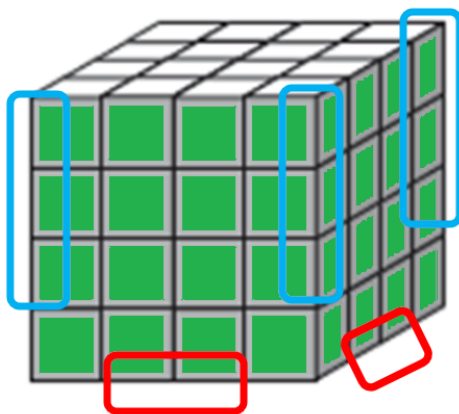




Po dvije zelene strane ima $4 \cdot 3 = 12$ malih kocaka na vertikalnim bridovima i $4 \cdot 2 = 8$ malih kocaka na donjoj plohi. Ukupno, točno dvije zelene strane ima 20 malih kockica.

[Video rješenje.](#)

Zadatak K-5.3. [20 bodova]

U nekom je razredu deset učenika dobilo barem jednu peticu, osam učenika barem dvije petice, sedam učenika barem tri petice i pet učenika barem četiri petice. Tri su učenika dobila točno pet petica. Nitko nije dobio više od pet petica. Koliko su ukupno petica dobili učenici tog razreda?

Prvo rješenje.

Odredimo koliko je točno učenika dobilo jednu, dvije, tri i četiri petice. Rješavamo unatrag. Pet učenika je dobilo barem četiri petice. U tom broju su sadržani učenici koji su dobili točno četiri ili točno pet petica (i samo oni). Kako nam je poznato da su tri učenika dobila točno pet petica, zaključujemo da je $5 - 3 = 2$ učenika dobilo točno četiri petice.

Nastavljamo dalje. Sedam učenika koji su dobili barem tri petice čine učenici koji su dobili točno tri petice i učenici koji su dobili barem četiri petice. Stoga je $7 - 5 = 2$ učenika dobilo točno tri petice.

Istim postupkom zaključujemo da je $8 - 7 = 1$ učenik dobio točno dvije petice, a $10 - 8 = 2$ učenika točno jednu peticu.

Konačno, možemo izračunati koliko je ukupno petica dobiveno:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 2 + 2 + 6 + 8 + 15 = 33.$$

Drugo rješenje.

Brojimo direktno dobivene petice. Zamislimo da svakom učeniku za svaku peticu koju je dobio damo po jedno ukrašeno uskršnje jaje, tj. pisanicu. Prebrojimo sada koliko pisanica ukupno imaju učenici, tako da ih postepeno stavljamo u jednu košaru. Neka najprije svaki od deset učenika koji su dobili barem jednu peticu stavi u košaru jednu od svojih pisanica.

Nakon toga neka osam učenika koji su dobili barem dvije petice stavi po jednu pisanicu u košaru. Primijetimo da je to moguće, jer su svi oni do tada stavili samo jednu pisanicu u košaru, dakle sigurno im je ostala bar još jedna za ubaciti u košaru u ovom koraku. U košari je tada $10 + 8 = 18$ pisanica.

Nastavljamo dalje, tako da sedam učenika koji su dobili barem tri petice stave po jednu pisanicu u košaru, nakon toga pet učenika koji su dobili barem četiri petice stave po jednu pisanicu i na kraju tri učenika koji su dobili točno pet petica stave po jednu pisanicu u košaru. Uočimo da su tada sve pisanice u košari, jer nitko nije dobio više od pet pisanica i svi učenici su stavili sve svoje pisanice u košaru.

Ukupni broj pisanica u košari će na kraju biti $10 + 8 + 7 + 5 + 3 = 33$. Kako svaka pisanica odgovara jednoj petici, ovo je traženi ukupni broj petica koji su učenici dobili.

Zadatak K-5.4. [25 bodova]

Umnožak bilo koja dva od brojeva 30, 72 i n je djeljiv s trećim brojem. Koja je najmanja moguća vrijednost prirodnog broja n ?

Rješenje.

Budući da n mora biti djelitelj od $30 \cdot 72$, a $30 \cdot 72 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ u rastavu na proste faktore, zaključujemo da n u svom rastavu na proste faktore nema više od četiri faktora 2, više od tri faktora 3 i više od jednog faktora 5, a nema ni neke druge proste faktore osim 2, 3 i 5.

Budući da $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ mora biti djelitelj od $72n$, a $72n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot n$, zaključujemo da n mora u svom rastavu na proste faktore imati barem jedan faktor 5 što znači da ima točno jedan faktor 5.

Budući da $72 = 2^3 \cdot 3^2$ mora biti djelitelj od $30n$, a $30n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n$, zaključujemo da n mora u svom rastavu na proste faktore imati barem dva faktora 2 i jedan faktor 3.

Dakle, n mora biti višekratnik broja $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, a kako tražimo najmanju vrijednost od n , slijedi da je $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Zadatak K-5.5. [30 bodova]

Dvojica gusara pronašla su na pustom otoku sanduk pun zlatnika, srebrnjaka i bakrenjaka. Prebrojili su sve tri vrste novčića i utvrdili da je najviše srebrnjaka, a najmanje bakrenjaka. Pošto nisu znali kako da međusobno raspodijele blago, odlučili su raspodjelu prepustiti sudbini. Zapisali su sve moguće raspodjele novčića na zasebne papiriće (uključujući i one raspodjele pri kojima jedan od gusara ne dobije niti jedan novčić pojedine vrste) i nasumično izvukli jedan. Sudbina je odlučila biti pravedna i raspodijelila je sve novčiće ravnomjerno među njima.

Ako im je trebalo ukupno 1955 papirića, koliko je novčića svake vrste dobio svaki gusar?

Rješenje.

Označimo sa z broj zlatnika u sanduku, sa s broj srebrnjaka i sa b broj bakrenjaka.

U bilo kojoj raspodjeli prvi gusar može dobiti od 0 do z zlatnika, od 0 do s srebrnjaka i od 0 do b bakrenjaka. To je $z + 1$ mogućnosti za broj dobivenih zlatnika prvog gusara, $s + 1$ mogućnosti za broj dobivenih srebrnjaka i $b + 1$ mogućnosti za broj dobivenih bakrenjaka. Jasno je da je svaka raspodjela novčića jednoznačno određena brojem novčića koje dobije prvi gusar (jer drugi dobije točno sve preostalo).

Ukupni broj mogućih raspodjela stoga iznosi $(z + 1) \cdot (s + 1) \cdot (b + 1)$. Budući da je bilo ukupno 1955 mogućih raspodjela (svaka raspodjela na jednom papiriću), vrijedi:

$$(z + 1) \cdot (s + 1) \cdot (b + 1) = 1955.$$

Rastavom broja 1955 na proste faktore dobiva se $1955 = 5 \cdot 7 \cdot 53$ pa je

$$(z + 1) \cdot (s + 1) \cdot (b + 1) = 5 \cdot 17 \cdot 23.$$

Budući da srebrnjaka ima najviše, slijedi $s + 1 = 23$, tj. $s = 22$.

Najmanje ima bakrenjaka pa je $b + 1 = 5$, tj. $b = 4$.

Promatrajući zlatnike imamo $z + 1 = 17$, tj. $z = 16$.

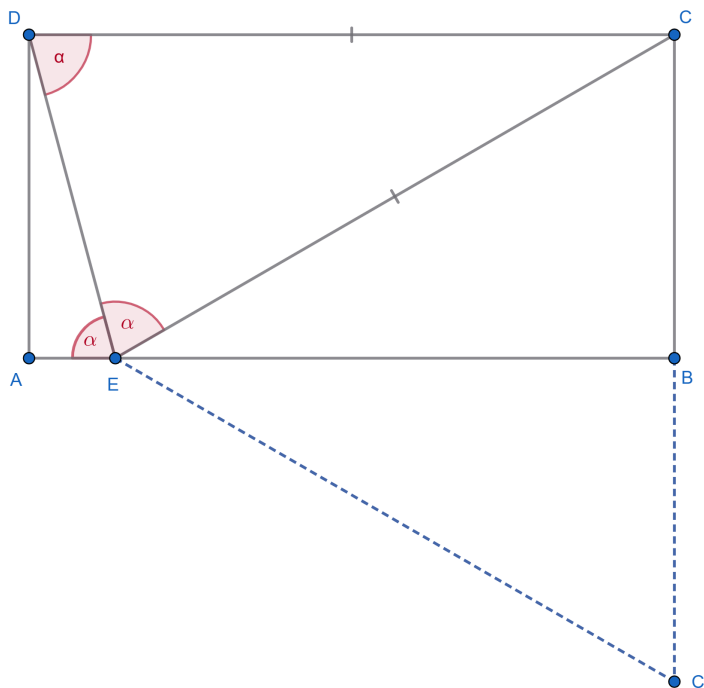
Kako je raspodjela bila ravnomjerna, svaki gusar je dobio 11 srebrnjaka, 2 bakrenjaka i 8 zlatnika.

Zadatak K-5.6. [35 bodova]

Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvostruko je dulja od stranice $\overline{BC}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da veličina kuta $\sphericalangle DEA$ bude jednaka veličini kuta $\sphericalangle CED$. Kolika je veličina tog kuta?

Rješenje.

Skica:



Prema uvjetima zadatka, kutovi $\sphericalangle DEA$ i $\sphericalangle CED$ su sukladni. Označimo s α veličine tih kutova.

Budući da je DE presječna paralelnih stranica pravokutnika $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, kutovi $\sphericalangle DEA$ i $\sphericalangle EDC$ su sukladni pa je $\alpha = |\sphericalangle EDC|$.

Budući da trokut CED ima dva kuta sukladna, on je jednakokratan i vrijedi $|CD| = |CE|$. Kako je $|AB| = 2|BC|$, slijedi i $|CD| = 2|BC|$ te $|CE| = 2|BC|$.

Neka je C' osnosimetrična slika točke C s obzirom na AB . Tada je $|BC| = |BC'|$ te iz toga slijedi $|CE| = |CC'|$.

Kako je E točka na simetrali dužine $\overline{CC'}$, ona je jednako udaljena od točaka C i C' pa je $|CE| = |C'E|$. Dakle, trokut CEC' je jednakokratan.

Jednakokratan trokut ima sva tri kuta jednake veličine i to 60° . U jednakokratanom trokutu visina pripada simetrali kuta, stoga EB prepolavlja kut $\sphericalangle CEC'$, odakle zaključujemo da je $|\sphericalangle BEC'| = 30^\circ$.

Kako je zbroj veličina kutova $\sphericalangle DEA$, $\sphericalangle CED$ i $\sphericalangle BEC'$ jednak 180° (čine ispruženi kut), slijedi da je $2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$, odakle je konačno $\alpha = 75^\circ$.

Zadatak K-5.7. [40 bodova]

Koliko šesteroznamenkastih brojeva sadrži barem jednu znamenku 1 ili barem dvije znamenke 2 ili barem tri znamenke 3 ili barem četiri znamenke 4 ili barem pet znamenki 5?

Rješenje.

Rješenje ovog zadatka se sastoji od dva velika dijela. Najprije ćemo pojedinačno prebrojati koliko postoji šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem n znamenki n , gdje je $n = 1, 2, 3, 4$ i 5 . Nakon

toga ćemo kombinirati dobivene pojedinačne rezultate u konačni rezultat, pazeći da svaki traženi broj brojimo točno jednom.

$n = 1$ (broj šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1):

Ovdje već možemo upasti u zamku ako krenemo „direktno” prebrojavati. Recimo da razmišljamo kako slijedi. U šesteroznamenkastom broju trebamo imati barem jednu jedinicu. Njeno mjesto možemo odabrati na 6 načina. Ostalih 5 znamenki možemo odabrati proizvoljno (osim prve koja ne smije biti nula, ali zanemarimo to sada), pa imamo ukupno $6 \cdot 10^5 = 600000$ brojeva u ovom slučaju. No, primijetimo da smo broj 111111 ovakvim brojanjem prebrojali jako puno puta, umjesto smao jednom! Slično vrijedi za sve brojeve u kojima imamo više od jedne jedinice, jer ih brojimo kao nove brojeve svaki put kada promijenimo poziciju znamenke 1 koju brojimo prvu.

U ovakvoj situaciji je često lakše prebrojati tražene brojeve metodom *komplementa*. Naime, lakše nam je ispravno prebrojati koliko šesteroznamenkastih brojeva ne sadrži niti jednu znamenku 1. Primijetimo da je to točno „suprotan” skup brojeva od onog koje stvarno želimo prebrojati. Zato ćemo preko njega moći odrediti i koliko brojeva zadovoljava svojstvo koje želimo.

Brojimo dakle koliko šesteroznamenkastih brojeva ne sadrži niti jednu znamenku 1. Prva znamenka takvog broja može biti bilo koja iz skupa $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$, što je 8 mogućnosti. Preostale znamenke mogu biti bilo koje iz skupa $\{0, 2, 3, 4, \dots, 9\}$, što je 9 mogućnosti za svaku od preostalih pet znamenki. Dakle, postoji $8 \cdot 9^5 = 472392$ šesteroznamenkastih brojeva koji ne sadrže niti jednu znamenku 1.

Šesteroznamenkastih brojeva ukupno ima $9 \cdot 10^5 = 900000$, pa zaključujemo da šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1 ima $900000 - 472392 = 427608$.

$n = 2$ (broj šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem dvije znamenke 2):

I ovdje ćemo se poslužiti metodom komplementa. Komplementarno svojstvo zadanom je sljedeće: šesteroznamenkasti brojevi koji sadrže najviše jednu znamenku 2. Prebrojavanje ćemo podijeliti na dva međusobno odvojena slučaja: šesteroznamenkasti brojevi koji nemaju znamenku 2 i oni koji sadrže točno jednu znamenku 2.

