo što možemo primijetiti u ovom zadatku je da se zbroj svih brojeva u tablici uvijek poveća za 3 nakon Rokovog poteza; dakle, ako početni zbroj nije djeljiv s 3, onda nakon bilo kojeg broja poteza, zbroj i dalje neće biti djeljiv s 3. Ovakvo svojstvo u matematici obično zovemo *invarijanta*, jer se ne mijenja s obzirom na neki potez.

Pretpostavimo li da je 2025 Rokov broj, onda bi u nekom trenutku u svakom polju tablice pisao isti prirodan broj m , te bi zbroj svih brojeva bio $2025m = 3 \cdot (675m)$. Dakle, zbroj svih brojeva bi bio djeljiv s 3. Međutim, kako brojevi upisani u tablicu na početku mogu biti proizvoljni, nije nužno da će njihov zbroj biti djeljiv s 3 (primjerice ako je u svako polje upisan broj 3, osim u prvo polje tablice gdje je upisan broj 5). Kako smo ranije ustvrdili da ako početni zbroj u tablici nije djeljiv s 3 to nikada ne može ni postati, dolazimo do kontradikcije. Stoga zaključujemo da 2025 nije Rokov broj.

Prelazimo sada na slučaj (b). Budući da je ova tablica jako velika, pozabavit ćemo se najprije značajno manjom: promotrimo tablicu za $N = 2$. Pokazat ćemo sada da je $N = 2$ Rokov broj.

Neka su brojevi u tablici označeni s a, b, c, d . Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da vrijedi $a \leq b \leq c \leq d$. Ako je već $a = d$, onda su svi brojevi naravno već jednaki. Pokažimo da nakon nekog niza poteza možemo postići da je najprije $c_1 = d_1$, zatim $b_2 = c_2 = d_2$, i konačno $a_3 = b_3 = c_3 = d_3$.

Najprije moramo sljedeći niz od 3 poteza napraviti $d - c$ puta: prvo izaberemo brojeve a, b, c , zatim b, c, d i konačno a, c, d . Time smo postigli da je na mjestu c sada zapisan $c + 3$, da je na mjestu a sada zapisan $a + 2$, na mjestu b sada zapisan $b + 2$ i na mjestu d sada zapisan $d + 2$; odnosno da se na mjestu c nalazi broj koji je bliži broju zapisanom na mjestu d nego što je to originalni c bio, tj. razlika između c i d se smanjila za 1. Naravno, onda ovaj niz poteza ponavljamo $d - c$ puta kako bi razlika pala na 0, čime smo dobili jednake brojeve $c_1 = c + 3(d - c) = 3d - 2c$ i $d_1 = d + 2(d - c) = 3d - 2c$.

Zatim želimo sličan niz od 3 poteza napraviti $d - b$ puta, ali sada tako da broj na mjestu b povećamo više nego ostale brojeve (odnosno, biramo brojeve a, b, c , zatim b, c, d i konačno a, b, d). Tako smanjujemo razliku brojeva zapisanih na mjestima b i d , ali nakon što izvršimo sva tri poteza u ciklusu, nismo narušili odnos da su brojevi na mjestu c i d jednaki koji smo dobili ranije. Dakle, na kraju svih poteza, imamo da su brojevi na mjestu b i d jednaki (i od ranije da su brojevi na mjestu c i d jednaki), pa dobivamo brojeve a_2, b_2, c_2, d_2 takve da su $b_2 = c_2 = d_2 = 3d - 2c + 2(d - b) = 5d - 2c - 2b$.

Konačno, radimo sličan niz od 3 poteza $d - a$ puta, tako da broj na mjestu a povećavamo više nego ostale brojeve (odnosno, biramo brojeve a, b, c , zatim a, c, d i konačno a, b, d). Uvjerite se da nakon ovih poteza vrijedi da smo dobili brojeve $a_3 = b_3 = c_3 = d_3 = 7d - 2c - 2b - 2a$.

(Prethodni (dosta tehnički) dokaz da možemo postići da su svi brojevi u 2×2 tablici jednaki možemo konceptualno puno jednostavnije interpretirati tako da poistovjetimo jedan Rokov potez ne kao povećavanje tri broja tablice za 1, već kao smanjivanje jednog broja iz tablice za 1 u odnosu na sve ostale brojeve u tablici. Iz ovakve interpretacije je odmah jasno da možemo postići da svi brojevi postanu jednaki, jer (figuratивно) „namještamo jedan po jedan broj“.)

Zasad samo idejno: možemo li iz prethodno opisanog algoritma dobiti da je i 4 Rokov broj? Možemo! Najprije primijenimo algoritam na 4 manje podtablice dimenzija 2×2 koje dobijemo tako da podijelimo tablicu na pola vodoravno i horizontalno. Nakon što postignemo da su brojevi unutar te 4 podtablice svi međusobno jednaki, možemo namjestiti, koristeći isti algoritam, da svi brojevi unutar središnje 2×2 podtablice budu međusobno jednaki. Pritom, svaki puta kada napravimo potez unutar središnje podtablice, odmah zatim napravimo i tri poteza unutar rubnih podtablica u kojima smo promijenili jednu vrijednost, da bismo osigurali da se brojevi unutar tih podtablica i dalje poklapaju.

