

MEDO 2025./2026.

Drugo kolo

6.12.2025.

Kadeti (5. i 6. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak K-2.1. [10 bodova]

Izračunaj:

$$21 \cdot 25 + 71 \cdot 21 - 21 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9 \cdot 21 - 21 - 75.$$

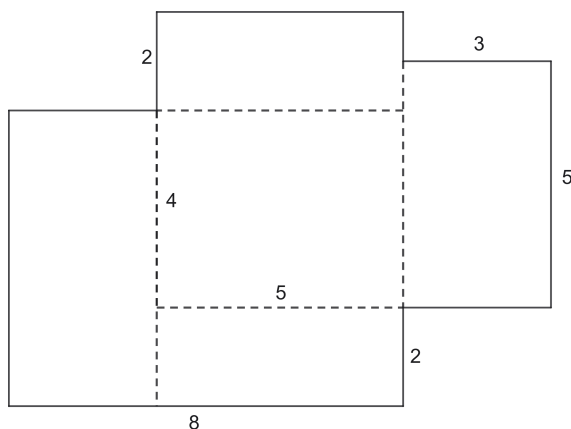
Rješenje.

Primijetimo da možemo iskoristiti distributivnost množenja prema zbrajanju i oduzimanju budući da na više mjesta imamo višekratnike broja 21:

$$\begin{aligned} & 21 \cdot 25 + 71 \cdot 21 - 21 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9 \cdot 21 - 21 - 75 \\ &= 21 \cdot 25 + 21 \cdot 71 - 21 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 + 21 \cdot 5 \cdot 9 - 21 \cdot 1 - 75 \\ &= 21 \cdot (25 + 71 - 4 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9 - 1) - 75 \\ &= 21 \cdot (25 + 71 - 40 + 45 - 1) - 75 \\ &= 21 \cdot (25 + (71 - 1) - 40 + 45) - 75 \\ &= 21 \cdot (25 + 70 - 40 + 45) - 75 \\ &= 21 \cdot 100 - 75 \\ &= 2100 - 75 \\ &= 2025 \end{aligned}$$

Zadatak K-2.2. [15 bodova]

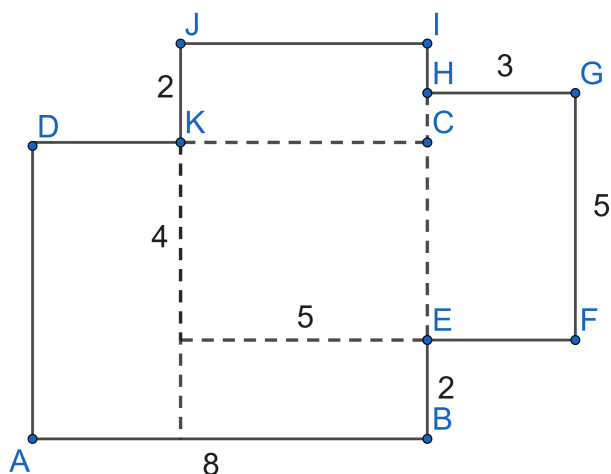
Marko je s obitelji preselio u novi stan čiji je tlocrt dan na slici, a na njemu su istaknute neke mjere u metrima. Sve istaknute sobe su pravokutnog oblika.



Odredi površinu Markovog stana.

Prvo rješenje.

Dopunimo sliku tako da istaknemo nekoliko točaka:



Uočimo na slici tri pravokutnika koji se ne preklapaju: $ABCD$, $EFGH$ i $IJKC$. Da bismo odredili ukupnu površinu stana, potrebno je zbrojiti površinu ovih triju pravokutnika. Duljina stranice $\overline{AB}$ je 8 cm, a duljina stranice $\overline{BC}$ je 6 cm (zato što je $|BC| = |BE| + |EC|$). Površina pravokutnika $ABCD$ je stoga jednaka $8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2$.

Duljina stranice $\overline{EF}$ je 3 cm, a duljina stranice $\overline{GF}$ je 5 cm. Površina pravokutnika $EFGH$ stoga iznosi $3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2$.

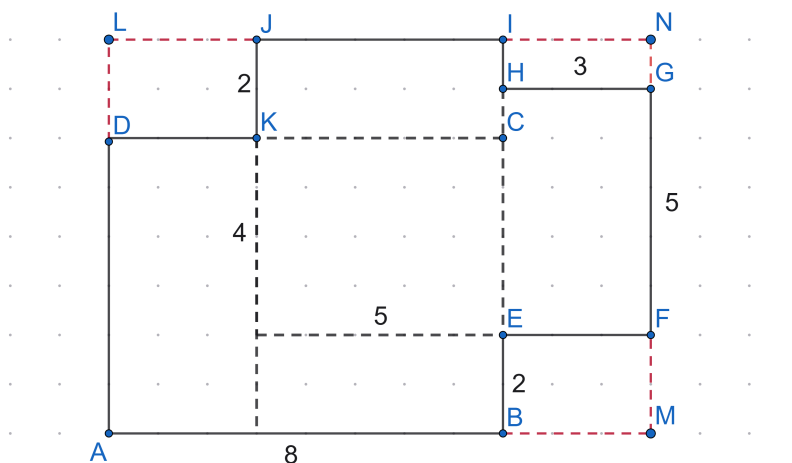
Duljina stranice $\overline{KC}$ je 5 cm, a duljina stranice $\overline{JK}$ je 2 cm. Površina pravokutnika $IJKC$ iznosi $5 \cdot 2 = 10 \text{ cm}^2$.

Ukupna površina stana je:

$$48 \text{ cm}^2 + 15 \text{ cm}^2 + 10 \text{ cm}^2 = 73 \text{ cm}^2.$$

Drugo rješenje.

Dopunimo sliku tako da stvorimo pravokutnik oko cijelog stana (crveno istaknute stranice):



Da bismo dobili površinu stana, potrebno je od površine pravokutnika $AMNL$ oduzeti površine pravokutnika $BMFE$, $HGNI$ i $DKJL$.

Duljina stranice $\overline{AM}$ je 11 cm (zato što je $|AM| = |AB| + |BM|$), a duljina stranice $\overline{MN}$ je 8 cm (zato što je $|MN| = |MF| + |FG| + |GN|$, a $|GN| = 1$ cm zato što je $|NG| = |HI| = |EH| - |EC| = 5 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$). Površina pravokutnika $AMNL$ stoga iznosi $11 \cdot 8 = 88 \text{ cm}^2$.

Duljina stranice $\overline{BM}$ je 3 cm, a duljina stranice $\overline{EB}$ je 2 cm. Površina pravokutnika $BMFE$ iznosi $3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}^2$.

Duljina stranice $\overline{GH}$ je 3 cm, a duljina stranice $\overline{HI}$ je 1 cm. Površina pravokutnika $HGNI$ iznosi $3 \cdot 1 = 3 \text{ cm}^2$.

Duljina stranice $\overline{DK}$ je 3 cm (zato što je $|DK| = |DC| - |KC|$), a duljina stranice $\overline{KJ}$ je 2 cm. Površina pravokutnika $DKJL$ iznosi $3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}^2$.

Ukupna površina stana je:

$$88 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 - 3 \text{ cm}^2 - 6 \text{ cm}^2 = 73 \text{ cm}^2.$$

Zadatak K-2.3. [20 bodova]

Mirela i Paula zajedno su za Božić dobile 50 bombona, Paula i Izabela su zajedno dobile 38 bombona, a Mirela i Izabela su zajedno dobile 56 bombona. Koliko bombona je dobila svaka od djevojaka?

Prvo rješenje.

Pozbrajamo li sve navedene iznose, dobivamo $50 + 38 + 56 = 144$ bombona. S druge strane, to je točno dvostruki broj bombona koji imaju sve tri djevojke zajedno jer smo svačije bombone pribrojili dva puta. Stoga znamo da sve tri djevojke zajedno imaju 72 bombona.