Kao i u prethodnom slučaju, broj šesteroznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 2 je $8 \cdot 9^5 = 472392$.

Prebrojimo sada koliko šesteroznamenkastih brojeva sadrži točno jednu znamenku 2. Kako je prva znamenka posebna (jer ne smije biti nula), izdvojimo slučaj kada je znamenka 2 na prvom mjestu. U tom slučaju postoji $9^5 = 59049$ različitih brojeva, jer preostale znamenke mogu biti bilo koje iz skupa $\{0, 1, 3, 4, \dots, 9\}$. Ako znamenka 2 nije na prvom mjestu, imamo 5 mogućnosti za njenu poziciju. Za prvu znamenku imamo 8 mogućnosti (ne smije biti 0 ni 2), a za preostale četiri znamenke imamo po 9 mogućnosti, pa stoga ukupno u ovom slučaju imamo $5 \cdot 8 \cdot 9^4 = 262440$ različitih brojeva. Dakle, ukupno je $59049 + 262440 = 321489$ šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno jednu znamenku 2.

Konačno, šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže najviše jednu znamenku 2 ima $472392 + 321489 = 793881$. Metodom komplementa zaključujemo da broj šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem dvije znamenke 2 iznosi $900000 - 793881 = 106119$.

$n = 3$ (broj šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem tri znamenke 3):

Koristimo ponovno metodu komplementa. Prema rezultatu iz prethodnog koraka (jer sama vrijednost znamenke nije važna) znamo da šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže najviše jednu znamenku 3 ima 793881. Ostaje prebrojati koliko šesteroznamenkastih brojeva sadrži točno dvije znamenke 3.

Izdvojimo ponovno one brojeve u kojima je jedna od znamenki 3 na prvom mjestu. Druga znamenka 3 može biti na bilo kojem od preostalih pet mjesta, a svaka od preostale četiri znamenke može biti bilo koja iz skupa $\{0, 1, 2, 4, 5, \dots, 9\}$. Stoga je ovom slučaju $5 \cdot 9^4 = 32805$ brojeva.

Ako na prvom mjestu nije znamenka 3, tada dvije znamenke 3 možemo rasporediti na $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

načina. Naime, prvu znamenku 3 možemo staviti na pet mjesta, a drugu onda na četiri mjesta. No, time smo duplo prebrojali svaki broj, jer na ovaj način brojimo uzimajući u obzir raspored znamenki (ilustrativno, AB i BA brojimo kao dva broja), međutim kako su znamenke jednake, njihovi različiti rasporedi ne mijenjaju konačni broj. Prvu znamenku biramo na 8 načina, a preostale tri znamenke svaku na po 9 načina. Ukupni broj u ovom slučaju je $10 \cdot 8 \cdot 9^3 = 58320$.

Dakle, ukupno je $32805 + 58320 = 91125$ šesteroznamenastih brojeva koji sadrže točno dvije znamenke 3.

Konačno, šesteroznamenastih brojeva koji sadrže najviše dvije znamenke 3 ima $793881 + 91125 = 885006$. Metodom komplementa zaključujemo da broj šesteroznamenastih brojeva koji sadrže barem tri znamenke 3 iznosi $900000 - 885006 = 14994$.

$n = 4$ (broj šesteroznamenastih brojeva koji sadrže barem četiri znamenke 4):

Ovdje možemo prijeći na direktno prebrojavanje, umjesto indirektnog prebrojavanja preko komplementa, jer imamo samo tri međusobno odvojene grupe brojeva za prebrojati: oni koji sadrže točno četiri, pet ili šest znamenki 4.

Prebrojimo koliko ima šesteroznamenastih brojeva koji sadrže točno četiri znamenke 4. Ponovno izdvajamo posebno slučaj kada je prva znamenka 4. Tada preostale tri znamenke 4 možemo rasporediti na pet slobodnih mjesta na $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ načina (imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku 4, 4 mogućnosti za drugu i 3 mogućnosti za treću, te ne razlikujemo različite redoslijede znamenki). Preostale dvije znamenke mogu biti bilo koje iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$. Stoga je u ovom slučaju ukupno $10 \cdot 9^2 = 810$ različitih brojeva.

Ako na prvom mjestu nije znamenka 4, tada četiri znamenke 4 možemo rasporediti na 5 načina na preostalim pet mjestima (odabiremo jedno mjesto na koje ne ide znamenka 4). Prvu znamenku biramo iz skupa $\{1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$, a preostalu iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$. Ukupni broj brojeva u ovom slučaju je $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$. Stoga je konačni broj šesteroznamenastih brojeva koji sadrže točno četiri znamenke 4 jednak $810 + 360 = 1170$.

Prebrojimo sada koliko šesteroznamenastih brojeva sadrži točno pet znamenki 4. Ako je prva znamenka 4, tada preostale četiri znamenke 4 možemo rasporediti na 5 načina na preostalim 5 mjestima, a preostala znamenka može biti bilo koja iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$, pa u ovom slučaju postoji ukupno $5 \cdot 9 = 45$ brojeva. Ako prva znamenka nije 4, tada je ona bilo koja iz skupa $\{1, 2, 3, 5, \dots, 9\}$, što znači da u ovom slučaju postoji 8 brojeva. Sve zajedno, postoji $45 + 8 = 53$ šesteroznamenastih brojeva koji imaju točno pet znamenki 4.

Na kraju, jasno je da postoji samo jedan šesteroznamenasti broj koji ima točno 6 znamenki 4. Zaključujemo da traženih šesteroznamenastih brojeva koji sadrže barem četiri znamenke 4 ima $1170 + 53 + 1 = 1224$.

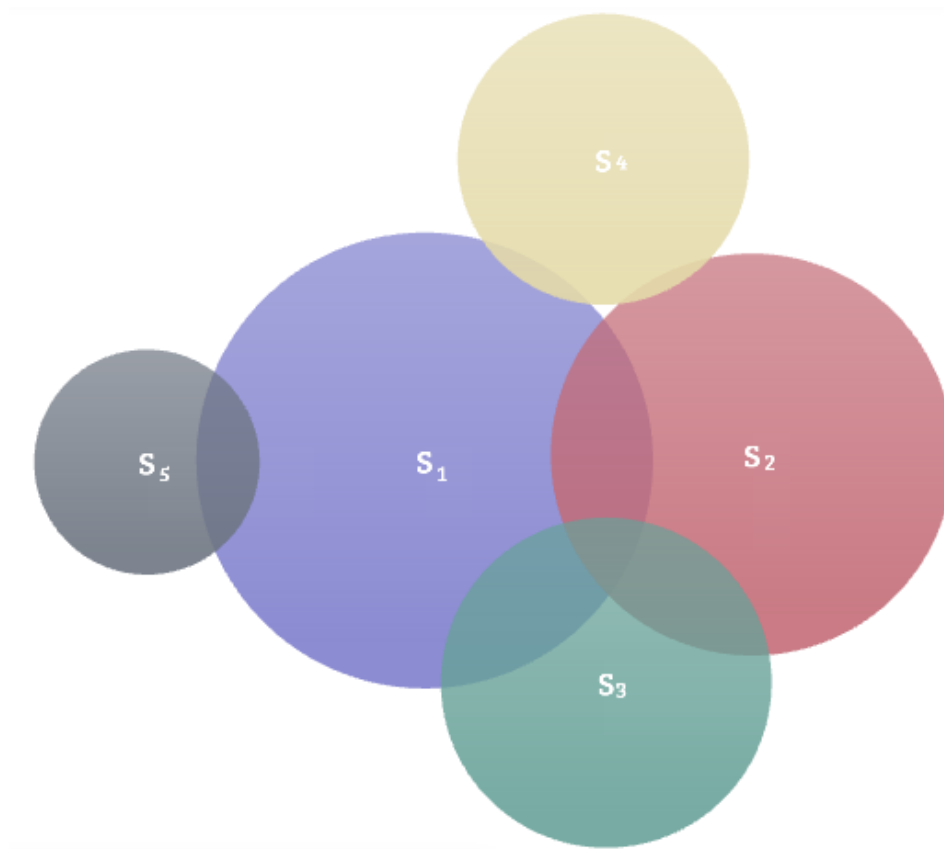
$n = 5$ (broj šesteroznamenastih brojeva koji sadrže barem pet znamenki 5):

Prema rezultatu iz prethodnog odjeljka, znamo da postoji 53 šesteroznamenastih brojeva koji sadrže točno pet znamenki 5. Zajedno s jednim brojem koji se sastoji od samih znamenki 5, zaključujemo da postoji ukupno 54 šesteroznamenastih brojeva koji sadrže barem pet znamenki 5.

Ovime je završen prvi dio rješenja, tj. određivanje pojedinačnog broja šesteroznamenastih brojeva koji zadovoljavaju jedan od traženih uvjeta. Sada želimo odrediti koliko brojeva postoji koji zadovoljavaju barem jedno od tih svojstava. Poteškoća na koju sada nailazimo je da neki brojevi zadovoljavaju više svojstava i stoga bismo ih više puta prebrojali ako bismo samo zbrojili dobivene brojeve.

Kako bismo točno izbrojili tražene brojeve, uvodimo *skupove* brojeva koji zadovoljavaju tražena svojstva. Neka je dakle sa S_1 označen skup svih šesteroznamenastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 1. Analogno označimo i ostale skupove, dakle sa S_2, S_3, S_4 i S_5 . *Veličina skupa* (broj njegovih elemenata) označava se vertikalnim crtama $|\cdot|$. Iz prethodnih izračuna smo dobili da vrijedi $|S_1| = 427608, |S_2| = 106119, |S_3| = 14994, |S_4| = 1224, |S_5| = 54$.

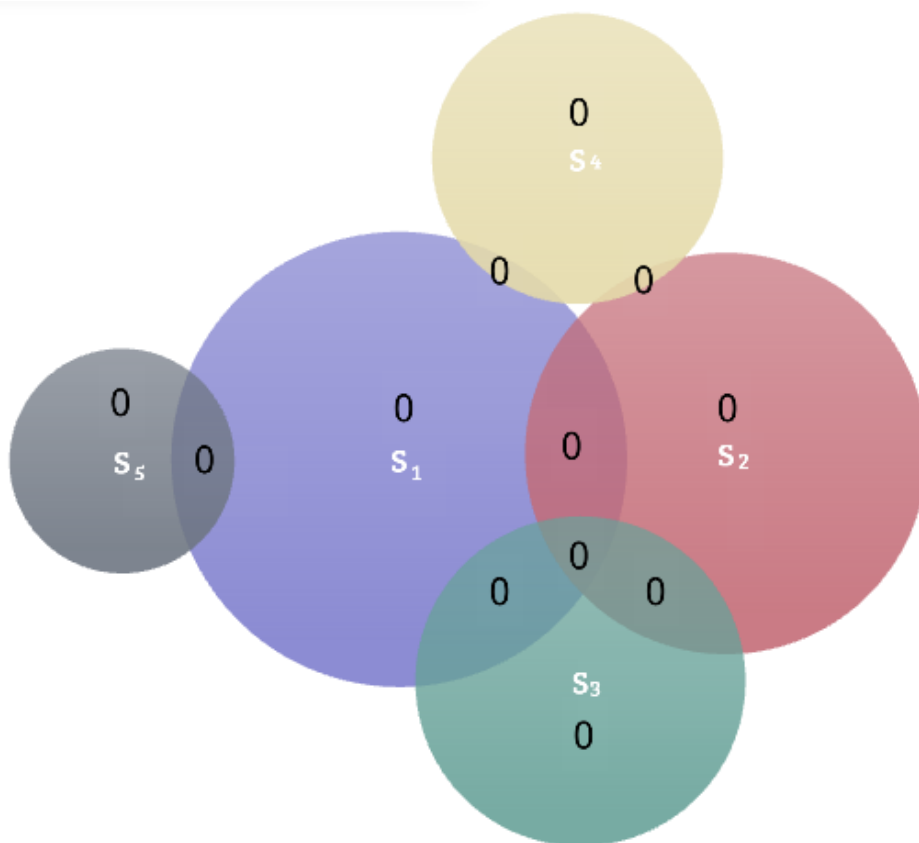
Prikažimo sada ilustrativno skupove kao krugove i to tako da sugestivno označimo kada se neki skupovi „preklapaju”, tj. sadrže isti broj – kažemo da skupovi imaju *presjek*. Ovakva slika naziva se *Vennov dijagram*.