Iz ovoga se rađa zamisao da bi svi brojevi oblika $N = 2^n$ mogli biti Rokovi. Dokazat ćemo ovu

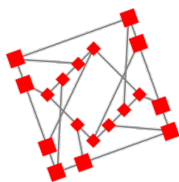
tvrdnju koristeći *matematičku indukciju*. Baza indukcije je naravno $N = 2$ kojeg smo već provjerili. Pretpostavimo sada da je broj 2^n Rokov broj, za neki prirodan broj n . Pokažimo da iz toga slijedi da je i 2^{n+1} Rokov broj.

Tablicu dimenzija $N = 2^{n+1}$ možemo podijeliti na 4 manje podtablice dimenzija 2^n , središnjom vertikalnom i horizontalnom linijom. U svakoj od tih tablica možemo postići da su svi brojevi jednaki, prema pretpostavci indukcije. Fokusirajmo se sada na središnju 2×2 podtablicu (u kojoj su u punoj općenitosti zapisana 4 različita broja, ali možda su neki i jednaki). Znamo da možemo postići da su svi brojevi u toj tablici međusobno jednaki. Time dolazimo do situacije da su u sve četiri rubne podtablice dimenzija 2^n svi brojevi jednaki osim jednog rubnog.

Možemo li sada „popraviti” situaciju u rubnim podtablicama? Maštajmo malo. Želimo promijeniti sve brojeve u rubnim podtablicama osim jednog broja u rubnom polju, i to za jednaki iznos. Kada bismo mogli garantirati da Roko može provoditi poteze koji će mijenjati sve brojeve u podtablicama za isti iznos osim jednog rubnog, uspjeli bismo postići traženo. Najjednostavnije bi to bilo postići ako je moguće potpuno podijeliti ostatak podtablice (sve osim tog jednog rubnog polja) na disjunktne skupove od tri polja L oblika, tj. popločati tablicu *L-trominima* bez preklapanja. Tada bismo u svakom koraku odabirali tri broja iz nekog L-tromina sve dok ne postignemo da su svi brojevi u ostatku tablice jednaki broju u rubnom polju, bez da išta pokvarimo.

Na sreću, tablicu naših dimenzija $2^n \times 2^n$ je uistinu uvijek moguće popločati L-trominima tako da je samo jedno rubno polje ploče nepopločano te da se L-tromina nigdje ne poklapaju. Ova činjenica dokazuje se koristeći induktivan dokaz vrlo sličan onom što ga upravo provodimo, pa ga ostavljamo za vježbu (ako „zapne”, dokaz možete pronaći i u [knjizi predavanja s MNM Ljetnog kampa 2025](#) kao dio predavanja X2 – rješenje je na stranici 174).

Ovim smo dokazali korak indukcije. Dakle, koristeći princip matematičke indukcije zaključujemo da su sve tablice takve da je $N = 2^n$ Rokove. Konačno, kako je $2048 = 2^{11}$, slijedi da je i 2048 Rokov broj.



MEDO 2025./2026.

Prvo kolo

8.11.2025.

Loomen

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Zadaci i rješenja

Zadatak S-1.1. [10 bodova]

Jakov je prvog dana u mjesecu dobio mjesečni džeparac. Na početku mjeseca, Jakov je kupio tri bilježnice na kvadratiće za ukupno 6 eura. Sredinom mjeseca Jakov je kupio novu loptu za polovinu preostalog iznosa koji mu je ostao od džeparca. Na kraju mjeseca kupio je i četiri bilježnice na linije, koje koštaju (svaka pojedinačno) upola manje od bilježnica na kvadratiće, nakon čega mu je preostalo točno 40% početnog iznosa džeparca.

Koliki džeparac je dobio Jakov?

Rješenje.

Postavimo pažljivo jednadžbu. Na početku mjeseca je Jakov imao neki iznos X . Zatim je potrošio 6 eura, pa je nakon prve kupovine imao $X - 6$ preostalo.

Zatim je potrošio polovinu od iznosa koji mu je ostao na loptu, što znači da mu je ostala druga polovica, tj. $(X - 6)/2$.

Konačno, u zadnjoj kupnji je kupio 4 bilježnice na linije. Budući da su tri bilježnice na kvadratiće bile 6 eura, onda je svaka bilježnica na kvadratiće 2 eura. Budući da su bilježnice na linije upola jeftinije, onda je svaka koštala po 1 euro, odnosno ukupno je potrošio 4 eura.

Dakle, ostalo mu je $(X - 6)/2 - 4$, što nam zadatak kaže da je baš $0.4X$ (40% početnog iznosa, kojeg smo označili s X).