Sada znamo da Mirela i Paula zajedno imaju 50 bombona. Dakle, Izabela ima ono što nedostaje od 50 do 72, odnosno $72 - 50 = 22$ bombona.

Dalje, Paula i Izabela imaju zajedno 38 bombona, a od toga 22 ima Izabela, pa zato Paula ima $38 - 22 = 16$ bombona.

Konačno, Mirela i Izabela imaju zajedno 56 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa zato Mirela ima $56 - 22 = 34$ bombona.

Dakle, Mirela ima 34 bombona, Paula ima 16 bombona, a Izabela ima 22 bombona.

Drugo rješenje.

Označimo sa M , P i I količinu bombona koje imaju redom Mirela, Paula i Izabela. Znamo da su te veličine u sljedećim odnosima:

$$M + P = 50$$

$$P + I = 38$$

$$M + I = 56$$

Pozbrajamo li sve tri dobivene jednadžbe dobivamo $2M + 2P + 2I = 144$, odnosno

$$M + P + I = 72.$$

Sada znamo da sve tri djevojke zajedno imaju 72 bombona, a Mirela i Paula zajedno imaju 50 bombona. Dakle, Izabela ima ostatak od 50 do 72 bombona, odnosno

$$I = 72 - M - P = 72 - (M + P) = 72 - 50 = 22.$$

Dalje, Paula i Izabela imaju zajedno 38 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa je zato

$$P = 38 - I = 38 - 22 = 16.$$

Konačno, Mirela i Izabela imaju zajedno 56 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa je zato

$$M = 56 - I = 56 - 22 = 34.$$

Dakle, Mirela ima 34 bombona, Paula ima 16 bombona, a Izabela ima 22 bombona.

Zadatak K-2.4. [25 bodova]

Izračunaj:

$$2025 + 2024 + 2023 - 2022 - 2021 - 2020 + 2019 + 2018 + 2017 - 2016 - 2015 - 2014 + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Rješenje.

Primijetimo kako se računske operacije pravilno ponavljaju: tri zbrajanja pa tri oduzimanja i tako do kraja. Također, uočimo da je

$$2025 - 2022 = 2024 - 2021 = 2023 - 2020 = 3.$$

Slično je i

$$2019 - 2016 = 2018 - 2015 = 2017 - 2014 = 3.$$

Budući da je svaka takva razlika jednaka 3, u svakoj grupi od 6 uzastopnih brojeva rezultat nakon provedbe svih računskih operacija će biti $3 + 3 + 3 = 9$. Prikažimo zornije:

$$\underbrace{2025 + 2024 + 2023 - 2022 - 2021 - 2020}_9 + \underbrace{2019 + 2018 + 2017 - 2016 - 2015 - 2014}_9 + \dots + 1.$$

Budući da imamo 2025 brojeva, podijelimo 2025 sa 6, što je broj brojeva u svakoj grupi. Dobit ćemo količnik koji predstavlja koliko grupa imamo i ostatak koji govori koliko brojeva nije upalo u grupe od 6 brojeva.

Dobivamo da je $2025 : 6 = 337$ i ostatak 3. Dakle, imamo 337 grupa koje daju rezultat 9 i još na kraju zbroj 3 broja $3 + 2 + 1$. Konačni rezultat je:

$$337 \cdot 9 + 3 + 2 + 1 = 3039.$$

Zadatak K-2.5. [30 bodova]

Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 9 puta veći od dvoznamenkastog broja koji nastane ispuštanjem njihove znamenke desetica.

Rješenje.

Kako tražimo troznamenkaste prirodne brojeve koji imaju svojstvo da se umanje 9 puta ako im se ispusti znamenka desetica, možemo preformulirati problem u traženje troznamenkastog prirodnog broja koji je jednak deveterostrukom broju koji dobivamo ispuštanjem njegove znamenke desetica. Označimo s $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj, pri čemu su a , b i c njegove znamenke stotica, desetica i jedinica. Dvoznamenkasti broj koji dobivamo ispuštanjem znamenke desetica tada možemo zapisati kao $\overline{ac}$. Uvjet zadatka sada glasi

$$\overline{abc} = 9 \cdot \overline{ac}.$$

Sada možemo nastaviti na dva načina: ili raspisati jednadžbu koristeći raspis $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, ili analizirati jednakost znamenku po znamenku. Odlučujemo se za drugu opciju. Krenimo od posljednje znamenke. Zadnja znamenka umnoška $9 \cdot \overline{ac}$ bit će zadnja znamenka broja $9 \cdot c$. No, znamo da ta znamenka mora biti upravo c . Isprobavanjem svih 10 mogućnosti za znamenku c , vidimo da su jedine mogućnosti $c = 0$ i $c = 5$.

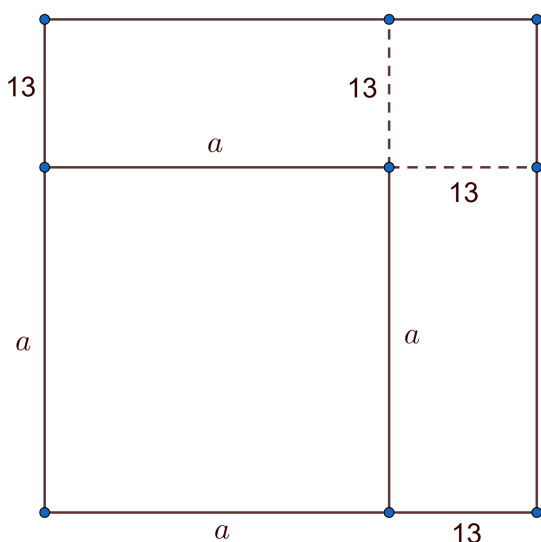
Ako je $c = 0$, isprobavanjem svih mogućnosti za znamenku a , dobijemo da jednadžba nema rješenja u ovom slučaju. Ako je pak $c = 5$, ponovno isprobavanjem svih mogućnosti za znamenku a dobijemo rješenja 135, 225, 315 i 405.

Zadatak K-2.6. [35 bodova]

Razlika duljina stranica dvaju kvadrata je 13 cm, a razlika njihovih površina je 1053 cm^2 . Odredi zbroj opsega tih dvaju kvadrata.

Prvo rješenje.

Nacrtajmo ta dva kvadrata tako da imaju jedan zajednički vrh te označimo duljinu stranice manjeg kvadrata s a . Stranica većeg kvadrata tada ima duljinu $a + 13$. Produljimo stranice manjeg kvadrata preko točke nasuprot zajedničke.



Uočimo kako je veći kvadrat podijeljen na četiri dijela i to na manji kvadrat, dva sukladna pravokutnika s duljinama stranica a i 13 cm te kvadrat s duljinom stranice 13 cm.

Razliku površina dvaju zadanih kvadrata čine dva pravokutnika i kvadrat s duljinom stranice 13 cm. Površina tog kvadrata je $13 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 169 \text{ cm}^2$.

Dakle, površina dvaju pravokutnika je jednaka $1053 \text{ cm}^2 - 169 \text{ cm}^2 = 884 \text{ cm}^2$, a površina jednog pravokutnika je jednaka $884 \text{ cm}^2 : 2 = 442 \text{ cm}^2$.

Budući da pravokutnik ima duljine stranica a i 13 cm, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} 13 \cdot a &= 442 \\ a &= 442 : 13 \\ a &= 34 \text{ cm} \end{aligned}$$

Duljina stranice manjeg kvadrata je 34 cm pa je njegov opseg jednak $4 \cdot 34 \text{ cm} = 136 \text{ cm}$.

Duljina stranice većeg kvadrata je $34 \text{ cm} + 13 \text{ cm} = 47 \text{ cm}$ pa je njegov opseg jednak $4 \cdot 47 \text{ cm} = 188 \text{ cm}$.

Zbroj njihovih opsega je jednak $136 \text{ cm} + 188 \text{ cm} = 324 \text{ cm}$.

Drugo rješenje.