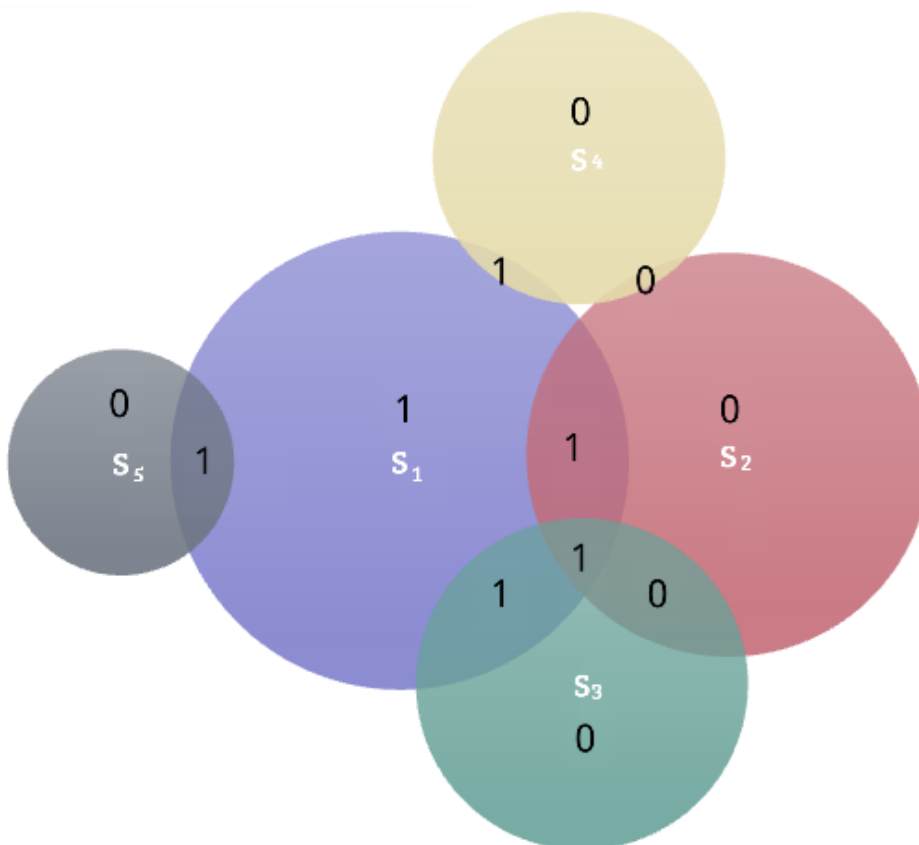
Prokomentirajmo malo zašto Vennov dijagram izgleda baš ovako. Skup S_1 ima presjek sa svim preostalim skupovima. Skup S_2 ima presjek sa svim preostalim skupovima, osim sa skupom S_5 . Naime, šesteroznamenasti broj koji bi bio istovremeno u skupovima S_2 i S_5 bi trebao imati najmanje dvije znamenke 2 i najmanje pet znamenki 5 – no, taj broj bi se tada sastojao od najmanje sedam znamenaka, a to je nemoguće. Skup S_3 ima presjek sa skupovima S_1 i S_2 . Važno je za primijetiti da ova tri skupa imaju zajednički presjek, u koji pripadaju šesteroznamenasti brojevi koji se sastoje od jedne znamenke 1, dvije znamenke 2 i tri znamenke 3. Skup S_4 ima presjek sa skupovima S_1 i S_2 . Ovdje je zanimljivo i važno primijetiti da ova tri skupa nemaju zajednički presjek, jer bi se broj iz tog presjeka trebao sastojati od najmanje $1 + 2 + 4 = 7$ znamenaka. Konačno, skup S_5 ima presjek samo sa skupom S_1 .

Sada dolazi zanimljiv dio zadatka. Trebamo odrediti koliko brojeva ukupno sadrže skupovi S_1 , S_2 , S_3 , S_4 i S_5 . Rekli smo već da je poteškoća u određivanju ovog broja činjenica da se neki brojevi pojavljuju u više od jednog skupa te da stoga moramo paziti da ih ne prebrojimo više od jednom. U tome će nam pomoći naš Vennov dijagram. Brojat ćemo postepeno i na dijagramu označavati koliko puta smo prebrojali elemente pojedinog dijela skupova.

Neka broj Z sadržava trenutni broj elemenata koji smo prebrojali. Na dijagramu označimo koliko puta smo prebrojali svaki element u određenom području. Na početku brojanja je $Z = 0$ i svi brojevi na dijagramu su nula.

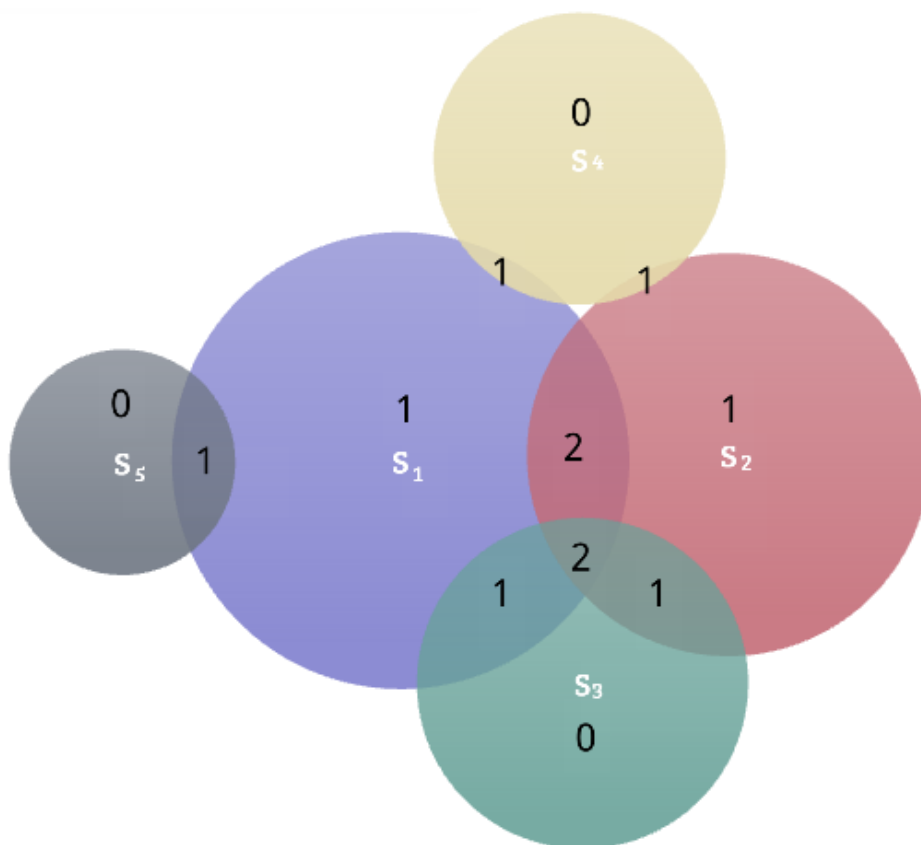


U prvom koraku prebrojimo sve elemente skupa S_1 , pa je tada $Z = 0 + |S_1| = |S_1|$. Dijagram s brojačima sada izgleda ovako:

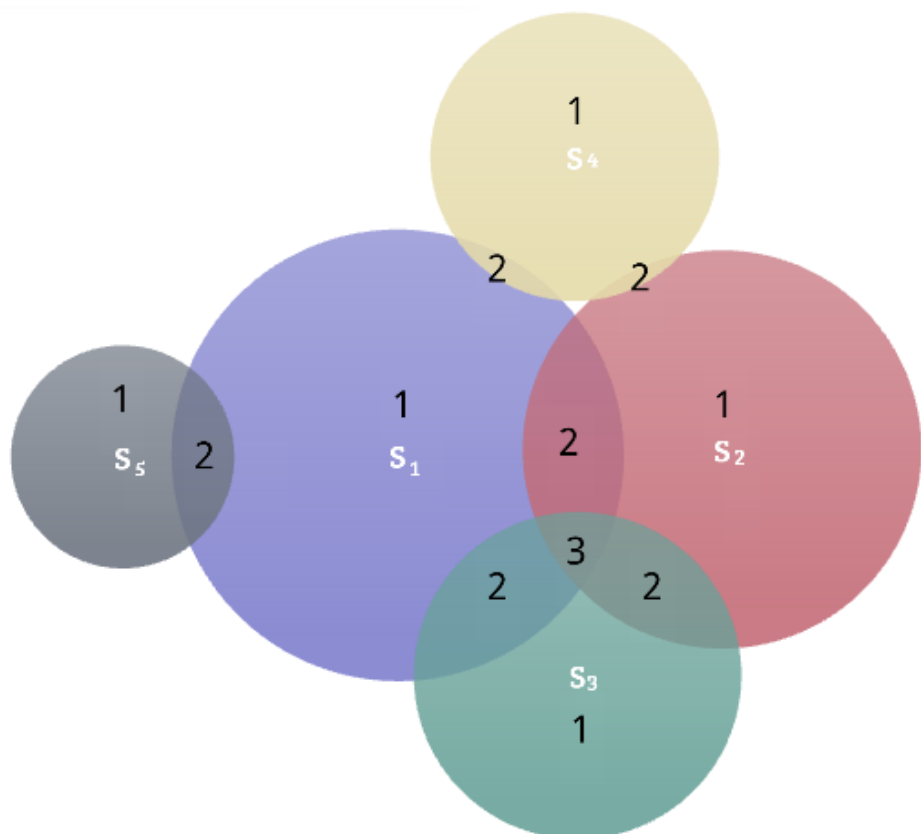


U drugom koraku prebrojimo sve elemente skupa S_2 , pa je tada $Z = |S_1| + |S_2|$. Budući da elemente

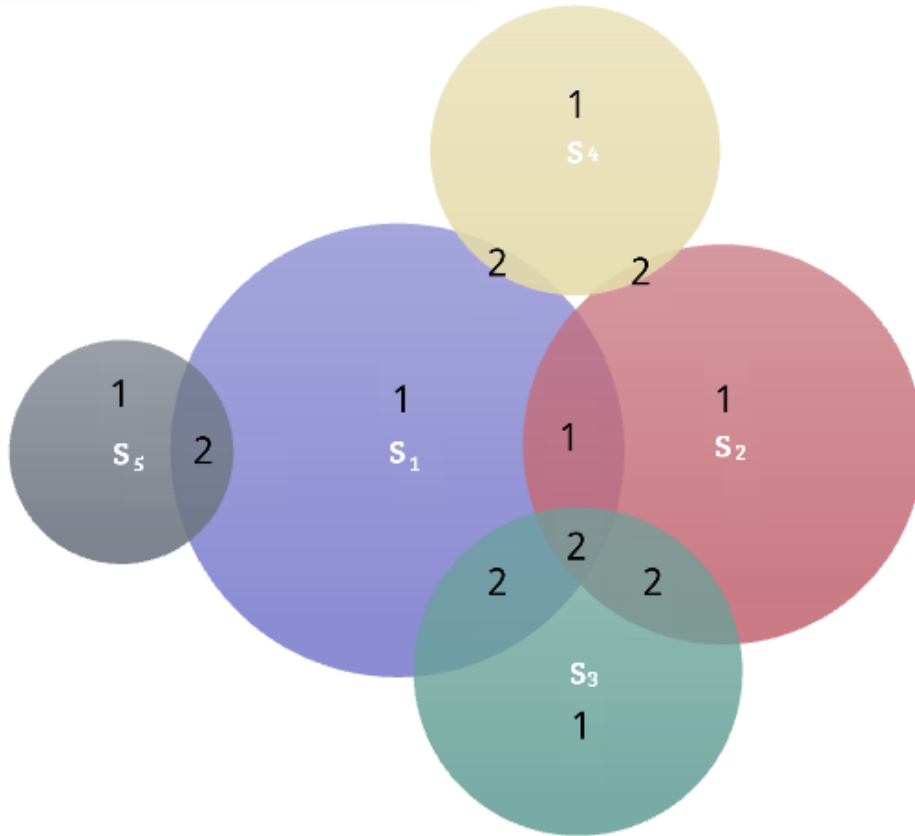
iz presjeka skupova S_1 i S_2 brojimo po drugi put, dijagram s brojačima sada izgleda ovako:



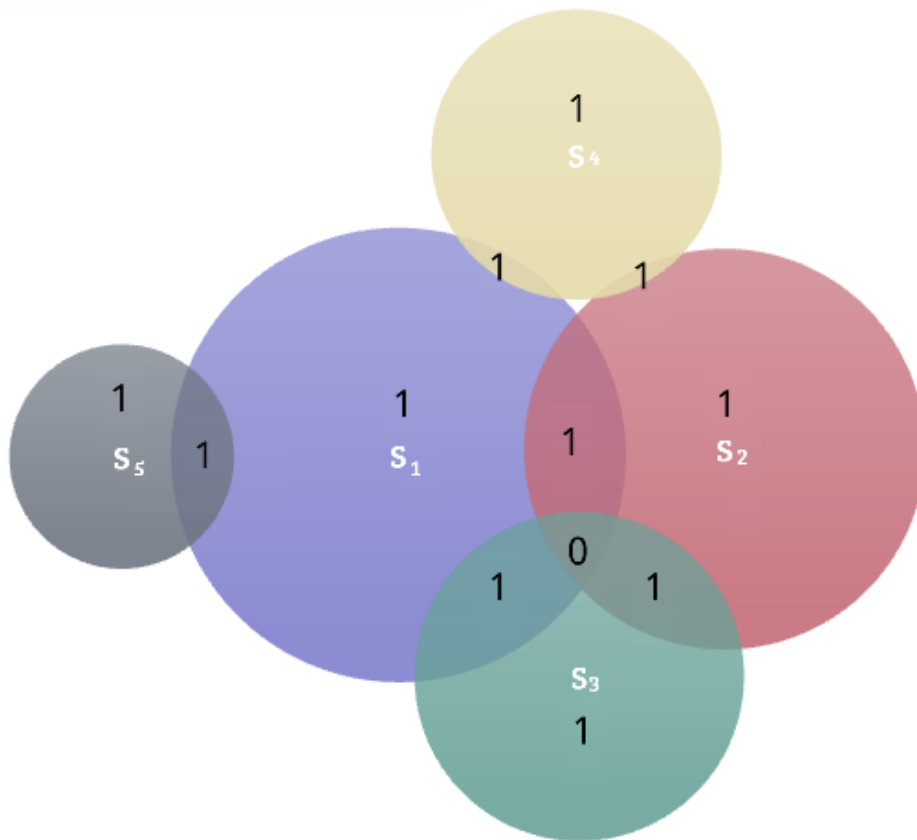
Sada nam je jasno što će se događati, pa možemo razmotriti situaciju nakon što pribrojimo elemente preostalih skupova S_3 , S_4 i S_5 . Tada je $Z = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5|$, a dijagram izgleda ovako:



Cilj nam je da svaki brojač bude na 1, jer to znači da smo elemente iz tog područja dijagrama prebrojali točno jednom. Stoga sada moramo smanjiti sve brojače veće od 1. To postizemo tako da od broja Z oduzimamo broj brojeva koji su u presjeku nekih skupova. Oduzmimo najprije broj brojeva koji su u presjeku skupova S_1 i S_2 – označimo taj skup sa $S_{1,2}$. Tada je $Z = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| - |S_{1,2}|$, a dijagram s brojačima postaje:



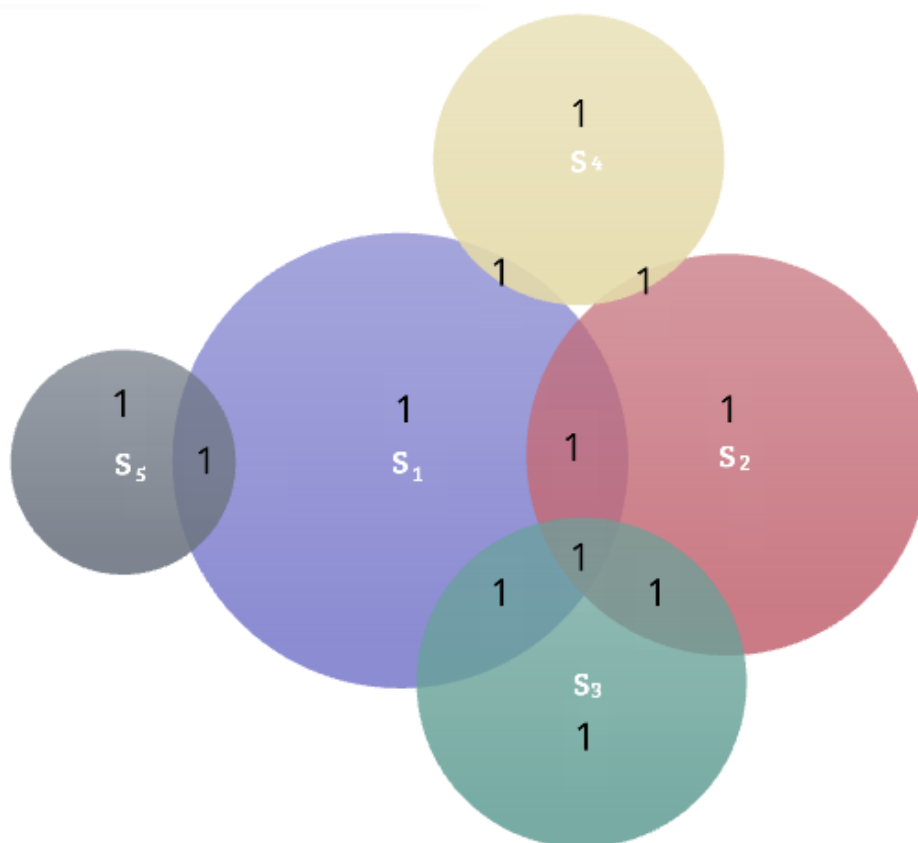
Primijetimo da je i dijagram iz zajedničkog presjeka skupova S_1 , S_2 i S_3 u prethodnom koraku smanjen za jedan, jer je on dio presjeka skupova S_1 i S_2 . Nakon što istim postupkom izbacimo sve presjeke po dva skupa, vrijedi $Z = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| - |S_{1,2}| - |S_{1,3}| - |S_{2,3}| - |S_{2,4}| - |S_{1,5}|$, a dijagram izgleda ovako:



Primijećujemo da je brojač za područje $S_{1,2,3}$ ovim postupkom došao na vrijednost 0, jer smo elemente iz tog područja najprije prebrojali tri puta (po jednom za svaki od skupova S_1 , S_2 i S_3), a potom oduzeli također tri puta (po jednom za svaki presjek $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ i $S_{2,3}$). Stoga u posljednjem koraku našem broju Z trebamo pribrojiti vrijednost $|S_{1,2,3}|$. Konačno dakle vrijedi

$$Z = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| - |S_{1,2}| - |S_{1,3}| - |S_{2,3}| - |S_{2,4}| - |S_{1,5}| + |S_{1,2,3}|,$$

a dijagram je napokon „ispravan”:



Ovime smo došli do čuvene *FUI formule* – formula uključivanja i isključivanja. Preostaje nam još odrediti veličine presjeka skupova.

Idemo redom. Odredimo veličinu skupa $S_{1,2}$, dakle odredimo broj šesteroznamenkastih brojeva koji istovremeno imaju barem jednu znamenku 1 i barem dvije znamenke 2. Podijelimo ih na 10 skupina s obzirom na to koliko točno znamenki 1 i 2 imaju. Svaku od tih skupina prebrojimo na način analogan prethodnim prebrojavanjima. Primjerice, odredimo broj brojeva koji sadrže točno dvije jedinice i dvije dvojke. Podijelimo ih najprije s obzirom na to je li ijedna od tih znamenki na prvom mjestu ili nije. U slučaju da je neka od tih znamenki na prvom mjestu, preostale možemo rasporediti na preostalih pet mjesta na $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ načina (ponovno ne uzimamo u obzir raspored, bar za sada), a dvije preostale znamenke biramo svaku iz skupa $\{0, 3, 4, \dots, 9\}$, dakle na 8 načina. Još trebamo uzeti u obzir da znamenke 1, 1, 2, 2 možemo poredati na $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 6$ načina (najprije ih poredamo kao da su sve različite na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ načina, a onda podijelimo s brojem načina da iste znamenke rasporedimo, što je po dva načina za svaku znamenku). Dakle, u ovom slučaju imamo $10 \cdot 8^2 \cdot 6 = 3840$ brojeva. Ako znamenke 1 i 2 nisu na prvom mjestu, tada ih možemo rasporediti na 5 načina na neka četiri od preostalih pet mjesta, pa je broj takvih brojeva $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 = 1680$. Ukupno je dakle $3840 + 1680 = 5520$ šesteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno dvije znamenke 1 i točno dvije znamenke 2.

Veličine svih skupina su sljedeće:

broj znamenki 2 \ broj znamenki 1		2	3	4	5
1	1	28800	3680	235	6
2	1	5520	470	15	0
3	1	470	20	0	0
4	1	15	0	0	0

Ukupno je stoga $|S_{1,2}| = 39231$.

Tablica za skup $S_{1,3}$ je samo dio tablice za $S_{1,2}$, jer same vrijednosti znamenki ne mijenjaju broj:

broj znamenki 1 \ broj znamenki 3	3	4	5
1	3680	235	6
2	470	15	0
3	20	0	0

Ukupno je stoga $|S_{1,3}| = 4426$.

Analognim postupkom dobijemo i $S_{1,4} = 256$, $S_{1,5} = 6$, $S_{2,3} = 505$, $S_{2,4} = 15$. Veličinu skupa $S_{1,2,3}$ izračunamo kao broj svih rasporeda znamenki 1, 1, 1, 2, 2 i 3, koji iznosi $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot 1} = 60$.

Na kraju krajeva, traženi broj iznosi

$$Z = 427608 + 106119 + 14994 + 1224 + 54 - 39231 - 4426 - 256 - 6 - 505 - 15 + 60 = 505620.$$

Zadatak K-5.8. [45 bodova]

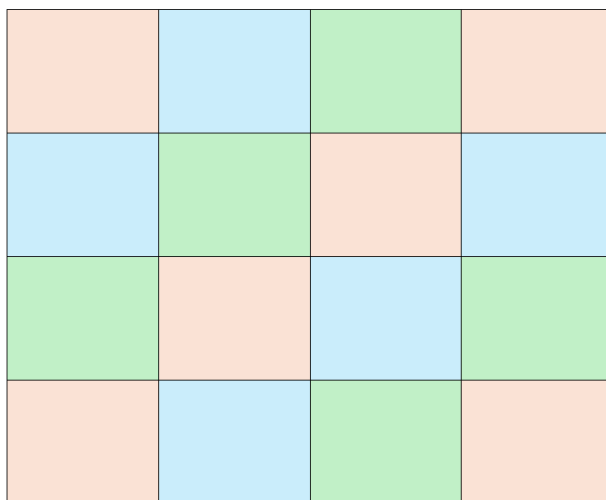
Na 15 polja ploče dimenzija 4×4 nalaze se žetoni, a jedno polje je prazno. Anton nizom poteza pokušava s ploče ukloniti što više žetona. U svakom potezu on odabire tri uzastopna polja (u horizontalnom ili vertikalnom smjeru), uzima žetom s prvog polja, preskače njime žeton na drugom polju i stavlja prvi žeton na treće polje (do tada prazno), a drugi (preskočeni) žeton uklanja s ploče (vidi sliku).



Odredi koja sve polja ploče mogu na početku biti prazna kako bi Anton mogao postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton.

Rješenje.

Uočimo da svakim potezom, tj. preskakanjem i uklanjanjem žetona, nestane žeton s polja s kojega je krenuo skok i nestane žeton koji je preskočen, a pojavi se žeton na mjestu koje je do tada bilo prazno. Stoga možemo zaključiti kako s obzirom na promjenu broja žetona u jednom potezu postoje tri vrste polja. Dakle, ima smisla obojiti ploču s 3 različite boje, i to tako da svaka tri uzastopna polja ploče budu obojena u tri različite boje.



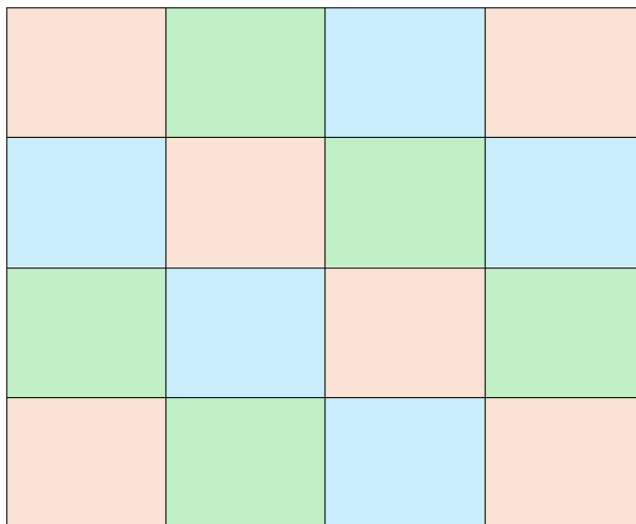
Sada primjećujemo da se kod ovakvog bojanja u svakom potezu ukupan broj žetona koji se nalaze na neke dvije boje smanji za točno 1, a ukupan broj žetona na trećoj boji se poveća za točno 1. Iz toga slijedi da se u svakom potezu promijeni parnost ukupnog broja žetona na svakoj pojedinoj boji.

Kako je na početku na ploči 15 žetona, ako Anton uspije završiti sa samo jednim žetonom na ploči, znamo da je napravio ukupno 14 poteza. Zaključujemo da će parnost ukupnog broja žetona na svakoj pojedinoj boji na kraju biti jednaka kao i na početku.

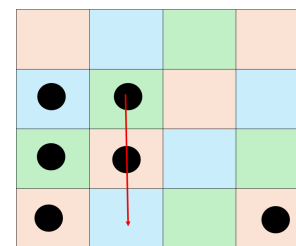
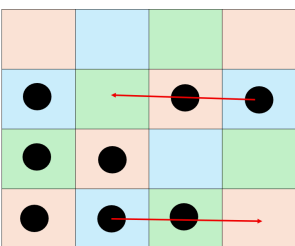
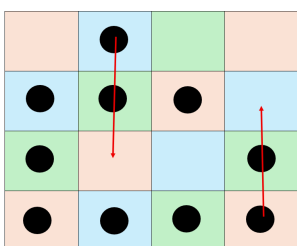
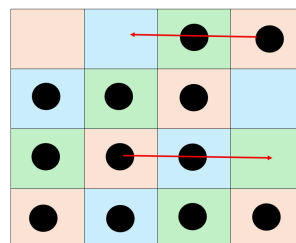
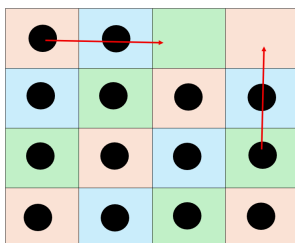
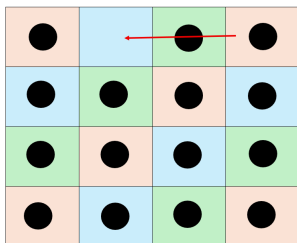
Uočimo da je 6 polja ploče obojeno u crveno, a po 5 polja u plavo i zeleno. Budući da na kraju ostaje samo jedan žeton na cijeloj ploči, broj žetona na neke dvije boje na početku mora biti paran, a na preostaloj boji broj žetona mora biti neparan. Primijetimo sada da nije moguće da istovremeno na plavoj i zelenoj boji imamo po paran broj žetona na početku, jer bi tada barem po jedno plavo i zeleno polje ostalo prazno, a to je u kontradikciji s činjenicom da je na početku samo jedno polje ploče prazno.