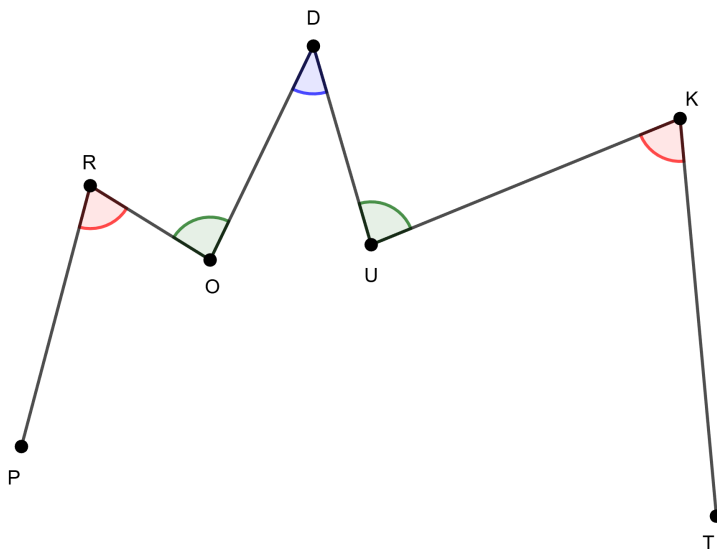
Rješavamo:

$$\begin{aligned}(X - 6)/2 - 4 &= 0.4X \\(X - 6)/2 &= 0.4X + 4 && / \cdot 2 \\X - 6 &= 0.8X + 8 \\X &= 0.8X + 8 + 6 \\0.2X &= 14 && / \cdot 5 \\X &= 70\end{aligned}$$

Dakle, Jakov je na početku mjeseca dobio džeparac od 70 eura.

Zadatak S-1.2. [15 bodova]

Mjera kutova označenih crvenom bojom na slici iznosi 73° (kutovi $\angle PRO$ i $\angle UKT$), plavom bojom 42° (kut $\angle ODU$), a zelenom bojom 84° (kutovi $\angle DOR$ i $\angle KUD$). Odredi mjeru kuta koji zatvaraju pravci PR i TK .

**Prvo rješenje.**

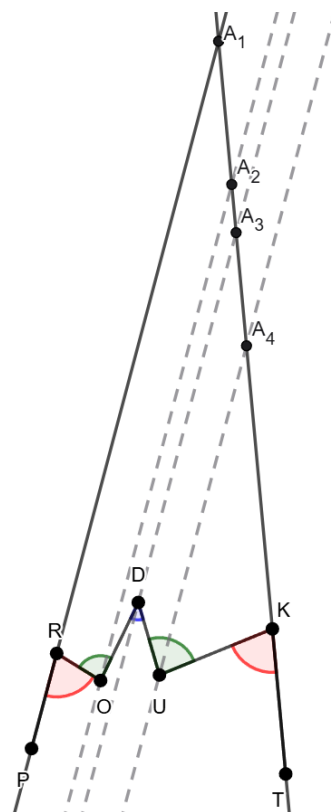
Docrtajmo pravce paralelne s PR kroz svaku od točaka O , D i U . Označimo s A_1 presjek pravca PR s pravcem TK , te s A_2 , A_3 i A_4 redom presjeke novopovučениh pravaca kroz točke O , D i U s pravcem TK , kao što je označeno na slici.

Pravac OA_2 dijeli kut $\angle DOR$ na kutove $\angle DOA_2$ i $\angle A_2OR$. Kut $\angle A_2OR$ je jednak 73° jer je jednak kutu $\angle PRO$ budući da su pravci PR i OA_2 paralelni, a RO njihova presječna. Dakle, budući da se radi o kutevima uz presječnicu paralelnih pravaca, $\angle DOA_2$ mora biti jednak 11° .

Nadalje, pravac DA_3 dijeli kut $\angle ODU$ na dva kuta sličnih svojstava. Lijevi kut je jednak 11° jer je jednak kutu $\angle DOA_2$ budući da su pravci OA_2 i DA_3 paralelni, pa desni kut mora biti jednak 31° .

Konačno, pravac UA_4 dijeli kut $\angle KUD$ na kutove $\angle KUA_4$ i $\angle A_4UD$. Kut $\angle A_4UD$ je jednak 31° . Dakle, $\angle KUA_4$ mora biti jednak 53° .

Promotrimo za kraj trokut UKA_4 . Jasno, $\angle A_4KU = 107^\circ$, pa dobivamo da je $\angle UA_4K = 20^\circ$, a budući da je UA_4 paralelan s PR , onda je i traženi kut $\angle RA_1K$ jednak 20° .



Drugo rješenje.

Docrtajmo točku I kao presjek pravaca PR i TK .

Tada možemo prepoznati da je $RODUKI$ šesterokut, pa zbroj njegovih kuteva mora biti $180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ$.

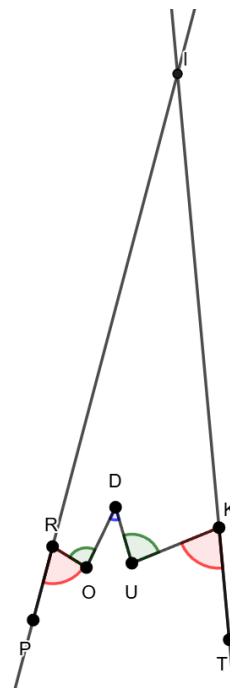
Kutove $\angle ORI$ i $\angle IKU$ možemo prepoznati kao suplementarne kuteve crvenim kutevima, pa je njihova mjera $180^\circ - 73^\circ = 107^\circ$.

Kut $\angle UDO$ prepoznavamo kao vanjski kut plavom kutu, pa je njegova mjera $360^\circ - 42^\circ = 318^\circ$.

Dakle, prema zbroju kuteva u šesterokutu vrijedi:

$$\begin{aligned}720^\circ &= \angle RIK + \angle IKU + \angle KUD + \angle UDO + \angle DOR + \angle ORI \\720^\circ &= \angle RIK + \angle 107^\circ + 84^\circ + 318^\circ + 84^\circ + 107^\circ \\ \angle RIK &= 720^\circ - 700^\circ\end{aligned}$$

Dakle, traženi kut iznosi 20° .



