

Zadatak K-5.7. [40 bodova]

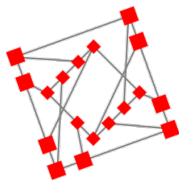
Koliko šesteroznamenkastih brojeva sadrži barem jednu znamenku 1 ili barem dvije znamenke 2 ili barem tri znamenke 3 ili barem četiri znamenke 4 ili barem pet znamenki 5?

Zadatak K-5.8. [45 bodova]

Na 15 polja ploče dimenzija 4×4 nalaze se žetoni, a jedno polje je prazno. Anton nizom poteza pokušava s ploče ukloniti što više žetona. U svakom potezu on odabire tri uzastopna polja, uzima žetom s prvog polja, preskače njime žeton na drugom polju i stavlja prvi žeton na treće polje (do tada prazno), a drugi (preskočeni) žeton uklanja s ploče (vidi sliku).



Odredi koja sve polja ploče mogu na početku biti prazna kako bi Anton mogao postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton.



MEDO 2025./2026.

Peto kolo

28. ožujka 2026.

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Loomen

Zadaci

Zadatak J-5.1. [10 bodova]

U nekom je razredu deset učenika dobilo barem jednu peticu, osam učenika barem dvije petice, sedam učenika barem tri petice i pet učenika barem četiri petice. Tri su učenika dobila točno pet petica. Nitko nije dobio više od pet petica. Koliko su ukupno petica dobili učenici tog razreda?

Zadatak J-5.2. [15 bodova]

Koje su godine rođene osobe koje će tijekom 2026. godine navršiti onoliko godina koliki je zbroj znamenaka godine njihovog rođenja?

Zadatak J-5.3. [20 bodova]

Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvostruko je dulja od stranice $\overline{BC}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da veličina kuta $\sphericalangle DEA$ bude jednaka veličini kuta $\sphericalangle CED$. Kolika je veličina tog kuta?

Zadatak J-5.4. [25 bodova]

Odredi prirodne brojeve n i k za koje su točno tri od sljedeće četiri izjave istinite:

- 1) $n + 1$ je djeljiv s k
- 2) $n = 2k + 5$
- 3) $n + k$ je djeljiv s 3
- 4) $n + 7k$ je prost broj.

Zadatak J-5.5. [30 bodova]

Neka je $PQRS$ paralelogram u kojemu vrijedi $|PQ| = 2|QR|$. Neka je točka M polovište stranice $\overline{PQ}$ i točka N nožište okomice iz vrha R na pravac PS .

Dokaži da vrijedi $|\sphericalangle QMN| = 3 \cdot |\sphericalangle PNM|$.

Zadatak J-5.6. [35 bodova]

Koliko deseteroznamenastih brojeva sadrži barem jednu znamenku 1 ili barem dvije znamenke 2 ili barem tri znamenke 3 ili ... ili barem devet znamenki 9?

Zadatak J-5.7. [40 bodova]

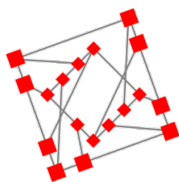
Na 15 polja ploče dimenzija 4×4 nalaze se žetoni, a jedno polje je prazno. Anton nizom poteza pokušava s ploče ukloniti što više žetona. U svakom potezu on odabire tri uzastopna polja, uzima žetom s prvog polja, preskače njime žeton na drugom polju i stavlja prvi žeton na treće polje (do tada prazno), a drugi (preskočeni) žeton uklanja s ploče (vidi sliku).



Odredi koja sve polja ploče mogu na početku biti prazna kako bi Anton mogao postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton.

Zadatak J-5.8. [45 bodova]

Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$, ako su a , b i c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Za koje a , b i c se ta vrijednost postiže?



MEDO 2025./2026.

Peto kolo

28. ožujka 2026.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

Zadaci

Zadatak S-5.1. [10 bodova]

Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvostruko je dulja od stranice $\overline{BC}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da veličina kuta $\sphericalangle DEA$ bude jednaka veličini kuta $\sphericalangle CED$. Kolika je veličina tog kuta?

Zadatak S-5.2. [15 bodova]

Kažemo da je tablica 3×3 *šarolika* ako je u svako polje te tablice upisan po jedan od brojeva -1 , 0 i 1 , tako da je svih šest zbrojeva brojeva u pojedinom retku odnosno stupcu međusobno različito.

Postoji li takva tablica? Ako postoji, koliko ima različitih šarolikih tablica?

Zadatak S-5.3. [20 bodova]

Neka su m i n relativno prosti prirodni brojevi takvi da je $\frac{m+n}{m-n}$ također prirodan broj. Dokaži da je barem jedan od brojeva $mn + 1$ i $4mn + 1$ potpun kvadrat.

Zadatak S-5.4. [25 bodova]

U ovisnosti o realnom broju x odredi vrijednost beskonačne sume:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x + 2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{8} \right\rfloor + \dots$$

Napomena: $\lfloor a \rfloor$ označava najveći cijeli broj manji ili jednak realnom broju a .

Zadatak S-5.5. [30 bodova]

Žeton je postavljen u ishodište koordinatnog sustava. Medvjedi Dado i Tina igraju sljedeću igru. Dado igra prvi, a zatim igraju naizmjenično. U svakom potezu igrač bira dva (ne nužno različita) cijela broja a i b , koje ni Dado ni Tina nisu odabrali u prethodnim potezima, te zatim pomiče žeton za a jedinica u horizontalnom smjeru i za b jedinica u vertikalnom smjeru. Tina pobjeđuje ako se žeton u bilo kojem trenutku vrati u ishodište. Može li Dado spriječiti Tinu da pobijedi?

Napomena: Pomak u horizontalnom smjeru za pozitivnu vrijednost ide udesno, a za negativnu ulijevo (analogno vrijedi i za vertikalni smjer).

Zadatak S-5.6. [35 bodova]

Neka je A konačan skup funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa svojstvima:

- (i) ako su $f, g \in A$, onda je $f \circ g \in A$
- (ii) za svaku funkciju $f \in A$ postoji funkcija $g \in A$ tako da vrijedi $f(f(x) + y) = 2x + g(g(y) - x)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Neka je $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ identiteta, tj. $id(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $id \in A$.

Zadatak S-5.7. [40 bodova]

Neka je točka H ortocentar raznostraničnog šiljastokutnog trokuta ABC . Simetrala šiljastog kuta kojeg čine pravci AH i CH siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama P i Q . Neka je M polovište stranice $\overline{AC}$. Simetrala kuta u vrhu B trokuta ABC siječe dužinu $\overline{HM}$ u točki R . Dokaži da točke P , B , Q i R leže na istoj kružnici.

Zadatak S-5.8. [45 bodova]

Dani su prirodni brojevi $m, n > 1$. Dokaži da postoji samo konačno mnogo uređenih parova prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$(x+1)^n + (x+2)^n + \cdots + (x+m)^n = (y+1)^{2n} + (y+2)^{2n} + \cdots + (y+m)^{2n}.$$