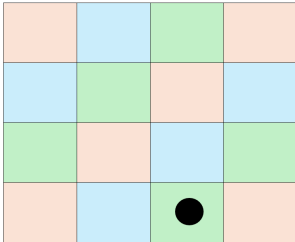
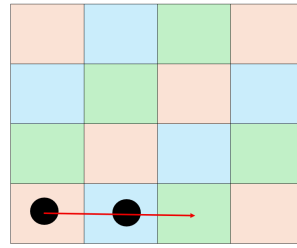
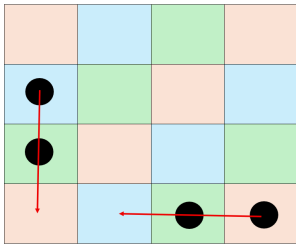
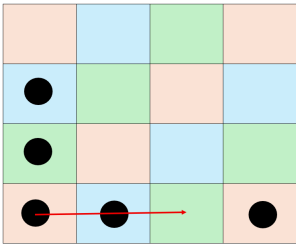
Zaključujemo da na crvenim poljima početni broj žetona mora biti paran. No, tada na svim crvenim poljima na početku mora biti postavljen žeton, jer bi u suprotnom barem dva crvena polja bila prazna. Prazno polje stoga može biti plave ili zelene boje.

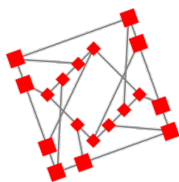
Primijetimo sada da rotacijom ploče za 90° dobijemo ponovno bojanje koje zadovoljava svojstvo da su svaka tri uzastopna polja obojena u tri različite boje. Stoga istim zaključivanjem zaključujemo da i pri ovakvom bojanju sva crvena polja moraju biti popunjena. Zaključujemo da prazno polje na početku jedino može biti neko polje na rubu ploče koje nije kut ploče.



Sljedeća konstrukcija pokazuje da u tom slučaju Anton zaista može postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton (na slici).







MEDO 2025./2026.

Peto kolo

28. ožujka 2026.

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak J-5.1. [10 bodova]

U nekom je razredu deset učenika dobilo barem jednu peticu, osam učenika barem dvije petice, sedam učenika barem tri petice i pet učenika barem četiri petice. Tri su učenika dobila točno pet petica. Nitko nije dobio više od pet petica. Koliko su ukupno petica dobili učenici tog razreda?

Prvo rješenje.

Odredimo koliko je točno učenika dobilo jednu, dvije, tri i četiri petice. Rješavamo unatrag. Pet učenika je dobilo barem četiri petice. U tom broju su sadržani učenici koji su dobili točno četiri ili točno pet petica (i samo oni). Kako nam je poznato da su tri učenika dobila točno pet petica, zaključujemo da je $5 - 3 = 2$ učenika dobilo točno četiri petice.

Nastavljamo dalje. Sedam učenika koji su dobili barem tri petice čine učenici koji su dobili točno tri petice i učenici koji su dobili barem četiri petice. Stoga je $7 - 5 = 2$ učenika dobilo točno tri petice.

Istim postupkom zaključujemo da je $8 - 7 = 1$ učenik dobio točno dvije petice, a $10 - 8 = 2$ učenika točno jednu peticu.

Konačno, možemo izračunati koliko je ukupno petica dobiveno:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 2 + 2 + 6 + 8 + 15 = 33.$$

Drugo rješenje.

Brojimo direktno dobivene petice. Zamislimo da svakom učeniku za svaku peticu koju je dobio damo po jedno ukrašeno uskršnje jaje, tj. pisanicu. Prebrojimo sada koliko pisanica ukupno imaju učenici, tako da ih postepeno stavljamo u jednu košaru. Neka najprije svaki od deset učenika koji su dobili barem jednu peticu stavi u košaru jednu od svojih pisanica.

Nakon toga neka osam učenika koji su dobili barem dvije petice stavi po jednu pisanicu u košaru. Primijetimo da je to moguće, jer su svi oni do tada stavili samo jednu pisanicu u košaru, dakle sigurno im je ostala bar još jedna za ubaciti u košaru u ovom koraku. U košari je tada $10 + 8 = 18$ pisanica.

Nastavljamo dalje, tako da sedam učenika koji su dobili barem tri petice stave po jednu pisanicu u košaru, nakon toga pet učenika koji su dobili barem četiri petice stave po jednu pisanicu i na kraju tri učenika koji su dobili točno pet petica stave po jednu pisanicu u košaru. Uočimo da su tada sve pisanice u košari, jer nitko nije dobio više od pet pisanica i svi učenici su stavili sve svoje pisanice u košaru.

Ukupni broj pisanica u košari će na kraju biti $10 + 8 + 7 + 5 + 3 = 33$. Kako svaka pisanica odgovara jednoj petici, ovo je traženi ukupni broj petica koji su učenici dobili.

Zadatak J-5.2. [15 bodova]

Koje su godine rođene osobe koje će tijekom 2026. godine navršiti onoliko godina koliki je zbroj znamenaka godine njihovog rođenja?

Rješenje.

Ako je neka osoba rođena godine x , tada ona 2026. godine navršava $2026 - x$ godina.

Ako je osoba rođena u 20. stoljeću, tada je rođena godine $\overline{19ab}$ i vrijedi:

$$\begin{aligned}2026 - \overline{19ab} &= 1 + 9 + a + b \\2026 - 1900 - 10a - b &= 10 + a + b \\116 &= 11a + 2b\end{aligned}$$

Kako je broj na lijevoj strani jednakosti paran, tako i broj na desnoj strani mora biti paran pa a parna znamenka, no za najveći mogući $a = 8$ imamo $2b = 28$, tj. $b = 14$, a b nije znamenka. Tako da mogućnost da je osoba rođena u 20. stoljeću otpada.

Zbog sličnog razloga otpada mogućnost da je osoba rođena i u nekom stoljeću prije dvadesetog. Naime, uočimo da se, rješavajući na isti način kao i prije, broj na lijevoj strani jednakosti povećava, a izraz $11a + 2b < 117$ za sve moguće a i b .

Stoga, ako rješenje postoji, osoba mora biti rođena u 21. stoljeću, odnosno godina njezinog rođenja je oblika $\overline{20ab}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}2026 - \overline{20ab} &= 2 + 0 + a + b \\2026 - 2000 - 10a - b &= 2 + a + b \\24 &= 11a + 2b\end{aligned}$$

Sličnim argumentom kao i prije zaključujemo da a mora biti parna znamenka pa je $a = 2$. Dakle, $b = 1$.

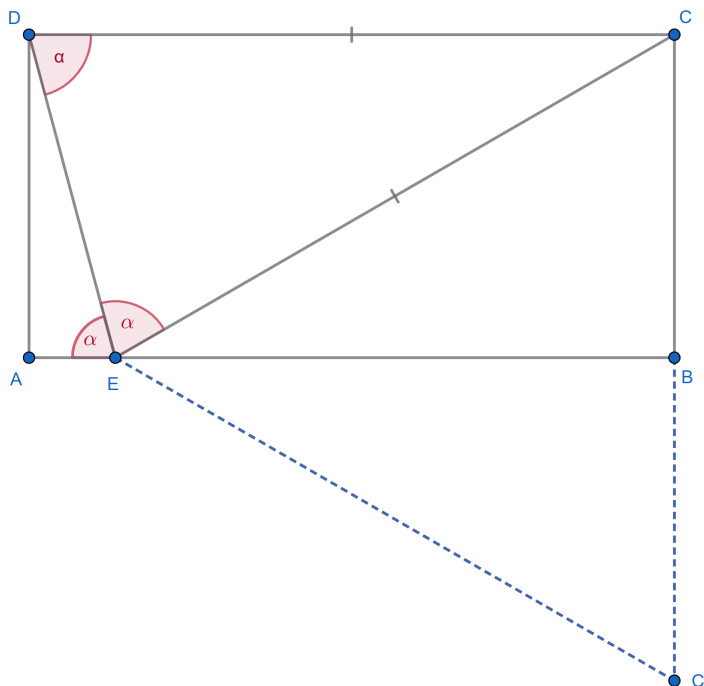
Tražena godina rođenja je 2021. godina.

Zadatak J-5.3. [20 bodova]

Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvostruko je dulja od stranice $\overline{BC}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da veličina kuta $\angle DEA$ bude jednaka veličini kuta $\angle CED$. Kolika je veličina tog kuta?

Rješenje.

Skica:



Prema uvjetima zadatka, kutovi $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle DEC$ su sukladni. Označimo s α veličine tih kutova.

Budući da je DE presječna paralelnih stranica pravokutnika $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, kutovi $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle CDE$ su sukladni pa je $\alpha = |\sphericalangle CDE|$.

Budući da trokut DEC ima dva kuta sukladna, on je jednakokraničan i vrijedi $|CD| = |CE|$. Kako je $|AB| = 2|BC|$, slijedi i $|CD| = 2|BC|$ te $|CE| = 2|BC|$.

Neka je C' osnosimetrična slika točke C s obzirom na AB . Tada je $|BC| = |BC'|$ te iz toga slijedi $|CE| = |CC'|$.

Kako je E točka na simetrali dužine $\overline{CC'}$, ona je jednako udaljena od točaka C i C' pa je $|CE| = |C'E|$. Dakle, trokut CEC' je jednakokraničan.

Jednakokranični trokut ima sva tri kuta jednake veličine i to 60° . U jednakokraničnom trokutu visina pripada simetrali kuta, stoga EB prepolavlja kut $\sphericalangle CEC'$, odakle zaključujemo da je $|\sphericalangle CEB| = 30^\circ$.

Kako je zbroj veličina kutova $\sphericalangle AED$, $\sphericalangle DEC$ i $\sphericalangle CEB$ jednak 180° (čine ispruženi kut), slijedi da je $2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$, odakle je konačno $\alpha = 75^\circ$.

Zadatak J-5.4. [25 bodova]

Odredi prirodne brojeve n i k za koje su točno tri od sljedeće četiri izjave istinite:

- 1) $n + 1$ je djeljiv s k
- 2) $n = 2k + 5$
- 3) $n + k$ je djeljiv s 3
- 4) $n + 7k$ je prost broj.

Rješenje.

Tražimo parove izjava koje ne mogu istovremeno biti istinite.

Primijetimo da u 2. izjavi dodavanjem k na obje strane dobivamo $n + k = 3k + 5$ što znači da $n + k$ nije djeljiv s 3, no 3. izjava tvrdi da $n + k$ je djeljiv s 3. Te dvije izjave ne mogu biti istovremeno istinite.

Također, ako je $n + k$ djeljiv s 3, možemo to zapisati u obliku $n + k = 3m$, $m \in \mathbb{N}$. Uvrštavanjem u izraz iz 4. izjave nam daje $n + 7k = 3m + 6k = 3(m + 2k)$ ($m + 2k \in \mathbb{N}$, $m + 2k > 1$) što znači da je taj izraz djeljiv s 3, a 4. izjava kaže da je $n + 7k$ prost broj, tako da ni te dvije izjave ne mogu biti istovremeno istinite.

To znači da je 3. izjava ta koja mora biti lažna.

Dodavanjem broja 1 na obje strane izraza iz 2. izjave dobivamo $n + 1 = 2k + 6$, a kako prema 1. izjavi k dijeli $n + 1$, mora vrijedi i da k dijeli $2k + 6$ pa slijedi da k dijeli 6. Stoga je $k \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Uvrštavamo moguće vrijednosti za k u izraz iz 2. izjave.

Za $k = 1$ je $n = 7$, no 4. izjava tada nije istinita jer 14 nije prost broj.

Za $k = 2$ je $n = 9$ i tada su istinite 1. i 4. izjava.

Za $k = 3$ je $n = 11$, no 4. izjava tada nije istinita jer 32 nije prost broj.

Za $k = 6$ je $n = 17$ i tada su istinite 1. i 4. izjava.

Dakle, rješenja su $(n, k) \in \{(9, 2), (17, 6)\}$.

Zadatak J-5.5. [30 bodova]

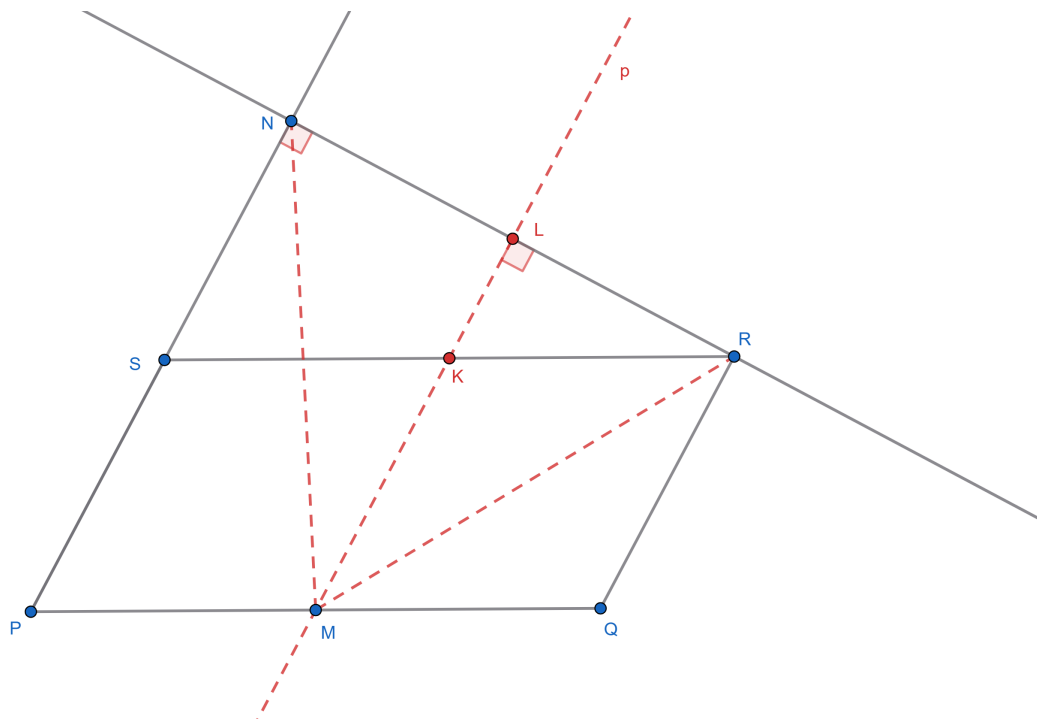
Neka je $PQRS$ paralelogram u kojemu vrijedi $|PQ| = 2|QR|$. Neka je točka M polovište stranice $\overline{PQ}$

i točka N nožište okomice iz vrha R na pravac PS .