Treće rješenje.

Zadatak možemo interpretirati na sljedeći način. Neka se osoba nalazi u gradu P i treba doći do grada T , prolazeći kroz gradove R, O, D, U, K . Osoba inicijalno gleda u smjeru grada R . Pitanje je za koliko će se promijeniti smjer gledanja u odnosu na inicijalni smjer kada osoba stigne u grad T iz grada K .

Skretanje u desno (0° do 180° u smjeru kazaljke na sat) ćemo interpretirati kao pozitivnu promjenu smjera, a skretanje u lijevo (0° do 180° u smjeru obrnutom od kazaljke na satu) ćemo interpretirati kao negativnu promjenu. Osoba se kreće na sljedeći način: najprije od P do R pa desno za 73° do O , lijevo za 84° do D , desno za 42° do U , lijevo za 84° do K i na koncu desno za 73° do T .

Stoga se ukupno smjer promijenio za $+73^\circ - 84^\circ + 42^\circ - 84^\circ + 73^\circ = 20^\circ$ pa je kut koji zatvaraju pravci PR i TK jednak 20° .

Zadatak S-1.3. [20 bodova]

Svakom vrhu pravilnog 2025-kuta pridružen je po jedan prirodan broj. Zbroj svih tih brojeva iznosi 7092. Par susjednih vrhova u ovom 2025-kutu nazivamo *prijateljskim* ako je zbroj njima pridruženih brojeva veći ili jednak 8.

Dokaži da postoje barem dva prijateljska para.

Prvo rješenje.

Označimo brojeve koji su pridruženi vrhovima s $b_1, b_2, \dots, b_{2025}$. Označimo dodatno i $a_1 = b_1 + b_2$, $a_2 = b_2 + b_3$, $\dots$, $a_{2025} = b_{2025} + b_1$.

Budući da znamo da je $b_1 + b_2 + \dots + b_{2025} = 7092$, vrijedi da je $a_1 + a_2 + \dots + a_{2025} = 2(b_1 + b_2 + \dots + b_{2025}) = 14184$. Primijetimo kako je $14184 = 2025 \cdot 7 + 9$.

Dakle, prema Dirichletovom principu, vrijedi da među brojevima $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ postoji barem jedan koji iznosi barem 8. Neka je to a_i . Naš posao sada je pronaći još barem jedan takav broj.

Imamo dvije mogućnosti: ili je a_i „relativno mal” (što bi nam omogućilo da pokažemo da postoji još barem jedan $a_j \geq 8$) ili je „relativno velik” (što bi nam pak omogućilo da nađemo još jedan $a_j \geq 8$ u okolini budući da su svi brojevi u vrhovima mnogokuta prirodni brojevi).

Ako je a_i relativno mali, provjerimo koliko mali mora biti da bismo među ostalih 2024 broja mogli naći neki veći ili jednak 8. Ako bi zbroj preostalih brojeva bio barem $2024 \cdot 7 + 1 = 14169$, onda bi ponovnom primjenom Dirichletovog principa mogli naći novi broj koji je dovoljno velik među preostalima, što završava zadatak. Dakle, ukoliko je $a_i \leq 14184 - 14169 = 15$, onda se među ostalim brojevima a sigurno može naći još jedan koji je veći ili jednak 8.

Ako je pak a_i relativno velik, tj. $a_i \geq 16$, kako je $a_i = b_i + b_{i+1}$, onda je barem jedan od brojeva b_i i b_{i+1} veći ili jednak 8. Taj broj će sa oba svoja susjeda činiti po jedan prijateljski par, tj. postoje barem dva prijateljska para, što je trebalo pokazati.

Drugo rješenje.

Koristit ćemo iste oznake kao u prvom rješenju. Neka je dodatno $S = b_1 + \dots + b_{2025}$. Tada je $a_1 + \dots + a_{2025} = 2S$.

Pretpostavimo da je suma svaka dva susjedna broja manja od 8. Tada je

$$2S = a_1 + \dots + a_{2025} \leq 2025 \cdot 7 = 14175.$$

No $2S = 14184$ pa to nije moguće. Stoga postoji barem jedan prijateljski par, označimo ga s a_i .

Pretpostavimo sada da ne postoji drugi prijateljski par, tj. da ne postoji j , $j \neq i$ takav da je $a_j \geq 8$. Kako je $a_i = b_i + b_{i+1}$, ukoliko je $b_i \geq 7$, tada je $a_{i-1} = b_{i-1} + b_i \geq 1 + 7 = 8$. Analogno ako je $b_{i+1} \geq 7$ je $a_{i+1} \geq 8$. Stoga je $b_i \leq 6$ i $b_{i+1} \leq 6$ pa je $a_i \leq 12$. No tada imamo

$$2S = a_1 + \dots + a_{2025} \leq 2024 \cdot 7 + a_i \leq 2024 \cdot 7 + 12 = 14180,$$

ali $2S = 14184$ što je kontradikcija. Zaključujemo da moraju postojati barem dva prijateljska para.