Uz sliku i oznake kao i u prvom rješenju, zaključujemo da razliku površina čine dva pravokutnika i kvadrat s duljinom stranice 13 cm . Zapisujemo jednadžbu i određujemo a :

$$2 \cdot 13a + 13 \cdot 13 = 1053$$

$$26a + 169 = 1053$$

$$26a = 884$$

$$a = 884 : 26$$

$$a = 34$$

Dalje nastavljamo kao u prvom rješenju.

Zadatak K-2.7. [40 bodova]

Na svakoj stranici trokuta ABC označeno je po pet točaka različitih od A , B i C . Koliko ukupno postoji trokuta čiji vrhovi su istaknute točke? Među istaknute točke ubrajamo vrhove trokuta ABC i točke označene na stranicama trokuta ABC .

Prvo rješenje.

Prebrojimo najprije broj traženih trokuta koji imaju kao vrh neku od točaka A , B i C . Očito, trokut ABC je jedini koji sadrži istodobno sve tri ove točke. Prebrojimo koliko trokuta sadrži kao vrhove točno dvije od ovih točaka. Među tri točke A , B i C imamo 3 mogućnosti za izbor dvije točke (jer nam poredak nije bitan). U svakom ovom izboru, treću točku trokuta možemo izabrati na $2 \cdot 5 = 10$ načina, jer ne smijemo izabrati nijednu točku na dužini koju određuju dva odabrana vrha, kao ni treću točku. Sve skupa dakle imamo $3 \cdot 10 = 30$ različitih trokuta koji kao vrhove sadrže točno dvije točke među točkama A , B i C .

Dalje, prebrojimo koliko trokuta ima točno jedan vrh među točkama A , B i C . Neka je taj vrh točka A (u ostalim slučajevima prebrojavanje je potpuno analogno). Ako su sada oba preostala vrha na stranici $\overline{BC}$, tada imamo $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ mogućih trokuta. Naime, na stranici $\overline{BC}$ označeno je 5 novih točaka. Od njih trebamo izabrati dvije različite točke koje će tvoriti trokut zajedno s točkom A . Prvu točku možemo izabrati na 5 načina, a drugu na 4 (ne smije biti ista kao prva), stoga množimo 5 i 4. Međutim, primijetimo da ćemo ovim postupkom dva puta prebrojati svaki dobiveni trokut, zato što nije važno kojim redoslijedom odaberemo točke. Stoga je stvarni broj trokuta upola manji i stoga dijelimo s 2.

Ako je samo jedan od preostalih vrhova na stranici $\overline{BC}$ (neka od 5 označenih točaka), treći vrh može biti bilo koji od $5 + 5 = 10$ označenih točaka na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. To daje ukupno $5 \cdot 10 = 50$ trokuta u ovom slučaju.

Konačno, ako je jedan preostali vrh trokuta na stranici $\overline{AB}$, a drugi na stranici $\overline{AC}$, tada imamo $5 \cdot 5 = 25$ mogućih trokuta (sa svake od ovih stranica odabiremo jednu od pet mogućih točaka). Sve zajedno imamo $10 + 50 + 25 = 85$ trokuta koji imaju točku A kao vrh i nemaju točke B ni C kao vrhove. Očito je da će biti jednako toliko trokuta koji sadrže točno jedan od vrhova B i C . Također, među ovim trokutima niti jedan se nije ponovio, jer bi u suprotnom taj trokut sadržavao barem dva vrha među točkama A , B i C . Dakle, ukupni broj trokuta ove vrste je $3 \cdot 85 = 255$.

Sada nam ostaje prebrojati koliko trokuta postoji čiji vrhovi nisu nijedna od točaka A , B i C . Dvije su mogućnosti:

- (i) svaki vrh je na svojoj stranici trokuta ABC
- (ii) dva vrha trokuta su na istoj stranici trokuta ABC .

U slučaju (i) biramo po jedan vrh među 5 točaka sa svake stranice trokuta ABC , pa imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

različitih trokuta. U slučaju (ii) najprije biramo stranicu trokuta ABC na kojoj se nalaze dva vrha trokuta na 3 načina, potom ta dva vrha biramo na $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ načina (poredak nam ponovno nije bitan), a zadnji vrh biramo među preostalim 10 označenih točaka na druge dvije stranice trokuta ABC . Dakle, imamo $3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$ različitih trokuta u ovom slučaju.

Ukupni broj traženih trokuta konačno iznosi:

$$1 + 30 + 255 + 125 + 300 = 711.$$

Drugo rješenje.

Zajedno sa vrhovima trokuta ABC , ukupno je istaknuto 18 točaka. Pronađimo broj načina kako odabrati 3 točke među njima. Za odabir „prve” točke imamo 18 izbora, za odabir „druge” 17 izbora, a za odabir „treće” 16 izbora. Prema principu uzastopnog prebrojavanja, ukupno je to $18 \cdot 17 \cdot 16$ načina.

Pri tome je nebitno koja je točka „prva”, koja „druga”, a koja „treća” pa taj ukupan broj treba podijeliti sa brojem poredaka tri točke. Npr. ako promatramo trokut od točaka A , B i C , imamo 6 različitih poredaka: ABC , ACB , BAC , BCA , CAB i CBA . Ili principom uzastopnog prebrojavanja, imamo $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ različitih poredaka.

Dakle, ukupan broj različitih odabira 3 točke je jednak

$$(18 \cdot 17 \cdot 16) : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 816.$$

To ipak nije rješenje zato što smo ovime brojili „trokute” od točaka na istoj stranici, a znamo da tri točke na istoj dužini ne čine trokut.

Na jednoj stranici imamo $7 \cdot 6 \cdot 5$ mogućih odabira tri točke, podijeljen sa $3 \cdot 2 \cdot 1$ (slično kao i prije, poredak tri točke je nebitan) pa dobivamo:

$$(7 \cdot 6 \cdot 5) : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 35,$$

što znači da na sve tri stranice zajedno imamo $35 \cdot 3 = 105$ različitih odabira tri točke.

Konačno, traženi broj trokuta je:

$$816 - 105 = 711.$$

Zadatak K-2.8. [45 bodova]

Na školskoj ploči napisani su svi prirodni brojevi od 1 do 2025. Nikola radi sljedeće operacije: on u svakom koraku briše bilo koja dva broja koja su u tom trenutku na ploči i zamjenjuje ih razlikom ta dva broja (uvijek oduzima manji broj od većeg, a ako su jednaki zamjenjuje ih nulom). Na taj način, nakon 2024 koraka, na ploči ostaje samo jedan broj.

a) Može li taj preostali broj biti 20?

b) Može li taj preostali broj biti 25?

Rješenje.

a) Ključ za rješavanje ovog zadatka je razmotriti kako se mijenja parnost brojeva prilikom dane transformacije i uočavanje pravilnosti. Znamo da oduzimanjem parnog i parnog te neparnog i neparnog broja kao rezultat dobijemo paran broj, a oduzimanjem parnog i neparnog dobijemo neparan broj.

Promotrimo sada kako se prilikom svake transformacije mijenja ukupni broj neparnih brojeva na ploči. Ako Nikola obriše dva parna broja, umjesto njih će ponovno upisati paran broj, pa se broj neparnih u ovom slučaju ne mijenja. Ako obriše dva neparna broja, umjesto njih će napisati paran broj, pa se

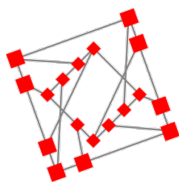
ukupan broj neparnih brojeva smanjio za 2. Konačno, ako obriše jedan paran i jedan neparan broj, umjesto njih će upisati neparan broj, što znači da broj neparnih brojeva i nakon ove transformacije ostaje nepromijenjen.