Dokaži da vrijedi $|\angle QMN| = 3 \cdot |\angle PNM|$.

Rješenje.

Skica:



Točkom M nacrtajmo pravac p koji je paralelan s pravcem PN . Neka je K točka presjeka pravca p i stranice RS , a točka L presjek pravca p i pravca RN .

Vrijedi da je $p \perp RN$ jer je paralelan s pravcem PN koji je okomit na pravac RN . Tada je $|\angle PNR| = |\angle MLR| = 90^\circ$. Također je i $|\angle PNM| = |\angle LMN|$ jer su to sukladni kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca PN i p .

Nadalje, četverokut $MQRK$ je romb pa vrijedi $|\angle RMK| = |\angle RML| = |\angle QMR|$.

Budući da je $|SK| = |KR|$ i jer su dužine $\overline{KL}$ i $\overline{SN}$ paralelne, dužina $\overline{KL}$ je srednjica trokuta SRN . To znači i da točka L dijeli dužinu $\overline{RN}$ na dva sukladna dijela pa zbog toga i zbog činjenice da je $|\angle MLR| = 90^\circ$ vrijedi da je trokut RNM jednakokračan. Stoga je pravac p simetrala kuta $\angle RMN$.

Sada imamo $|\angle QMR| = |\angle RML| = |\angle LMN| = |\angle PNM|$, a kako je $|\angle QMN| = |\angle LMN| + |\angle RML| + |\angle QMR|$, vrijedi $|\angle QMN| = |\angle LMN| + |\angle LMN| + |\angle LMN|$, tj. $|\angle NMQ| = 3 \cdot |\angle NML|$.

Kako je $|\angle PNM| = |\angle LMN|$, konačno slijedi $|\angle QMN| = 3 \cdot |\angle PNM|$, što je trebalo dokazati.

Zadatak J-5.6. [35 bodova]

Koliko desetoroznamenkastih brojeva sadrži barem jednu znamenku 1 ili barem dvije znamenke 2 ili barem tri znamenke 3 ili ... ili barem devet znamenki 9?

Rješenje.

Označimo sa S_n skup svih desetoroznamenkastih brojeva koji sadrže barem n znamenki n , gdje je $n = 1, 2, 3, \dots, 9$. Trebamo odrediti vrijednost $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_9|$. Odredimo najprije koliko iznose pojedinačni $|S_n|$.

Krenimo od kraja, tj. od S_9 . Desetoroznamenkasti brojevi koje sadrže barem devet znamenki 9 imaju

ili točno deset ili točno devet znamenaka 9. Postoji samo jedan deseteroznamenasti broj s deset znamenaka 9. Deseteroznamenastih brojeva koji sadrže točno devet znamenaka 9 ima $9 \cdot 9 + 8 = 89$ (dijelimo ih s obzirom je li devetka na prvom mjestu ili ne). Stoga je $|S_9| = 89 + 1 = 90$.

Prelazimo na S_8 . Ponovno dijelimo ove brojeve na disjunktne skupove s obzirom na to koliko točno znamenki osam imaju. Jedini novi slučaj je točno osam znamenki 8. Takvih brojeva ima $\frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 \cdot 9 = 3564$. Stoga je $|S_8| = 3564 + 89 + 1 = 3654$.

Dalje nastavljamo istim postupkom. Dobije se $|S_7| = 88218$, $|S_6| = 1404792$, $|S_5| = 15458454$, $|S_4| = 119620890$, $|S_3| = 648936126$, $|S_2| = 2413851687$, $|S_1| = 5900636088$.

Kako bismo odredili koliko elemenata sadrži unija svih ovih skupova, koristimo formulu uključivanja i isključivanja. Evo Vennovog dijagrama za ove skupove:



(Prva četiri skupa su u obliku elipse i čine standardni Vennov dijagram za četiri skupa, a preostale skupove nadocrtavamo „iskrivljene” elipse pazeći s kojim skupovima imaju presjek).

FUI će u ovom slučaju glasiti:

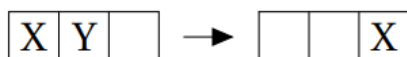
$$\begin{aligned}
 |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_9| = & |S_1| + |S_2| + |S_3| + \dots + |S_9| \\
 & - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_1 \cap S_4| - \dots - |S_1 \cap S_9| \\
 & - |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_4| - \dots - |S_2 \cap S_8| - |S_3 \cap S_4| - \dots - |S_3 \cap S_7| \\
 & - |S_4 \cap S_5| - |S_4 \cap S_6| \\
 & + |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + \dots + |S_1 \cap S_2 \cap S_7| \\
 & + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_1 \cap S_3 \cap S_5| + |S_1 \cap S_3 \cap S_6| + |S_1 \cap S_4 \cap S_5| \\
 & + |S_2 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3 \cap S_5| \\
 & - |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|.
 \end{aligned}$$

Veličinu svakog presjeka u ovoj formuli računamo dijeleći na slučajeve ovisno o točnom broju znamenaka, kao prije, uz pomoć metode komplementa. Dobije se $|S_1 \cap S_2| = 432245757$, $|S_1 \cap S_3| = 359755894$,

$|S_1 \cap S_4| = 247826194$, $|S_1 \cap S_5| = 6837838$, $|S_1 \cap S_6| = 525616$, $|S_1 \cap S_7| = 26194$, $|S_1 \cap S_8| = 766$,
 $|S_1 \cap S_9| = 10$, $|S_2 \cap S_3| = 58527674$, $|S_2 \cap S_4| = 16031553$, $|S_2 \cap S_5| = 1497789$, $|S_2 \cap S_6| = 88479$,
 $|S_2 \cap S_7| = 3009$, $|S_2 \cap S_8| = 45$, $|S_3 \cap S_4| = 2450904$, $|S_3 \cap S_5| = 174420$, $|S_3 \cap S_6| = 7224$,
 $|S_3 \cap S_7| = 120$, $|S_4 \cap S_5| = 10416$, $|S_4 \cap S_6| = 210$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 51988170$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_4| = 6338034$,
 $|S_1 \cap S_2 \cap S_5| = 472944$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_6| = 19674$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_7| = 450$, $|S_1 \cap S_3 \cap S_4| = 477120$,
 $|S_1 \cap S_3 \cap S_5| = 31500$, $|S_1 \cap S_3 \cap S_6| = 1350$, $|S_1 \cap S_4 \cap S_5| = 1260$, $|S_2 \cap S_3 \cap S_4| = 97170$,
 $|S_2 \cap S_3 \cap S_5| = 2520$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| = 12600$. Konačni rezultat je stoga jednak 8032934085.

Zadatak J-5.7. [40 bodova]

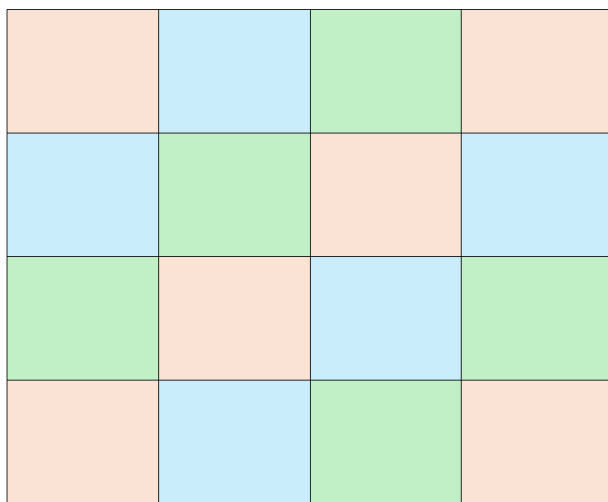
Na 15 polja ploče dimenzija 4×4 nalaze se žetoni, a jedno polje je prazno. Anton nizom poteza pokušava s ploče ukloniti što više žetona. U svakom potezu on odabire tri uzastopna polja (horizontalno ili vertikalno), uzima žeton s prvog polja, preskače njime žeton na drugom polju i stavlja prvi žeton na treće polje (do tada prazno), a drugi (preskočeni) žeton uklanja s ploče (vidi sliku).



Odredi koja sve polja ploče mogu na početku biti prazna kako bi Anton mogao postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton.

Rješenje.

Uočimo da svakim potezom, tj. preskakanjem i uklanjanjem žetona, nestane žeton s polja s kojega je krenuo skok i nestane žeton koji je preskočen, a pojavi se žeton na mjestu koje je do tada bilo prazno. Stoga možemo zaključiti kako s obzirom na promjenu broja žetona u jednom potezu postoje tri vrste polja. Dakle, ima smisla obojiti ploču s 3 različite boje, i to tako da svaka tri uzastopna polja ploče budu obojena u tri različite boje.



Sada primjećujemo da se kod ovakvog bojanja u svakom potezu ukupan broj žetona koji se nalaze na neke dvije boje smanji za točno 1, a ukupan broj žetona na trećoj boji se poveća za točno 1. Iz toga slijedi da se u svakom potezu promijeni parnost ukupnog broja žetona na svakoj pojedinoj boji.

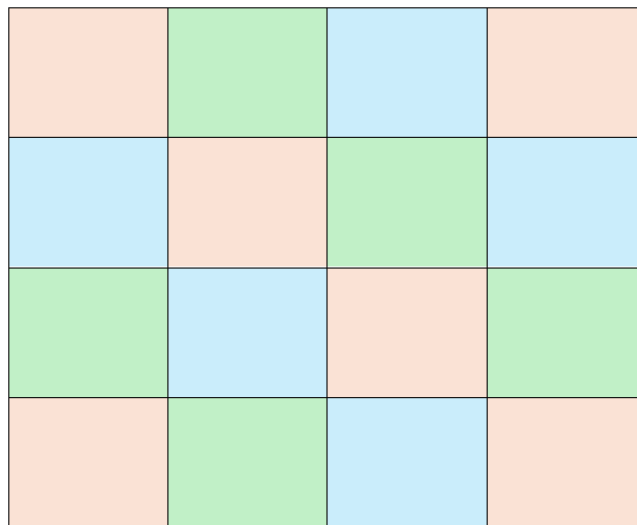
Kako je na početku na ploči 15 žetona, ako Anton uspije završiti sa samo jednim žetonom na ploči, znamo da je napravio ukupno 14 poteza. Zaključujemo da će parnost ukupnog broja žetona na svakoj pojedinoj boji na kraju biti jednaka kao i na početku.

Uočimo da je 6 polja ploče obojeno u crveno, a po 5 polja u plavo i zeleno. Budući da na kraju ostaje samo jedan žeton na cijeloj ploči, broj žetona na neke dvije boje na početku mora biti paran, a na

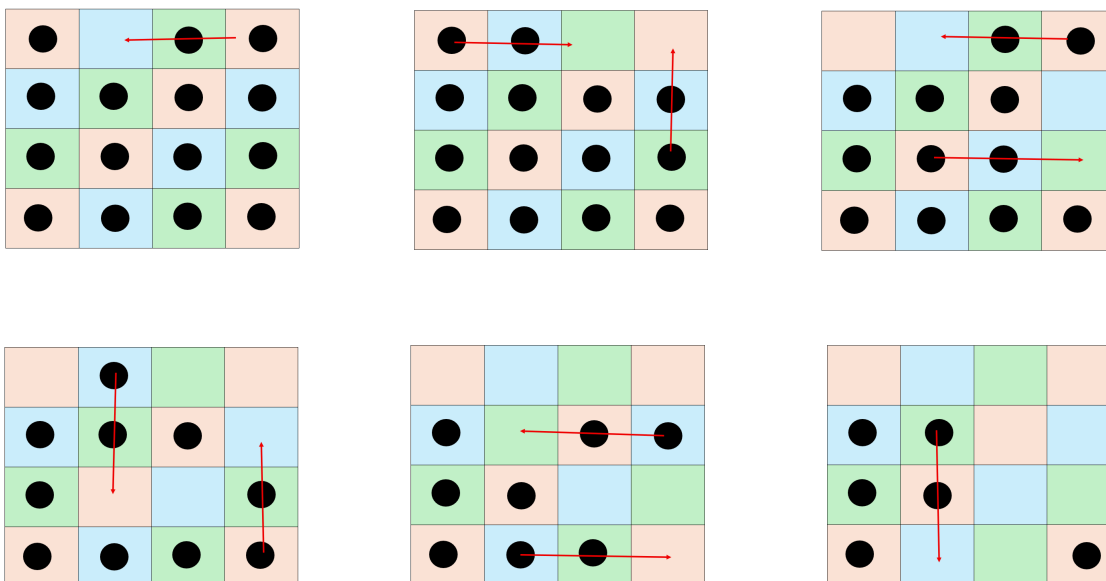
preostaloj boji broj žetona mora biti neparan. Primijetimo sada da nije moguće da istovremeno na plavoj i zelenoj boji imamo po paran broj žetona na početku, jer bi tada barem po jedno plavo i zeleno polje ostalo prazno, a to je u kontradikciji s činjenicom da je na početku samo jedno polje ploče prazno.