Zadatak S-1.4. [25 bodova]

Odredi najveći prirodan broj n za koji vrijedi sljedeća tvrdnja:

postoji prirodan broj A takav da za svaki $2 \leq k \leq n$ postoji k uzastopnih prirodnih brojeva čiji je umnožak A .

Rješenje.

Rješenja zadataka ovog tipa, u kojem se traži najveći prirodan broj za koji vrijedi neka tvrdnja, uvijek se sastoje od dva dijela. Naime, treba dokazati

- a) da za broj za koji tvrdimo da je tražena najveća vrijednost navedena tvrdnja doista vrijedi
- b) da za sve brojeve veće od njega tvrdnja više ne vrijedi.

Kako pristupiti nalaženju n i A ? Jasno, kada bi n bio jednak 2, nije teško pronaći puno načina da se odabere dobar A za njega; točnije, bilo koji A oblika $m(m+1)$ za prirodan broj m zadovoljava taj uvjet.

Možemo li povećati n na 3, 4, ...? Jedan način za pronaći broj koji se prirodno faktorizira na n uzastopnih prirodnih brojeva je promatrati $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Takav broj će uvijek biti moguće raspisati i kao umnožak $n-1$ uzastopnih brojeva: $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Tako recimo za $n = 3$ možemo uzeti $A = 6$ što zaista radi. (Pokazuje se da smo za $n = 3$ mogli uzeti i recimo $A = 210$, koji je moguće zapisati kao $14 \cdot 15$ i kao $5 \cdot 6 \cdot 7$. Možeš li naći još koji dobar A za $n = 3$?)

Ipak, kada uzmemo $n = 4$ i $A = 24$, iako je $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, pokazuje se da 24 ne možemo zapisati kao umnožak dva uzastopna broja. Nakon još malo isprobavanja (recimo možemo probati popraviti konstrukciju tako da gledamo višekratnike od $n!$ ili isprobamo neku potpuno novu konstrukciju), zaista se čini da nećemo uspjeti. Dakle, u ovom trenutku imamo dvije opcije: ili smisliti

novi način za konstruirati neki A za $n = 4$ (i onda se fokusirati na traženje konstrukcije za $n = 5$ ili pokazati da ne može više) ili pokazati da takav A ne postoji već za $n = 4$.

Mi ćemo pokazati da za $n = 4$ takav A ne postoji. Pretpostavimo suprotno, tj. da za $n = 4$ možemo pronaći takav A . Neka je $A = x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2)$, tj. A smo prikazali kao umnožak dva uzastopna prirodna broja x i $x+1$ te kao umnožak četiri uzastopna prirodna broja $y-1$, y , $y+1$, $y+2$.

Raspišimo izraz malo:

$$x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2) = [(y-1)(y+2)][y(y+1)] = [y^2 + y - 2][y^2 + y]$$

Intuitivno, $x \approx y^2 + y - 1$ (ali ne baš), pa ćemo pokazati da x ne može biti prirodan broj ako je y prirodan broj.

Ako bi x bio jednak baš $y^2 + y - 2$, vrijedilo bi

$$\begin{aligned} x(x+1) &= (y^2 + y - 2)(y^2 + y) \\ \cancel{(y^2 + y - 2)}(y^2 + y - 1) &= \cancel{(y^2 + y - 2)}(y^2 + y) \end{aligned}$$

što očito ne vrijedi jer je $y^2 + y - 1 < y^2 + y$ i svi faktori su pozitivni prirodni brojevi. Dakle, za $x = y^2 + y - 2$, lijeva strana je premala da bi bila jednaka desnoj.

Ako bi x bio jednak $y^2 + y - 1$, što je sljedeći prirodni broj, vrijedilo bi

$$\begin{aligned} x(x+1) &= (y^2 + y - 2)(y^2 + y) \\ (y^2 + y - 1)\cancel{(y^2 + y)} &= (y^2 + y - 2)\cancel{(y^2 + y)} \end{aligned}$$

što očito ne vrijedi jer je $y^2 + y - 1 > y^2 + y - 2$ i svi faktori su pozitivni prirodni brojevi. Dakle, za $x = y^2 + y - 1$, lijeva strana je prevelika da bi bila jednaka desnoj.

Dakle, zaključujemo da ako vrijedi $x(x+1) = (y-1)y(y+1)(y+2)$, onda vrijedi $y^2 + y - 2 < x < y^2 + y - 1$. Kako smo x smjestili strogo između dva prirodna broja, onda x ne može biti prirodan broj! Znači da je naša početna pretpostavka da postoji A koji se tako može zapisati bila kriva; odnosno ne postoji A takav da vrijedi svojstvo iz zadatka za $n = 4$.

Dakle, pokazali smo da za $n = 3$ imamo rješenje ($A = 6$) te da za $n = 4$ nema rješenja. Onda je posve jasno da ni za $n > 4$ nema rješenja, budući da kad bi imali koje rješenje, ono bi automatski bilo rješenje i za $n = 4$. Dakle, najveći prirodan broj n za koji vrijedi tvrdnja iz zadatka je $n = 3$.