Sve u svemu, ukupni broj neparnih brojeva na ploči može se jedino smanjivati za 2. Na početku imamo $2026 : 2 = 1013$ neparnih brojeva na ploči. Sada zaključujemo da broj neparnih brojeva u nijednom trenutku ne može postati 0, jer će broj neparnih brojeva na ploči u svakom trenutku biti neparan. Stoga, zadnji preostali broj mora biti neparan. Dakle, 20 ne može biti zadnji preostali broj.

b) U prvom dijelu smo dokazali da zadnji preostali broj na ploči mora biti neparan. Sada moramo pokazati da taj broj može biti baš 25. To znači da moramo opisati postupak kojim Nikola može dobiti broj 25 kao zadnji broj na ploči.

Jedan mogući način je sljedeći. U prvih 1012 koraka Nikola briše redom parove brojeva $(1, 2)$, $(3, 4)$, $\dots$, $(23, 24)$, $(26, 27)$, $(28, 29)$, $\dots$, $(2024, 2025)$ i umjesto njih upisuje broj 1. Sada je na ploči ostalo 1012 brojeva 1 i broj 25. U sljedećih 506 koraka Nikola briše po dva broja 1 i umjesto njih piše broj 0. Nakon toga na ploči ostaje 506 brojeva 0 i broj 25.

Sada Nikola u idućih 506 poteza obriše broj 25 i jednu nulu, a umjesto njih napiše broj 25. Time će pobrisati sve nule i na ploči će ostati samo broj 25. Ovime je dokaz završen.



MEDO 2025./2026.

Drugo kolo

6.12.2025.

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak J-2.1. [10 bodova]

Mirela i Paula zajedno su za Božić dobile 50 bombona, Paula i Izabela su zajedno dobile 38 bombona, a Mirela i Izabela su zajedno dobile 56 bombona. Koliko bombona je dobila svaka od djevojaka?

Rješenje.

Označimo sa M , P i I količinu bombona koje imaju redom Mirela, Paula i Izabela. Znamo da su te veličine u sljedećim odnosima:

$$M + P = 50$$

$$P + I = 38$$

$$M + I = 56$$

Pozbrazamo li sve tri dobivene jednačbe dobivamo $2M + 2P + 2I = 144$, odnosno

$$M + P + I = 72.$$

Sada znamo da sve tri djevojke zajedno imaju 72 bombona, a Mirela i Paula zajedno imaju 50 bombona. Dakle, Izabela ima ostatak od 50 do 72 bombona, odnosno

$$I = 72 - M - P = 72 - (M + P) = 72 - 50 = 22.$$

Dalje, Paula i Izabela imaju zajedno 38 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa je zato

$$P = 38 - I = 38 - 22 = 16.$$

Konačno, Mirela i Izabela imaju zajedno 56 bombona, a od toga 22 ima Izabela pa je zato

$$M = 56 - I = 56 - 22 = 34.$$

Dakle, Mirela ima 34 bombona, Paula ima 16 bombona, a Izabela ima 22 bombona.

Zadatak J-2.2. [15 bodova]

Izračunaj:

$$20.25 + 20.24 + 20.23 - 20.22 - 20.21 - 20.20 + 20.19 + 20.18 + 20.17 - 20.16 - 20.15 - 20.14 + \dots + 0.03 + 0.02 + 0.01.$$

Rješenje.

Primijetimo kako se pravilno ponavljaju tri pozitivna broja pa tri negativna broja i tako do kraja. Također, uočimo da je

$$20.25 - 20.22 = 20.24 - 20.21 = 20.23 - 20.20 = 0.03.$$

Slično je i

$$20.19 - 20.16 = 20.18 - 20.15 = 20.17 - 20.14 = 0.03.$$

Budući da je svaka takva razlika jednaka 0.03, u svakoj grupi od 6 brojeva, rezultat će biti $0.03 + 0.03 + 0.03 = 0.09$. Prikažimo zornije:

$$\underbrace{20.25 + 20.24 + 20.23 - 20.22 - 20.21 - 20.20}_{0.09} + \underbrace{20.19 + 20.18 + 20.17 - 20.16 - 20.15 - 20.14}_{0.09} + \dots + 0.01.$$

Budući da imamo 2025 brojeva, podijelimo 2025 sa 6, što je broj brojeva u svakoj grupi. Dobit ćemo količnik koji predstavlja koliko grupa imamo i ostatak koji govori koliko brojeva nije upalo u grupe od 6 brojeva.

Dobivamo da je $2025 : 6 = 337$ i ostatak 3. Dakle, imamo 337 grupa koje daju rezultat 0.09 i još na kraju zbroj 3 broja $0.03 + 0.02 + 0.01$. Konačni rezultat je:

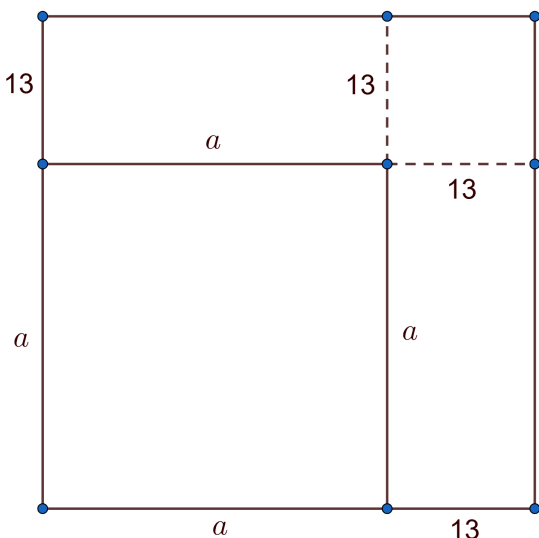
$$337 \cdot 0.09 + 0.03 + 0.02 + 0.01 = 30.39.$$

Zadatak J-2.3. [20 bodova]

Razlika duljina stranica dvaju kvadrata je 13 cm, a razlika njihovih površina je 1053 cm^2 . Odredi zbroj opsega tih dvaju kvadrata.

Prvo rješenje.

Nacrtajmo ta dva kvadrata tako da imaju jedan zajednički vrh te označimo duljinu stranice manjeg kvadrata s a . Stranica većeg kvadrata tada ima duljinu $a + 13$. Produljimo stranice manjeg kvadrata preko točke nasuprot zajedničke.



Uočimo kako je veći kvadrat podijeljen na četiri dijela i to na manji kvadrat, dva sukladna pravokutnika s duljinama stranica a i 13 cm te kvadrat s duljinom stranice 13 cm.

Razliku površina dvaju zadanih kvadrata čine dva pravokutnika i kvadrat s duljinom stranice 13 cm. Površina tog kvadrata je $13 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 169 \text{ cm}^2$.

Zapisujemo jednađbu i određujemo a :

$$2 \cdot 13a + 169 = 1053$$

$$26a + 169 = 1053$$

$$26a = 884$$

$$a = 884 : 26$$

$$a = 34$$

Duljina stranice manjeg kvadrata je 34 cm pa je njegov opseg jednak $4 \cdot 34 \text{ cm} = 136 \text{ cm}$.

Duljina stranice većeg kvadrata je $34 \text{ cm} + 13 \text{ cm} = 47 \text{ cm}$ pa je njegov opseg jednak $4 \cdot 47 \text{ cm} = 188 \text{ cm}$.

Zbroj njihovih opsega je jednak $136 \text{ cm} + 188 \text{ cm} = 324 \text{ cm}$.

Drugo rješenje.