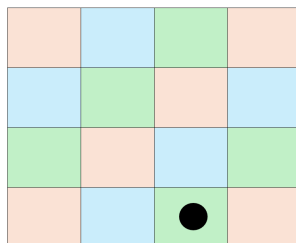
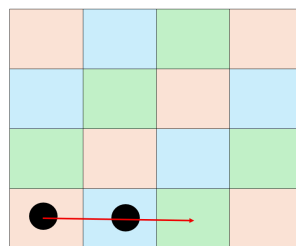
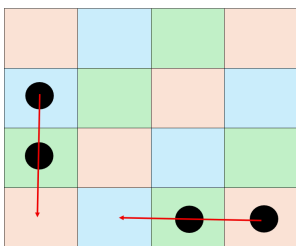
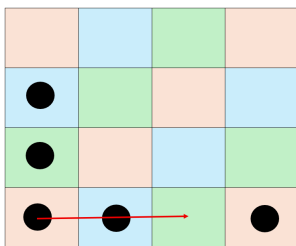
Zaključujemo da na crvenim poljima početni broj žetona mora biti paran. No, tada na svim crvenim poljima na početku mora biti postavljen žeton, jer bi u suprotnom barem dva crvena polja bila prazna. Prazno polje stoga može biti plave ili zelene boje.

Primijetimo sada da rotacijom ploče za 90° dobijemo ponovno bojanje koje zadovoljava svojstvo da su svaka tri uzastopna polja obojena u tri različite boje. Stoga istim zaključivanjem zaključujemo da i pri ovakvom bojanju sva crvena polja moraju biti popunjena. Zaključujemo da prazno polje na početku jedino može biti neko polje na rubu ploče koje nije kut ploče.



Sljedeća konstrukcija pokazuje da u tom slučaju Anton zaista može postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton (na slici).





Zadatak J-5.8. [45 bodova]

Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$, ako su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Za koje a, b i c se ta vrijednost postiže?

Rješenje.

Označimo izraz koji želimo minimizirati sa S . Ako direktno primijenimo AG nejednakost, dobili bismo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c}} = b + c + a, \end{aligned}$$

što nije ništa, ali u ovom slučaju nije ni nešto, jer ne znamo minimizirati vrijednost od $a + b + c$.

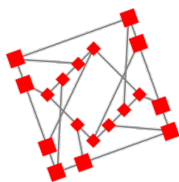
Primijetimo li da je uvjet koji imamo kvadratan, možemo doći na ideju da izraz S kvadriramo. Tada imamo:

$$S^2 = \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2.$$

Sada zadatak postaje minimizirati izraz $\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2}$. U njemu primijenimo AG nejednakost na parove pa dobijemo:

$$\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} \right) \geq b^2 + c^2 + a^2 = 1.$$

Stoga vrijedi $S^2 \geq 1 + 2 = 3$, tj. $S \geq \sqrt{3}$. Ova minimalna vrijednost se postiže za $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



MEDO 2025./2026.

Peto kolo

28. ožujka 2026.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

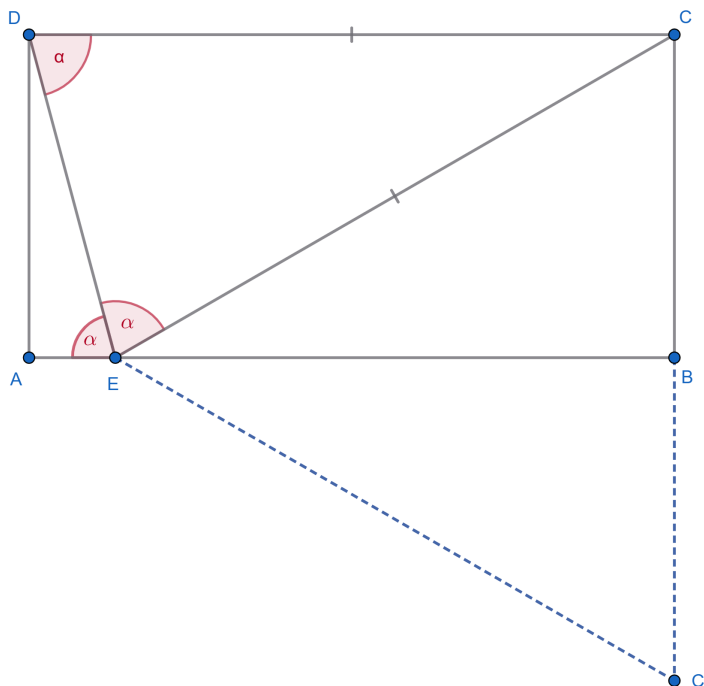
Zadaci i rješenja

Zadatak S-5.1. [10 bodova]

Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvostruko je dulja od stranice $\overline{BC}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da veličina kuta $\sphericalangle DEA$ bude jednaka veličini kuta $\sphericalangle CED$. Kolika je veličina tog kuta?

Rješenje.

Skica:



Prema uvjetima zadatka, kutovi $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle DEC$ su sukladni. Označimo s α veličine tih kutova.

Budući da je DE presječnica paralelnih stranica pravokutnika $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, kutovi $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle CDE$ su sukladni pa je $\alpha = |\sphericalangle CDE|$.

Budući da trokut DEC ima dva kuta sukladna, on je jednakokrakan i vrijedi $|CD| = |CE|$. Kako je $|AB| = 2|BC|$, slijedi i $|CD| = 2|BC|$ te $|CE| = 2|BC|$.

Neka je C' osnosimetrična slika točke C s obzirom na AB . Tada je $|BC| = |BC'|$ te iz toga slijedi $|CE| = |CC'|$.

Kako je E točka na simetrali dužine $\overline{CC'}$, ona je jednako udaljena od točaka C i C' pa je $|CE| = |C'E|$. Dakle, trokut CEC' je jednakostraničan.

Jednakostranični trokut ima sva tri kuta jednake veličine i to 60° . U jednakostraničnom trokutu visina pripada simetrali kuta, stoga EB prepolavlja kut $\sphericalangle CEC'$, odakle zaključujemo da je $|\sphericalangle CEB| = 30^\circ$.

Kako je zbroj veličina kutova $\angle AED$, $\angle DEC$ i $\angle CEB$ jednak 180° (čine ispruženi kut), slijedi da je $2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$, odakle je konačno $\alpha = 75^\circ$.

Zadatak S-5.2. [15 bodova]

Kažemo da je tablica 3×3 *šarolika* ako je u svako polje te tablice upisan po jedan od brojeva -1 , 0 i 1 , tako da je svih šest zbrojeva brojeva u pojedinom retku odnosno stupcu međusobno različito.

Postoji li takva tablica? Ako postoji, koliko ima različitih šarolikih tablica?

Prvo rješenje.

Pokazat ćemo da takva tablica ne postoji. Raspišimo najprije sve moguće kombinacije 3 broja i pogledajmo koji je zbroj svake od njih.

-3	-2	-1	0	1	2	3
-1 -1 -1	-1 -1 0	-1 0 0	0 0 0	1 0 0	1 1 0	1 1 1
		1 1 -1	1 0 -1	-1 -1 1		

Pokažimo najprije da ukoliko je tablica šarolika, u tablici ne mogu istovremeno postojati redak ili stupac čija je suma 3 i čija je suma -3 . Pretpostavimo da je suma prvog retka 3. Tada je odmah jasno da ne postoji stupac u kojem je suma -3 (prvi redak sadrži samo jedinice). Neka je bez smanjenja općenitosti suma drugog retka -3 . Kako svi stupci sada imaju po dva ista broja, moraju se razlikovati u trećem broju pa zadnji redak sadrži sve različite brojeve 1, 0 i -1 , no tada su sume u 2. stupcu i 3. retku jednake.

1	1	1	→	1	1	1
-1	-1	-1		-1	-1	-1
				1	0	-1

Primijetimo da postoji 7 različitih suma. Da bi sume svih redaka i stupaca bile različite, tablica treba sadržavati 6 različitih suma. Stoga se svi zbrojevi osim jednog trebaju postići u tablici te se zato samo jedan od zbrojeva 3 i -3 mora postići.

Primijetimo nadalje da je suma svih redaka i stupaca jednaka dvostrukom zbroju svih elemenata tablice. Kako je suma zbrojeva parna, broj redaka ili stupaca s neparnom sumom mora biti paran. Kako smo zaključili da od zbrojeva koji se postižu u tablici mora nedostajati 3 ili -3 , to nije moguće. Stoga ne postoji šarolika tablica.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da postoji 7 različitih suma, a ako je tablica šarolika, treba sadržavati 6 različitih suma. Također zaključujemo da se jedna od suma 3 i -3 mora postići.

Pretpostavimo nadalje da postoji redak kojem je suma 3. Pokažimo da se tada u toj tablici ne može postići suma -2 . Opet kao i ranije zaključujemo da ne postoji stupac kojem je suma -2 . Neka je bez smanjenja općenitosti suma prvog retka 3 i suma drugog retka -2 .

1	1	1
-1	-1	0

Tada, kako smo prije pokazali da suma ni jednog retka ni stupca ne može biti -3 , svi ostali zbrojevi se moraju postići, pa tako i 2. Zbroj 2 se može postići samo brojevima 1, 1 i 0. Ukoliko bi to bila suma zadnjeg retka, imamo dva moguća slučaja.

1	1	1	1	1	1
-1	-1	0	-1	-1	0
1	1	0	1	0	1

U prvom slučaju je suma prva dva stupca jednaka, a u drugom suma trećeg retka i trećeg stupca.

Ako se pak suma 2 postiže u trećem stupcu, tada jedan od preostalih stupaca mora imati sumu -1 , BSO neka je to prvi stupac. To znači da zadnji redak ima na prvom mjestu -1 . Tada neovisno što je drugi element trećeg stupca, suma drugog stupca i trećeg retka su jednake.

1	1	1
-1	-1	0
-1	x	1

Zaključili smo da ako postoji suma jednaka 3, ne mogu se postići sume -3 i -2 , a ako je suma -3 analogno zaključujemo da se ne mogu postići 3 i 2. Stoga ne postoji šarolika tablica.

Zadatak S-5.3. [20 bodova]

Neka su m i n relativno prosti prirodni brojevi takvi da je $\frac{m+n}{m-n}$ također prirodan broj. Dokaži da je barem jedan od brojeva $mn+1$ i $4mn+1$ potpun kvadrat.

Rješenje.

Neka je $\frac{m+n}{m-n} = k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\frac{m+n}{m-n} &= k \\ m+n &= km - kn \\ n(k+1) &= m(k-1) \\ \frac{n}{m} &= \frac{k-1}{k+1}\end{aligned}$$

Kako su m, n relativno prosti, postoji $d \in \mathbb{N}$ takav da je $nd = k-1$ te $md = k+1$. Množenjem ovih jednakosti dobivamo da je $mnd^2 = k^2 - 1$, odnosno

$$d^2 mn + 1 = k^2. \quad (1)$$

Preostaje odrediti d . S obzirom da d dijeli $k-1$ i $k+1$, mora dijeliti i njihovu razliku, dakle $d = 1$ ili $d = 2$ pa iz (1) slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak S-5.4. [25 bodova]

U ovisnosti o realnom broju x odredi vrijednost beskonačne sume:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{8} \right\rfloor + \dots$$

Napomena: $\lfloor a \rfloor$ označava najveći cijeli broj manji ili jednak realnom broju a .

Rješenje.

Primijetimo najprije da je suma konačna. Naime, za dovoljno veliki n je $\left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor < \frac{1}{2}$ pa je

$$\frac{x+2^n}{2^{n+1}} = \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}$$

strogo između 0 i 1. Zato je najveći cijeli broj manji od tog izraza 0.

Neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor.$$

Tvrdimo da za $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$$

Neka je $x = n + \alpha$ gdje je $n \in \mathbb{N}, \alpha \in [0, 1)$.

- za $\alpha < \frac{1}{2}$ je $2\alpha < 1$ i $\alpha + \frac{1}{2} < 1$ pa je $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n$ te $\lfloor 2x \rfloor = 2n$ pa u ovom slučaju vrijedi jednakost
- za $\alpha \geq \frac{1}{2}$ je $2\alpha \geq 1$ i $\alpha + \frac{1}{2} \geq 1$ pa je $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + 1$ te $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$ pa i u ovom slučaju vrijedi jednakost

Dalje imamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor &= \sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \sum_{n=0}^N \left\lfloor 2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor \\ &= \sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x}{2^n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{2^{N-1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2^N} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{N+1}} \right\rfloor \end{aligned}$$

Vidimo da se suma teleskopira, tj. da se svi srednji članovi pokrate. Imamo

$$\sum_{n=0}^N \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{N+1}} \right\rfloor$$

Za dovoljno veliki n (pa tako i za N) je $\frac{x}{2^{n+1}}$ između 0 i 1 za $x \geq 0$ te između 0 i -1 za $x < 0$, a najveće cijelo od toga je 0 za $x \geq 0$, odnosno -1 za $x < 0$. Konačno,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0 \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

Zadatak S-5.5. [30 bodova]

Žeton je postavljen u ishodište koordinatnog sustava. Medvjedi Dado i Tina igraju sljedeću igru. Dado igra prvi, a zatim igraju naizmjenično. U svakom potezu igrač bira dva (ne nužno različita) cijela broja a i b , koje ni Dado ni Tina nisu odabrali u prethodnim potezima, te zatim pomiče žeton za a jedinica u horizontalnom smjeru i za b jedinica u vertikalnom smjeru. Tina pobjeđuje ako se žeton u bilo kojem trenutku vrati u ishodište. Može li Dado spriječiti Tinu da pobijedi?