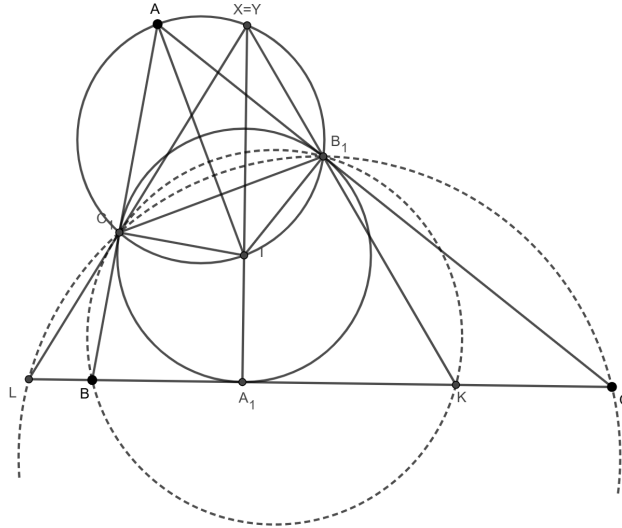
Zadatak S-1.5. [30 bodova]

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su A_1 , B_1 i C_1 redom dirališta upisane kružnice sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Opisana kružnica trokuta BC_1B_1 siječe pravac BC u točkama B i K , a opisana kružnica trokuta CB_1C_1 siječe pravac BC u točkama C i L . Dokaži da se pravci LC_1 , KB_1 i IA_1 sijeku u jednoj točki.

Prvo rješenje.

Neka su α , β i γ redom mjere kutova u vrhovima A , B i C trokuta ABC .

Neka je točka X sjecište pravaca KB_1 i IA_1 , a točka Y sjecište pravaca LC_1 i IA_1 . Dokazat ćemo da je $X = Y$ iz čega će slijediti tvrdnja zadatka.



AC_1 i AB_1 su tangente na upisanu kružnicu trokuta ABC pa je zato $|AC_1| = |AB_1|$, tj. trokut AC_1B_1 je jednakokračan. Kako je $\angle C_1AB_1 = \alpha$ slijedi da je

$$\angle B_1C_1A = \angle AB_1C_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Iz tetivnog četverokuta BKB_1C_1 imamo da je

$$\angle B_1KB = \angle B_1C_1A = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Kako je IA_1 okomito na BC slijedi da je

$$\angle IXB_1 = \angle A_1XK = 90^\circ - \angle B_1KB = \frac{\alpha}{2}.$$

Nadalje, AI je simetrala kuta u vrhu A pa je zato

$$\angle IAB_1 = \frac{\alpha}{2} = \angle IXB_1,$$

iz čega slijedi da je četverokut IB_1XA tetivan.

Uočimo da je i četverokut IB_1AC_1 također tetivan jer je

$$\angle IC_1A = \angle AB_1I = 90^\circ.$$

Spajanjem zajedno te dvije tetivnosti slijedi da se točka X nalazi na opisanoj kružnici četverokuta IB_1AC_1 .

Sasvim analogno se dokaže da se i točka Y nalazi na opisanoj kružnici četverokuta IB_1AC_1 .

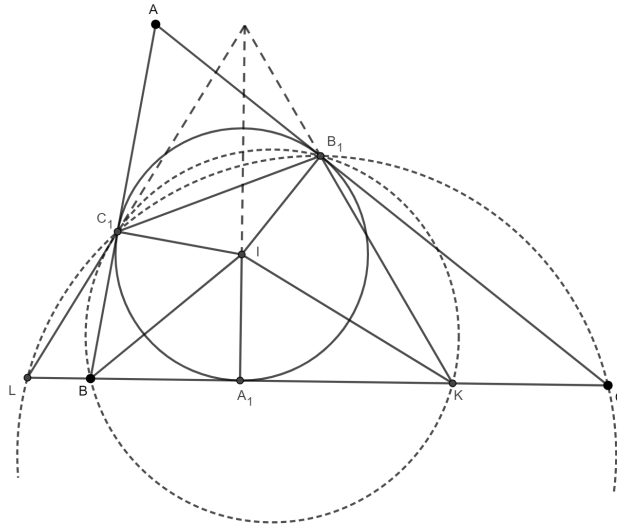
Konačno, kako se točke X i Y obje nalaze na pravcu IA_1 i na opisanoj kružnici četverokuta IB_1AC_1 te ta kružnica već siječe pravac IA_1 u točki I slijedi da mora biti $X = Y$ što smo i htjeli dokazati.

Drugo rješenje.

Neka su α , β i γ redom mjere kutova u vrhovima A , B i C trokuta ABC i neka je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC .

AC_1 i AB_1 su tangente na upisanu kružnicu trokuta ABC pa je zato $|AC_1| = |AB_1|$, tj. trokut AC_1B_1 je jednakokračan. Kako je $\angle C_1AB_1 = \alpha$ slijedi da je

$$\angle B_1C_1A = \angle AB_1C_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$



Iz tetivnog četverokuta BKB_1C_1 imamo da je

$$\sphericalangle B_1KB = \sphericalangle B_1C_1A = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Analogno iz tetivnog četverokuta LCB_1C_1 slijedi

$$\sphericalangle CLC_1 = \sphericalangle AB_1C_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Budući da je $\sphericalangle B_1KL = \sphericalangle KLC_1$ te je pravac A_1I okomit na pravac KL , da bi dokazali da se pravci B_1K , A_1I i C_1L sijeku u istoj točki dovoljno je dokazati da je A_1 polovište dužine $\overline{KL}$.