Uz sliku i oznake na slici u prvom rješenju, razlika površina jednaka je $(a + 13)^2 - a^2$.

$$(a + 13)^2 - a^2 = 1053$$

$$a^2 + 26a + 169 - a^2 = 1053$$

$$26a = 884$$

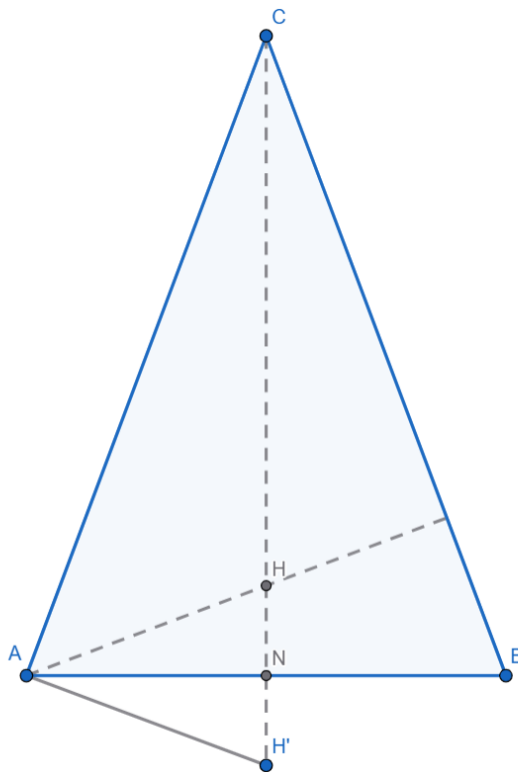
$$a = 34$$

Dalje zaključujemo isto kao i u prvom rješenju.

Zadatak J-2.4. [25 bodova]

Neka je ABC šiljastokutni jednakokrani trokut s osnovicom $\overline{AB}$ i neka je H ortocentar tog trokuta. Neka je H' točka simetrična točki H u odnosu na pravac AB . Odredi mjeru kuta $\angle H'AC$.

Prvo rješenje.



Zapišimo $\sphericalangle H'AC$ kao zbroj tri kuta:

$$\sphericalangle H'AC = \sphericalangle H'AB + \sphericalangle BAH + \sphericalangle HAC$$

Pritom znamo da je $\sphericalangle H'AB = \sphericalangle BAH$ zbog simetrije, te je jasno da $\sphericalangle BAH = 90^\circ - \sphericalangle CBA$ (promotrimo zbroj kuteva u trokutu s vrhovima A , B i nožištem visine iz A), što je pak $90^\circ - \sphericalangle BAC$ jer je ABC jednakokračan.

Sada smo gotovi jer je:

$$\sphericalangle H'AC = \sphericalangle H'AB + (\sphericalangle BAH + \sphericalangle HAC) = 90^\circ - \sphericalangle BAC + \sphericalangle BAC = 90^\circ.$$

Drugo rješenje.

Budući da se radi o jednakokračnom trokutu, ukoliko produžimo pravac CH , znamo da će se H' nalaziti na njemu te da je nožište visine iz C (označimo ga s N) ujedno polovište $\overline{AB}$ (može se lagano pokazati preko sukladnosti trokuta $\triangle ANC$ i $\triangle BNC$).

Budući da je N polovište $\overline{AB}$, te je po definiciji osne simetrije polovište $\overline{HH'}$, onda je $AH'BH$ četverokut kojem se dijagonale raspolavljaju, što znamo da je paralelogram (ostavljamo formalni dokaz kao vježbu čitatelju; preko sukladnosti).

Kako je onda AH' paralelan s BH koji je visina na $\overline{AC}$, onda je traženi kut također pravi kao kut uz presječnicu paralelnih pravaca.

Treće rješenje.

Ukoliko znamo lemu o refleksijama ortocentra (možete ju naći recimo na MNM predavanjima ili u Evan Chen: Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads - lemma 1.17), ona nam po tvrdnji a) govori da H' leži na opisanoj kružnici trokuta ABC .

Dapače, budući da je nožište visine ujedno i polovište stranice $\overline{AB}$, ona nam po tvrdnji b) iste leme kaže da je $\overline{CH'}$ baš i promjer opisane kružnice trokutu ABC .

Dakle, tražimo kut nad promjerom kružnice, pa je po Talesovom poučku traženi kut pravi.

Zadatak J-2.5. [30 bodova]

Odredi znamenke a , b i c tako da razlomak $\frac{a}{b+c}$ ima decimalni zapis $\overline{0.ab}$.

Rješenje.

Jednadžba glasi:

$$\frac{a}{b+c} = \overline{0.ab}.$$

Odmah vidimo da mora vrijediti $b+c > a$ zato što je vrijednost razlomka $\frac{a}{b+c}$ manja od 1. Riješimo odmah i „rubni” slučaj $a = 0$. Tada je $\frac{a}{b+c} = 0 = \overline{0.ab}$, pa mora biti $b = 0$. Broj c u ovom slučaju može biti bilo koja znamenka različita od 0, jer bismo u slučaju da je i $c = 0$ dobili neodređeni razlomak $\frac{0}{0}$. Zaključujemo da su sve trojke $(0, 0, c)$, gdje je $c \neq 0$, rješenje jednadžbe, tj. tražene znamenke.

Prisjetimo se da decimalni broj $\overline{0.ab}$ pišemo u obliku razlomka na sljedeći način: $\overline{0.ab} = \frac{\overline{ab}}{100}$. Uvrstimo to u početnu jednadžbu te se riješimo nazivnikā:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} &= \frac{\overline{ab}}{100} \quad / \cdot 100(b+c) \\ 100a &= \overline{ab} \cdot (b+c). \end{aligned}$$

Sada je jedan mogući način rješavanja ove jednadžbe ispitivanje svih mogućnosti za znamenku a i određivanje odgovarajućih znamenki b i c . No, možemo i skratiti posao, razmatranjem faktora lijeve i desne strane jednakosti.

Znamo da je $100 = 2^2 \cdot 5^2$, dakle faktori 2 i 5 će se pojaviti najmanje dva puta u rastavu na proste faktore lijeve strane jednakosti, što znači da se nalaze i u rastavu na proste faktore desne strane. Promotrimo faktor 5. Broj $b + c$ pripada skupu $\{1, 2, 3, \dots, 17, 18\}$ pa može imati najviše jedan faktor 5, što znači da broj $\overline{ab}$ mora imati barem jedan faktor 5 u sebi. Iz toga slijedi da je $b \in \{0, 5\}$. Međutim, ako je $b = 0$, jednadžba postaje $100a = \overline{a0} \cdot c$, iz čega bi slijedilo $c = 10$, što nije moguće jer c mora biti znamenka.

Zaključujemo da mora biti $b = 5$. Jednadžba sada postaje $100a = \overline{a5} \cdot (5 + c)$. Broj $\overline{a5}$ sadrži dva faktora 5 jedino ako je $a = 2$ ili $a = 7$. U slučaju $a = 2$ dobijemo rješenje $(a, b, c) = (2, 5, 3)$. Ako je $a = 7$, broj 75 sadrži faktor 3, koji nije sadržan u broju $7 \cdot 100$, pa jednadžba nema rješenja u tom slučaju.

U svim ostalim slučajevima, broj $\overline{a5}$ sadrži samo jedan faktor 5, pa broj $5 + c$ mora također sadržavati faktor 5. To je moguće jedino za $5 + c = 5$ i $5 + c = 10$. Međutim, vrijedi $\overline{a5} \cdot 5 < 100a$ i $\overline{a5} \cdot 10 > 100a$, pa jednadžba nema rješenja u ovim slučajevima. Time smo ispitali sve mogućnosti.

Napomena. Kada dođemo do jednadžbe $100a = \overline{a5} \cdot (5 + c)$, možemo razmotriti i faktor 2. Broj $\overline{a5}$ ne sadrži faktor 2, pa slijedi da broj $5 + c$ mora sadržavati faktor $2^2 = 4$. Iz toga slijedi $5 + c = 8$ ili $5 + c = 12$. Sada nastavljamo slično kao u rješenju.

Zadatak J-2.6. [35 bodova]

Odredi sve četvorke realnih brojeva (x, y, z, w) koje zadovoljavaju sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} xy + z + w = 6 \\ yz + w + x = 2 \\ zw + x + y = 5 \\ wx + y + z = 3. \end{cases}$$

Rješenje.