Napomena: Pomak u horizontalnom smjeru za pozitivnu vrijednost ide udesno, a za negativnu ulijevo (analogno vrijedi i za vertikalni smjer).

Rješenje.

Dado može spriječiti Tinu da pobijedi sljedećom strategijom.

Neka je S skup svih brojeva koje su Dado i Tina prije odabrali te (x, y) trenutne koordinate žetona. Stavimo $t := 3 \cdot \max\{1, |x|, |a| : a \in A\}$.

Dado na svom potezu bira brojeve $(a, b) = (t, -x - t)$ te pomiče žeton s (x, y) na $(x + t, y - x - t)$.

Dokažimo najprije da Dado može uvijek odabrati brojeve t i $-x - t$.

Očito je $t > |a|$ pa se broj t ne nalazi u skupu S .

Također imamo da je

$$|-x - t| \geq |t| - |x| \geq \frac{2}{3}|t| > |a|$$

pa slijedi da se ni broj $-x - t$ ne nalazi u skupu S .

Budući da se t i $-x - t$ ne nalaze u skupu S , Dado ih može odabrati na svom potezu.

Uočimo da Dado ovom strategijom nikada neće završiti u ishodištu jer je $t > |x|$ pa je $x + t > 0$. Dakle, x -koordinata nove pozicije žetona će uvijek biti pozitivna nakon što Dado odigra svoj potez.

Pretpostavimo sada suprotno, tj. da Tina može vratiti žeton natrag u ishodište ako Dado koristi gornju strategiju. Neka je Dado u svom prethodnom potezu, prije nego što je Tina pobjedila, odabrao brojeve $(t, -x - t)$ te žeton pomaknuo iz (x, y) u $(x + t, y - x - t)$. Kako Tina u idućem potezu pobjeđuje, ona posebno onda mora odabrati broj $a = -x - t$ da bi x -koordinata žetona postala 0. Međutim, to dovodi do kontradikcije jer je u prethodnom potezu Dado već odabrao broj $-x - t$.

Dakle, prethodno opisanom strategijom Dado spriječava Tinu da pobjedi.

Zadatak S-5.6. [35 bodova]

Neka je A konačan skup funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa svojstvima:

- (i) ako su $f, g \in A$, onda je $f \circ g \in A$
- (ii) za svaku funkciju $f \in A$ postoji funkcija $g \in A$ tako da vrijedi $f(f(x) + y) = 2x + g(g(y) - x)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Neka je $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ identiteta, tj. $id(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $id \in A$.

Rješenje.

Uzmimo $f \in A$ te njoj pridruženu $g \in A$ tako da vrijedi

$$f(f(x) + y) = 2x + g(g(y) - x).$$

Sada uvrstimo $x = \frac{f(0) - x}{2}$, $y = -f\left(\frac{f(0) - x}{2}\right)$:

$$g\left(g\left(-f\left(\frac{f(0) - x}{2}\right)\right) - \frac{f(0) - x}{2}\right) = x$$

Vidimo da g može poprimiti bilo koju vrijednost u $\mathbb{R}$, tj. da je g surjekcija.

Također, fiksiranjem $x \in \mathbb{R}$ i uvrštavanjem y takvog da je $g(y) = x$ dobivamo

$$f(f(x) + y) = 2x + g(0)$$

iz čega slijedi da i f može poprimiti bilo koju vrijednost u $\mathbb{R}$, tj. da je f surjekcija. Dakle, svaki element u A je surjekcija.

Uzmimo opet $f \in A$ te promatrajmo dalje niz $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$ gdje je $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ puta}}$.

Svaki član ovog niza je po svojstvu (i) u skupu A . Kako je A konačan, moraju se dogoditi ponavljanja u ovom nizu, odnosno postoje $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$ takvi da je $f^{(k)} = f^{(l)}$.

Iz toga dalje imamo

$$f^{(k)}(x) = f^{(k-l)}(f^{(l)}(x)) = f^{(l)}(x)$$

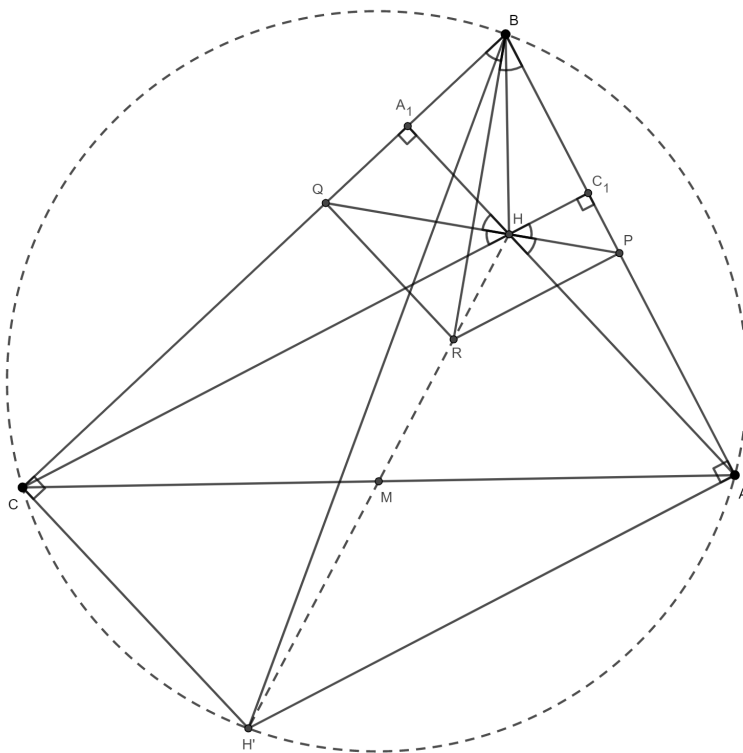
Stavljanjem $y = f^{(l)}(x)$, a to možemo postići za svaki $y \in \mathbb{R}$ jer je f surjekcija, dobivamo $f^{(k-l)}(y) = y$. Dakle, vidimo da je $f^{(k-l)}$ identiteta.

Zadatak S-5.7. [40 bodova]

Neka je točka H ortocentar raznostraničnog šiljastokutnog trokuta ABC . Simetrala šiljastog kuta kojeg čine pravci AH i CH siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama P i Q . Neka je M polovište stranice $\overline{AC}$. Simetrala kuta u vrhu B trokuta ABC siječe dužinu $\overline{HM}$ u točki R . Dokaži da točke P , B , Q i R leže na istoj kružnici.

Rješenje.

Označimo s α i β redom kutove u vrhovima A i B trokuta ABC . Neka su A_1 i C_1 redom nožišta visina iz vrhova A i C u trokutu ABC te neka je H' centralno simetrična točka ortocentra H u odnosu na M .



Kako je točka M polovište stranice $\overline{AC}$ slijedi da je četverokut $AH'CH$ paralelogram. Posebno, imamo da je AH' paralelno s CH i CH' je paralelno s AH .

Nadalje, kako su AH i CH redom okomiti na BC i AB slijedi da je

$$\sphericalangle H'AB = \sphericalangle BCH' = 90^\circ.$$

Prema tome točka H' se nalazi na opisanoj kružnici trokuta ABC te je $\overline{BH'}$ promjer opisane kružnice.

Imamo da je

$$\sphericalangle H'BC = \sphericalangle H'AC = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle C_1BH.$$

Prema K-K poučku o sličnosti trokuta sada slijedi da su trokuti BC_1H i BCH' slični, odnosno imamo da vrijedi

$$\frac{|BH|}{|BH'|} = \frac{|BC_1|}{|BC|}.$$

Iz $\sphericalangle H'BC = \sphericalangle C_1BH$ slijedi da je BR također i simetrala kuta $\sphericalangle HBB'$. Primjenom poučka o simetrali unutarnjeg kuta u trokutu $HH'B$ i gornje jednakosti redom imamo

$$\frac{|HR|}{|H'R|} = \frac{|BH|}{|BH'|} = \frac{|BC_1|}{|BC|}.$$

Nadalje, trokuti AHC_1 , CHA_1 i CBC_1 su slični jer su to pravokutni trokuti te je

$$\sphericalangle C_1HA = \sphericalangle CHA_1 = 180^\circ - \sphericalangle AHC = 180^\circ - \sphericalangle AH'C = \beta.$$

Iz gornje sličnosti sada redom imamo da je

$$\frac{|C_1H|}{|AH|} = \frac{|A_1H|}{|CH|} = \frac{|BC_1|}{|BC|} = \frac{|HR|}{|H'R|}.$$

Primjenom poučka o simetrali unutarnjeg kuta u trokutu AHC_1 slijedi da je

$$\frac{|PC_1|}{|PA|} = \frac{|C_1H|}{|AH|} = \frac{|HR|}{|H'R|},$$

odnosno da je pravac PR paralelan s pravcem C_1H .

Kako je C_1H okomito na AB slijedi da je $\sphericalangle RPB = 90^\circ$.

Sasvim analogno se dobije da je QR paralelno s A_1H i da je $\sphericalangle BQR = 90^\circ$.

Konačno, iz $\sphericalangle RPB = \sphericalangle BQR = 90^\circ$ slijedi da je četverokut $PRQB$ tetivan.

Zadatak S-5.8. [45 bodova]

Dani su prirodni brojevi $m, n > 1$. Dokaži da postoji samo konačno mnogo uređenih parova prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$(x+1)^n + (x+2)^n + \dots + (x+m)^n = (y+1)^{2n} + (y+2)^{2n} + \dots + (y+m)^{2n}.$$

Rješenje.

Dokažimo najprije sljedeću lemu.

Lema: Postoje prirodni brojevi y_0 i C takvi da za sva rješenja (x, y) početne jednadžbe za koja je $y \geq y_0$ vrijedi

$$y^2 + (m+1)y - C \leq x \leq y^2 + (m+1)y + C.$$

Dokaz leme: Stavimo da je $x = y^2 + (m+1)y + c$. Uvrstimo taj izraz za x natrag u početnu jednadžbu. Time na lijevoj i desnoj strani jednadžbe dobivamo polinome stupnja najviše $2n$ u varijabli y .

Koeficijenti uz y^{2n} na obje strane iznose m , a uz y^{2n-1} iznose $nm(m+1)$.

Koeficijent uz y^{2n-2} na lijeve strane jednadžbe iznosi

$$m(m+1)^2 \binom{n}{2} + \frac{nm(m+1)}{2} + m \binom{n}{1} c,$$

a na desnoj strani jednadžbe

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \binom{2n}{2}.$$

Uočimo da koeficijent uz y^{2n-2} od lijeve strane linearno ovisi o c , dok koeficijent desne strane uopće ne ovisi o c . Prema tome slijedi da postoje cijeli brojevi C_1 i C_2 takvi da za sve $c \geq C_1$ vrijedi

$$m(m+1)^2 \binom{n}{2} + \frac{nm(m+1)}{2} + m \binom{n}{1} c > \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \binom{2n}{2}$$

te za sve $c \leq C_2$ vrijedi

$$m(m+1)^2 \binom{n}{2} + \frac{nm(m+1)}{2} + m \binom{n}{1} c < \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \binom{2n}{2}.$$

U slučaju $c \geq C_1$ imamo da će koeficijent uz y^{2n-2} lijeve strane jednadžbe biti uvijek veći nego koeficijent uz y^{2n-2} od desne strane jednadžbe. Iz toga slijedi da će polinom na lijevoj strani brže rasti nego polinom na desnoj strani. Posebno, postoji prirodan broj y_1 tako da za sve $y \geq y_1$ će lijeva strana jednadžbe biti veća od desne strane te u tom slučaju nemamo rješenja za našu početnu jednadžbu.

Analogno za slučaj $c \leq C_2$ imamo da postoji prirodan broj y_2 tako da za sve $y \geq y_2$ će desna strana jednadžbe biti uvijek veća od lijeve strane te ponovo u tom slučaju nemamo rješenja početne jednadžbe.

Stavljanjem $y_0 := \max\{y_1, y_2\}$ te $C := \max\{|C_1|, |C_2|\}$ slijedi tvrdnja leme.

□

Neka su sada y_0 i C brojevi kao u lemi.

Kako polinom stupnja n ima najviše n različitih nutločka slijedi da za svaki prirodan broj $y < y_0$ imamo najviše n prirodnih brojeva x koji zadovoljavaju početnu jednadžbu. To nam ukupno daje najviše $n(y_0 - 1)$ rješenja.

Za $y \geq y_0$ iz leme slijedi da je tada

$$y^2 + (m+1)y - C \leq x \leq y^2 + (m+1)y + C,$$

odnosno x može poprimiti $2C + 1$ mogućih vrijednosti.

Uvrštavanjem svake od tih vrijednosti u početnu jednadžbu dobivamo polinom stupnja $2n$ u y . Time slijedi da za svaku od tih vrijednosti x imamo najviše $2n$ prirodnih brojeva y koji zadovoljavaju početnu jednadžbu. Dakle, u slučaju kad je $y \geq y_0$ ukupno imamo najviše $2n(2C + 1)$ rješenja.

Konačno, iz gornjih slučajeva slijedi da početna jednadžba ima najviše $n(y_0 - 1) + 2n(2C + 1)$ rješenja, tj. broj rješenja početne jednadžbe u skupu prirodnih brojeva jest konačan.