Izrazit ćemo duljine dužina $\overline{KA_1}$ i $\overline{LA_1}$ preko r i kutova trokuta ABC .

Iz pravokutnog trokuta IA_1C imamo

$$|CA_1| = |IA_1| \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Analogno je i $|CB_1| = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

Trokutu KCB_1 možemo odrediti sve kutove

$$\begin{aligned} \sphericalangle CKB_1 &= 180^\circ - \sphericalangle B_1KB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \\ \sphericalangle KB_1C &= 180^\circ - \sphericalangle CKB_1 - \sphericalangle B_1CK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \gamma. \end{aligned}$$

Primjenom sinusovog poučka u tom trokutu možemo izračunati duljinu dužine $\overline{CK}$

$$|CK| = |CB_1| \cdot \frac{\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \gamma \right)}{\sin \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)} = \left(r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Konačno možemo izračunati duljinu dužine $\overline{KA_1}$

$$\begin{aligned} |KA_1| &= |CA_1| - |CK| = \left(r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= 2r \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti iskoristili formulu pretvorbe za razliku kosinusa

$$\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Na isti način se dobije da je i $|LA_1| = 2r \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$.

Dakle, $|KA_1| = |LA_1|$ što smo i htjeli pokazati.

Zadatak S-1.6. [35 bodova]

Dan je neparan prost broj p . Za prirodan broj k takav da je $1 \leq k \leq p-1$ označimo s d_k broj djelitelja broja $kp+1$ koji su veći od k i manji od p . Odredi $d_1 + d_2 + \dots + d_{p-1}$.

Rješenje.

Označimo s D_k skup djelitelja broja $kp+1$ koji su veći od k i manji od p . Tada je $d_k = |D_k|$. Dokazat ćemo da svaki prirodan broj m veći od 1 i manji od p pripada točno jednom skupu D_k . Iz toga će slijediti da je vrijednost tražene sume jednaka $p-2$.

Uzmimo dakle proizvoljan prirodan broj m takav da $1 < m < p$ te promotrimo brojeve $p+1, 2p+1, \dots, (m-1)p+1$. Uočimo najprije da ti brojevi daju različite ostatke pri dijeljenju s m . Naime, ako $ap+1$ i $bp+1$ daju iste ostatke pri dijeljenju s m za neke $1 \leq a < b \leq m-1$ tada vrijedi

$$m \mid (bp+1) - (ap+1) = (b-a)p$$

što je nemoguće jer su m i p relativno prosti ($m < p$) i $b-a < m$.

Nadalje, niti jedan od promatranih brojeva ne daje ostatak 1 pri dijeljenju s m . Ako bi $ap+1$ dao ostatak 1 pri dijeljenju s m za neki $1 \leq a \leq m-1$ tada bi vrijedilo $m \mid ap$ što je nemoguće.

Kako je mogućih ostataka pri dijeljenju s m upravo m , a promatranih $m-1$ brojeva $p+1, 2p+1, \dots, (m-1)p+1$ svi daju različite ostatke pri dijeljenju s m te nikoji od njih ne daje ostatak 1 zaključujemo da je točno jedan od brojeva $p+1, 2p+1, \dots, (m-1)p+1$ djeljiv s m .

Zadatak S-1.7. [40 bodova]

Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$yf(x) + f(y) \geq f(xy)$$

za sve realne brojeve x i y .

Rješenje.

Odgovor: Sva rješenja su oblika $f(x) = c(1-x)$ pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

Označimo s $P(x, y)$ uvrštavanje vrijednosti x i y u početnu nejednakost. Neka je $c = \frac{f(-1)}{2}$.

$P(-1, x)$ daje $f(x) - f(-x) \geq -2cx$.

$P(-1, -x)$ nam daje $-2cx \geq f(x) - f(-x)$.

Spajanjem gornjih nejednakosti slijedi da mora biti $f(x) - f(-x) = -2cx$.

Iz $P(x, -y)$ slijedi $f(y) + 2cy - f(xy) - 2cxy \geq yf(x)$.

Iz početne nejednakosti imamo da je $yf(x) \geq f(xy) - f(y)$ pa spajanjem s gornjom nejednakosti slijedi da je $f(y) + cy \geq f(xy) + cxy$ za sve realne brojeve x i y .

Neka je $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija zadana s $g(x) = f(x) + cx$. Iz prethodnog imamo da je $g(y) \geq g(xy)$ za sve realne brojeve x i y .

Za $y \neq 0$, uvrštavanjem $x = -\frac{1}{y}$ i y u gornju nejednakost slijedi da je $g(y) \geq g(-1)$ za sve realne brojeve $y \neq 0$.

Nadalje, uvrštavanjem $-x$ i $y = -1$ dobivamo da je $g(x) \leq g(-1)$ za sve realne brojeve x .

Spajanjem s prethodnom nejednakosti slijedi da je $g(x) = g(-1) = c$, tj. $f(x) = c(1 - x)$ za sve realne brojeve $x \neq 0$.

Za $y \neq 0$ iz $P(0, y)$ sada slijedi da je $(y - 1)f(0) \geq c(y - 1)$ za sve realne brojeve $y \neq 0$ iz čega konačno slijedi da mora biti $f(0) = c$. Dakle, $f(x) = c(1 - x)$ za sve realne brojeve x pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ konstanta.