Tražimo način na koji možemo kombinirati dane jednadžbe kako bismo pojednostavili sustav. Zbrajanje svih jednadžbi ne daje povoljan rezultat. Oduzmimo stoga drugu jednakost od prve:

$$\begin{aligned} (xy + z + w) - (yz + w + x) &= 6 - 2 \\ xy + z + w - yz - w - x &= 4 \\ xy - yz + z - x &= 4 \\ y(x - z) - (x - z) &= 4 \\ (x - z)(y - 1) &= 4. \end{aligned}$$

Slično, oduzimanjem treće jednadžbe od druge, četvrte od treće i prve od četvrte, dobijemo redom sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} (y - w)(z - 1) &= -3 \\ (z - x)(w - 1) &= 2 \\ (w - y)(x - 1) &= -3. \end{aligned}$$

Uspoređivanjem (tj. dijeljenjem) parova dobivenih jednadžbi s istim prvim faktorom zaključujemo da vrijedi $y - 1 = -2(w - 1)$ i $z - 1 = -(x - 1)$, iz čega slijedi $y = -2w + 3$ i $z = -x + 2$. Uvrštavanjem u posljednju jednadžbu početnog sustava i sređivanjem dobivamo $(x - 2)(w - 1) = 0$. Iz toga slijedi da je $x = 2$ ili $w = 1$. Ako je $x = 2$, dobijemo redom $z = 0$, $w = 0$ i $y = 3$. Ako je $w = 1$, dobijemo $y = 1$,

no tada uvrštavanjem u prvu jednadžbu polaznog sustava dobijemo $x + z = 5$, što je u kontradikciji s jednakosti $z = -x + 2$, stoga jednadžba nema rješenja u ovom slučaju. Zaključujemo da je jedino rješenje sustava četvorka $(x, y, z, w) = (2, 3, 0, 0)$.

Zadatak J-2.7. [40 bodova]

Na školskoj ploči napisani su svi prirodni brojevi od 1 do 2025. Nikola radi sljedeće operacije: on u svakom koraku briše bilo koja dva broja koja su u tom trenutku na ploči i zamjenjuje ih apsolutnom vrijednošću razlike ta dva broja. Na taj način, nakon 2024 koraka, na ploči ostaje samo jedan broj.

- a) Može li taj preostali broj biti 20?
- b) Može li taj preostali broj biti 25?

Rješenje.

a) Ključ za rješavanje ovog zadatka je razmotriti kako se mijenja parnost brojeva prilikom dane transformacije i uočavanje pravilnosti. Znamo da oduzimanjem parnog i parnog te neparnog i neparnog broja kao rezultat dobijemo paran broj, a oduzimanjem parnog i neparnog dobijemo neparan broj.

Promotrimo sada kako se prilikom svake transformacije mijenja ukupni broj neparnih brojeva na ploči. Ako Nikola obriše dva parna broja, umjesto njih će ponovno upisati paran broj, pa se broj neparnih u ovom slučaju ne mijenja. Ako obriše dva neparna broja, umjesto njih će napisati paran broj, pa se ukupan broj neparnih brojeva smanjio za 2. Konačno, ako obriše jedan paran i jedan neparan broj, umjesto njih će upisati neparan broj, što znači da broj neparnih brojeva i nakon ove transformacije ostaje nepromijenjen.

Sve u svemu, ukupni broj neparnih brojeva na ploči može se jedino smanjivati za 2. Na početku imamo $2026 : 2 = 1013$ neparnih brojeva na ploči. Sada zaključujemo da broj neparnih brojeva u nijednom trenutku ne može postati 0, jer će broj neparnih brojeva na ploči u svakom trenutku biti neparan. Stoga, zadnji preostali broj mora biti neparan. Dakle, 20 ne može biti zadnji preostali broj.

b) U prvom dijelu smo dokazali da zadnji preostali broj na ploči mora biti neparan. Sada moramo pokazati da taj broj može biti baš 25. To znači da moramo opisati postupak kojim Nikola može dobiti broj 25 kao zadnji broj na ploči.

Jedan mogući način je sljedeći. U prvih 1012 koraka Nikola briše redom parove brojeva $(1, 2), (3, 4), \dots, (23, 24), (26, 27), (28, 29), \dots, (2024, 2025)$ i umjesto njih upisuje broj 1. Sada je na ploči ostalo 1012 brojeva 1 i broj 25. U sljedećih 506 koraka Nikola briše po dva broja 1 i umjesto njih piše broj 0. Nakon toga na ploči ostaje 506 brojeva 0 i broj 25.

Sada Nikola u idućih 506 poteza obriše broj 25 i jednu nulu, a umjesto njih napiše broj 25. Time će pobrisati sve nule i na ploči će ostati samo broj 25. Ovime je dokaz završen.

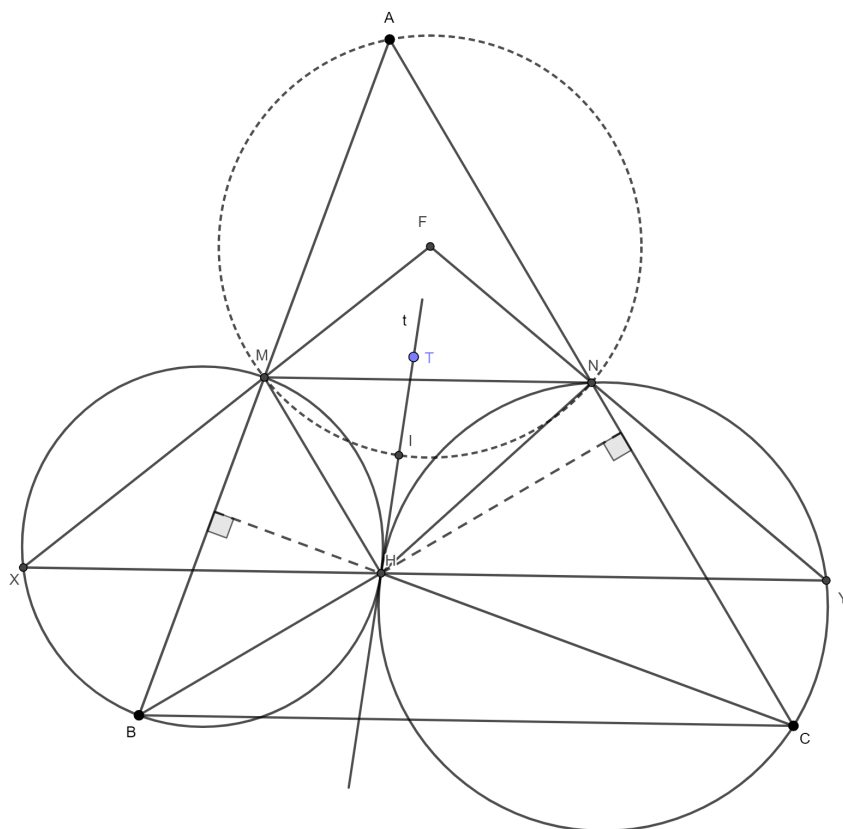
Zadatak J-2.8. [45 bodova]

Neka je H ortocentar trokuta ABC te neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Pretpostavimo da se točka H nalazi unutar četverokuta $BCNM$ te da se opisane kružnice trokuta BHM i CNH međusobno dodiruju. Pravac kroz H paralelan s BC siječe opisane kružnice trokuta BHM i CNH redom u točkama X i Y . Neka je F sjecište pravaca MX i NY te neka je I središte upisane kružnice trokuta MHN .

Dokaži da je $|FI| = |FA|$.

Rješenje.

Neka je $\angle BAC = \alpha$, pravac t zajednička tangetna opisanih kružnica trokuta BHM i CNH te točka T proizvoljna točka na pravcu t kao na slici.



Dužina $\overline{MN}$ je srednjica trokuta ABC pa je zato i pravac MN paralelan s pravcima BC i XY .
Budući da je H ortocentar trokuta ABC slijedi da je

$$\sphericalangle HBM = \sphericalangle HBA = 90^\circ - \alpha.$$

Četverokut $BHMX$ je tetivan pa je zato

$$\sphericalangle HXM = \sphericalangle HBM = 90^\circ - \alpha.$$

Konačno kako su pravci XY i MN paralelni imamo da je

$$\sphericalangle NMF = \sphericalangle HXM = 90^\circ - \alpha.$$

Analogno se dobije da je i $\sphericalangle FNM = 90^\circ - \alpha$.

Iz gornjeg imamo da je $\sphericalangle NMF = \sphericalangle FNM = 90^\circ - \alpha$ pa je zato $|FM| = |FN|$. Nadalje, imamo da je

$$\sphericalangle MFN = 180^\circ - \sphericalangle NMF - \sphericalangle FNM = 2\alpha = 2\sphericalangle BAC$$

iz čega slijedi da je kut $\sphericalangle MFN$ središnji kut obodnog kuta MAN na opisanoj kružnici trokuta AMN .
Posebno, imamo da je F središte opisane kružnice trokuta AMN .

Dokažimo da se točka I nalazi na opisanoj kružnici trokuta AMN .

Prema teoremu o kutu između tetive i tangente redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle THM &= \sphericalangle MHX = 90^\circ - \alpha, \\ \sphericalangle NHT &= \sphericalangle NCH = 90^\circ - \alpha.\end{aligned}$$

Iz gornjeg slijedi da je

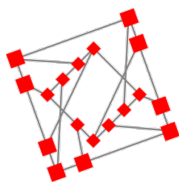
$$\sphericalangle NHM = \sphericalangle NHT + \sphericalangle THM = 180^\circ - 2\alpha.$$

Konačno, kako je I središte upisane kružnice trokuta MHN možemo izračunati

$$\sphericalangle NIM = 180^\circ - \sphericalangle MNI - \sphericalangle IMN = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle MNH + \sphericalangle HMN) = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle NHM = 180^\circ - \alpha.$$

Iz gornjeg slijedi da je četverokut $MINA$ tetivan, tj. točka I se nalazi na opisanoj kružnici trokuta AMN .

Budući da je F središte opisane kružnice trokuta AMN i točka I se također nalazi na opisanoj kružnici slijedi da je $|FI| = |FA|$ što je i trebalo dokazati.



MEDO 2025./2026.

Drugo kolo

6.12.2025.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

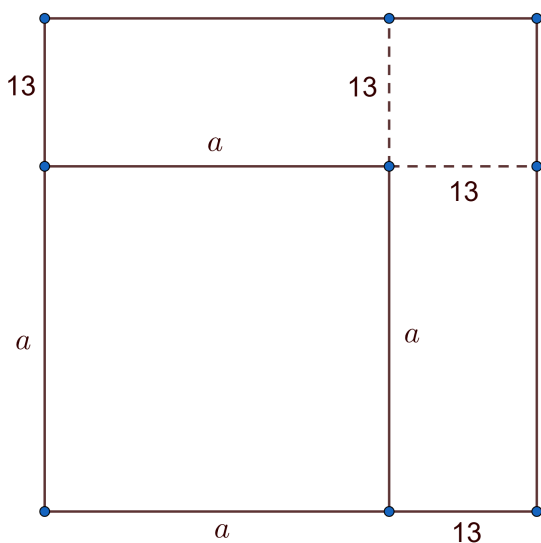
Zadaci i rješenja

Zadatak S-2.1. [10 bodova]

Razlika duljina stranica dvaju kvadrata je 13 cm, a razlika njihovih površina je 1053 cm^2 . Odredi zbroj opsega tih dvaju kvadrata.

Rješenje.

Nacrtajmo ta dva kvadrata tako da imaju jedan zajednički vrh te označimo duljinu stranice manjeg kvadrata s a . Stranica većeg kvadrata tada ima duljinu $a + 13$. Produljimo stranice manjeg kvadrata preko točke nasuprot zajedničke.



Razlika površina jednaka je $(a + 13)^2 - a^2$.

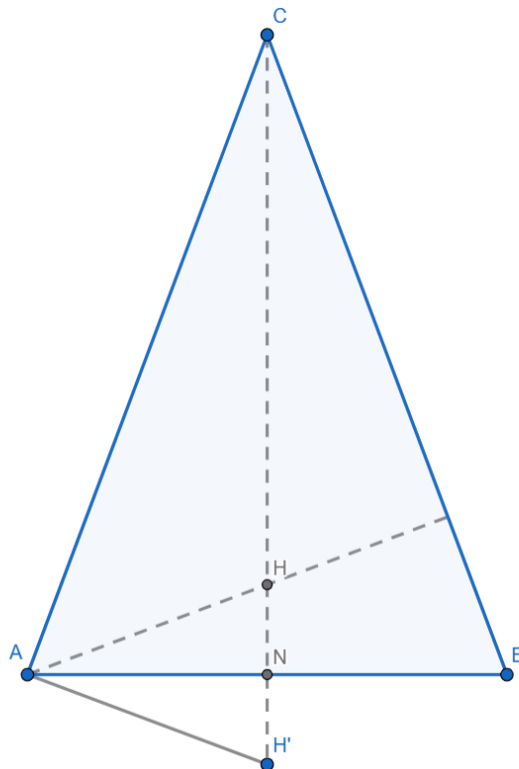
$$\begin{aligned}(a + 13)^2 - a^2 &= 1053 \\ a^2 + 26a + 169 - a^2 &= 1053 \\ 26a &= 884 \\ a &= 34\end{aligned}$$

Zbroj opsega ovih kvadrata jednak je $4a + 4(a + 13) = 8a + 52$, tj. $8 \cdot 34 + 52 = 324 \text{ cm}$.

Zadatak S-2.2. [15 bodova]

Neka je ABC šiljastokutni jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{AB}$ i neka je H ortocentar tog trokuta. Neka je H' točka simetrična točki H u odnosu na pravac AB . Odredi mjeru kuta $\angle H'AC$.

Prvo rješenje.



Zapišimo $\angle H'AC$ kao zbroj tri kuta:

$$\angle H'AC = \angle H'AB + \angle BAH + \angle HAC$$

Pritom znamo da je $\angle H'AB = \angle BAH$ zbog simetrije, te je jasno da $\angle BAH = 90^\circ - \angle CBA$ (promotrimo zbroj kuteva u trokutu s vrhovima A , B i nožištem visine iz A), što je pak $90^\circ - \angle BAC$ jer je ABC jednakokratan.

Sada smo gotovi jer je:

$$\angle H'AC = \angle H'AB + (\angle BAH + \angle HAC) = 90^\circ - \angle BAC + \angle BAC = 90^\circ.$$

Drugo rješenje.

Budući da se radi o jednakokrakom trokutu, ukoliko produžimo pravac CH , znamo da će se H' nalaziti na njemu te da je nožište visine iz C (označimo ga s N) ujedno polovište $\overline{AB}$ (može se lagano pokazati preko sukladnosti trokuta $\triangle ANC$ i $\triangle BNC$).

Budući da je N polovište $\overline{AB}$, te je po definiciji osne simetrije polovište $\overline{HH'}$, onda je $AH'BH$ četverokut kojem se dijagonale raspolavljaju, što znamo da je paralelogram (ostavljamo formalni dokaz kao vježbu čitatelju; preko sukladnosti).

Kako je onda AH' paralelan s BH koji je visina na $\overline{AC}$, onda je traženi kut također pravi kao kut uz presječnicu paralelnih pravaca.

Treće rješenje.

Ukoliko znamo lemu o refleksijama ortocentra (možete ju naći recimo na MNM predavanjima ili u Evan Chen: Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads - lemma 1.17), ona nam po tvrdnji a) govori da H' leži na opisanoj kružnici trokuta ABC .

Dapače, budući da je nožište visine ujedno i polovište stranice $\overline{AB}$, ona nam po tvrdnji b) iste leme kaže da je $\overline{CH'}$ baš i promjer opisane kružnice trokutu ABC .

Dakle, tražimo kut nad promjerom kružnice, pa je po Talesovom poučku traženi kut pravi.