Direktnim uvrštavanjem u početnu nejednakost zaista vidimo da gornja funkcija zadovoljava početnu nejednakost.

Zadatak S-1.8. [45 bodova]

Arhipelag se sastoji od 2025 otoka, a jedini način prijevoza su brodske linije između nekih otoka (ako linija između dva otoka postoji, onda se može putovati u oba smjera).

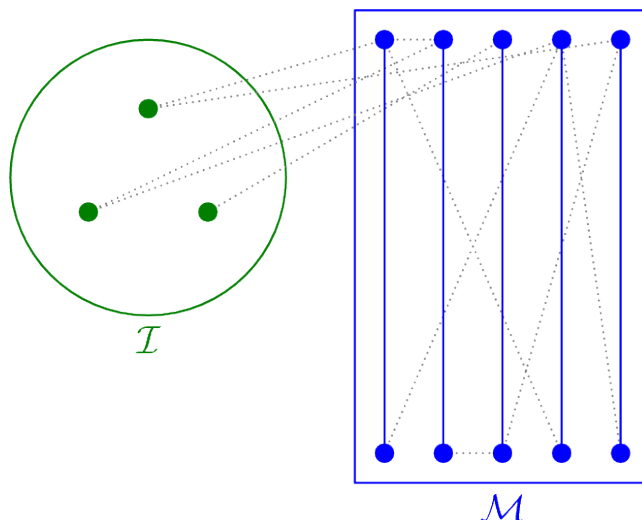
Mirko i Slavko pretvorili su zajednički obilazak arhipelaga u igru. Mirko bira polazni otok, a zatim naizmjenice biraju sljedeći otok na koji će otputovati (prvi bira Slavko). Ne smiju odabrati otok koji su već posjetili. Igru gubi onaj tko ne može izabrati iduće odredište. Odredi tko ima pobjedničku strategiju.

Rješenje.

Odgovor: Mirko ima pobjedničku strategiju.

Promotrimo neusmjereni graf $\mathcal{G}$ kojem su vrhovi otoci, a bridovi su brodske linije između otoka (dakle, dva vrha u grafu su povezana bridom ako i samo ako su otoci koje predstavljaju ta dva vrha povezani brodskom linijom).

Neka je $\mathcal{M}$ maksimalno sparivanje u grafu $\mathcal{G}$, tj. $\mathcal{M} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_k\}$ je najveći skup vrhova grafa $\mathcal{G}$ takav da je v_i povezan s w_i za svaki $i = 1, 2, \dots, k$. Neka je $\mathcal{I}$ skup preostalih vrhova grafa $\mathcal{G}$ koji nisu u $\mathcal{M}$. Kako je ukupan broj otoka (tj. vrhova grafa $\mathcal{G}$) neparan, a broj vrhova u $\mathcal{M}$ paran, slijedi da je broj vrhova u $\mathcal{I}$ neparan. Posebno, u skupu $\mathcal{I}$ postoji barem jedan vrh. Nadalje, zbog maksimalnosti skupa $\mathcal{M}$ slijedi da nikoja dva vrha u skupu $\mathcal{I}$ nisu povezana.



Mirko će koristiti sljedeću strategiju kako bi osigurao pobjedu:

Na početku odabire bilo koji vrh v_0 iz skupa $\mathcal{I}$. Nakon toga, kada Slavko odabere neki vrh v iz skupa $\mathcal{M}$ Mirko bira vrh w u $\mathcal{M}$ koji je sparen s vrhom v .

Uočimo da Slavko u svom prvom potezu (ako ga uopće može napraviti) mora odabrati vrh iz $\mathcal{M}$ jer vrhovi u $\mathcal{I}$ nisu povezani.

Nadalje, tvrdimo da ako Mirko igra opisanom strategijom, Slavko nikada ne može odabrati vrh iz skupa $\mathcal{I}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da Slavko u nekom potezu odabire vrh v_{2k+1} iz skupa $\mathcal{I}$ te neka je to prvi potez u kojem Slavko bira vrh iz tog skupa. Kako su Mirko i Slavko uvijek birali povezane vrhove, slijedi da postoji put

$$v_0 - v_1 - v_2 - \cdots - v_{2k+1}$$

takav da su $v_0, v_{2k+1} \in \mathcal{I}$. Budući da je to bio Slavkov prvi potez u kojem je odabrao vrh iz skupa $\mathcal{I}$, iz Mirkove strategije slijedi da su $v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2k-1}v_{2k}$ odgovarajuća sparivanja vrhova u $\mathcal{M}$. Uočimo da gornje sparivanje možemo povećati tako da ga zamijenimo sa sparivanjem $v_0v_1, v_2v_3, \dots, v_{2k}v_{2k+1}$. Time smo povećali skup $\mathcal{M}$ dodavanjem vrhova v_0 i v_{2k+1} što dovodi do kontradikcije s maksimalnošću skupa $\mathcal{M}$. Dakle, Slavko nikada ne može odabrati vrh iz skupa $\mathcal{I}$ na svom potezu.

Iz prethodnog slijedi da Mirkom svojom strategijom uvijek može odabrati sljedeći vrh na svom potezu. Kako opisana igra u zadatku završava nakon konačno mnogo poteza i Mirko svojom strategijom nikako ne može izgubiti slijedi da će Mirko ovom strategijom u konačnici osigurati pobjedu.