Zadatak S-2.3. [20 bodova]

Na školskoj ploči napisani su svi prirodni brojevi od 1 do 2025. Nikola radi sljedeće operacije: on u svakom koraku briše bilo koja dva broja koja su u tom trenutku na ploči i zamjenjuje ih apsolutnom vrijednošću razlike ta dva broja. Na taj način, nakon 2024 koraka, na ploči ostaje samo jedan broj.

a) Može li taj preostali broj biti 20?

b) Može li taj preostali broj biti 25?

Rješenje.

a) Ključ za rješavanje ovog zadatka je razmotriti kako se mijenja parnost brojeva prilikom dane transformacije i uočavanje pravilnosti. Znamo da oduzimanjem parnog i parnog te neparnog i neparnog broja kao rezultat dobijemo paran broj, a oduzimanjem parnog i neparnog dobijemo neparan broj.

Promotrimo sada kako se prilikom svake transformacije mijenja ukupni broj neparnih brojeva na ploči. Ako Nikola obriše dva parna broja, umjesto njih će ponovno upisati paran broj, pa se broj neparnih u ovom slučaju ne mijenja. Ako obriše dva neparna broja, umjesto njih će napisati paran broj, pa se ukupan broj neparnih brojeva smanjio za 2. Konačno, ako obriše jedan paran i jedan neparan broj, umjesto njih će upisati neparan broj, što znači da broj neparnih brojeva i nakon ove transformacije ostaje nepromijenjen.

Sve u svemu, ukupni broj neparnih brojeva na ploči može se jedino smanjivati za 2. Na početku imamo $2026 : 2 = 1013$ neparnih brojeva na ploči. Sada zaključujemo da broj neparnih brojeva u nijednom trenutku ne može postati 0, jer će broj neparnih brojeva na ploči u svakom trenutku biti neparan. Stoga, zadnji preostali broj mora biti neparan. Dakle, 20 ne može biti zadnji preostali broj.

b) U prvom dijelu smo dokazali da zadnji preostali broj na ploči mora biti neparan. Sada moramo pokazati da taj broj može biti baš 25. To znači da moramo opisati postupak kojim Nikola može dobiti broj 25 kao zadnji broj na ploči.

Jedan mogući način je sljedeći. U prvih 1012 koraka Nikola briše redom parove brojeva $(1, 2)$, $(3, 4)$, $\dots$, $(23, 24)$, $(26, 27)$, $(28, 29)$, $\dots$, $(2024, 2025)$ i umjesto njih upisuje broj 1. Sada je na ploči ostalo 1012 brojeva 1 i broj 25. U sljedećih 506 koraka Nikola briše po dva broja 1 i umjesto njih piše broj 0. Nakon toga na ploči ostaje 506 brojeva 0 i broj 25.

Sada Nikola u idućih 506 poteza obriše broj 25 i jednu nulu, a umjesto njih napiše broj 25. Time će pobrisati sve nule i na ploči će ostati samo broj 25. Ovime je dokaz završen.

Zadatak S-2.4. [25 bodova]

Neka su $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $z \neq 0$ međusobno različiti realni brojevi takvi da je $x + y + z = 0$. Dokaži

$$\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z} \right) = 9.$$

Rješenje.

Označimo $A = \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}$ i $B = \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}$. Raspišimo:

$$A = \frac{x(z-x)(x-y) + y(y-z)(x-y) + z(y-z)(z-x)}{(y-z)(z-x)(x-y)}$$

i

$$B = \frac{yz(y-z) + xz(z-x) + xy(x-y)}{xyz}.$$

Nadalje, raspišimo nazivnik od A . Imamo:

$$\begin{aligned}(y-z)(z-x)(x-y) &= (yz - z^2 - xy + xz)(x-y) = \\ &= \cancel{xyz} - xz^2 - x^2y + x^2z - y^2z + yz^2 + \cancel{xy^2} - \cancel{xyz} = \\ &= yz(z-y) + xz(x-z) + xy(y-x) = \\ &= -(yz(y-z) + xz(z-x) + xy(x-y)).\end{aligned}$$

Stoga je

$$A \cdot B = \frac{x(z-x)(x-y) + y(y-z)(x-y) + z(y-z)(z-x)}{-xyz}.$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}x(z-x)(x-y) &= x(zx - x^2 - yz + xy) = \\ &= x(x(z+y) - x^2 - yz) = \\ &= x(x(-x) - x^2 - yz) = \\ &= -2x^3 - xyz.\end{aligned}$$

Analogno zaključujemo da je

$$\begin{aligned}y(y-z)(x-y) &= -2y^3 - xyz, \\ z(y-z)(z-x) &= -2z^3 - xyz.\end{aligned}$$

Sada imamo

$$A \cdot B = \frac{-2x^3 - 2y^3 - 2z^3 - 3xyz}{-xyz} = \frac{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 + 3xyz}{xyz}.$$

Kako želimo pokazati da je $A \cdot B = 9$, ostalo je pokazati da je $2x^3 + 2y^3 + 2z^3 = 6xyz$, odnosno $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Jer je $x + y + z = 0$, vrijedi

$$0 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Dakle,

$$A \cdot B = \frac{6xyz + 3xyz}{xyz} = \frac{9xyz}{xyz} = 9.$$

Napomena. Jednakost $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ možemo dokazati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) + z^3 = -z(x^2 - xy + y^2) + z^3 = z(-x^2 + xy - y^2 + z^2) \\ &= z((z-x)(z+x) + xy - y^2) = z((z-x) \cdot (-y) + xy - y^2) = yz(x - z + x - y) = 3xyz.\end{aligned}$$

Zadatak S-2.5. [30 bodova]

Katarina peče božićni kolač u posudi dimenzija $n \times n$. Odredi sve prirodne brojeve n takve da Katarina može izrezati kolač na dijelove tako da najviše jedan izrezani dio bude u obliku 1×1 kvadrata, a svi ostali izrezani dijelovi budu u obliku L-triromina.

Napomena. L-triromino je oblik koja se dobije uklanjanjem jednog 1×1 kvadrata iz 2×2 kvadrata.

Rješenje.

Katarina može izrezati kolač na željeni način za sve prirodne brojeve $n \neq 3$.

Dokažimo najprije da Katarina ne može izrezati 3×3 kolač na željeni način. Pretpostavimo da je moguće izrezati 3×3 kolač. Budući da je ukupan broj polja u 3×3 posudi djeljiv s 3 da bi kolač

izrezali na željeni način moramo za to koristiti točno tri L-triomina. Međutim, posuda ima 4 kutna polja, a svaka L-triomina može pokriti najviše jedno od tih kutnih polja. To dovodi do kontradikcije. Dakle, ne možemo izrezati 3×3 kolač na željeni način.

Preostaje još dokazati da za sve $n \neq 3$ Katarina može izrezati $n \times n$ kolač na željeni način. U tu svrhu ćemo najprije dokazati sljedeću pomoćnu tvrdnju.

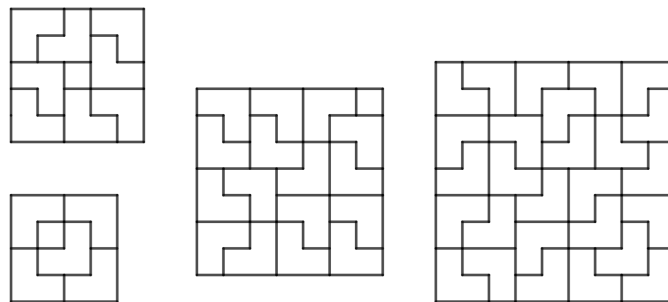
Lema: Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ pravokutnu ploču $6 \times n$ možemo izrezati na L-triomine.

Dokaz leme: Dvije L-triomine možemo zajedno spojiti u ploču oblika 2×3 . Pomoću ploča 2×3 možemo napraviti ploče 6×2 i 6×3 . Za dokaz pomoćne tvrdnje nam je sada dovoljno dokazati da se svaki prirodan broj $n \geq 2$ može zapisati u obliku $n = 3a + 2b$ za neke nenegativne cijele brojeve a i b jer tada našu ploču možemo izrezati na a ploča dimenzije 6×3 i b ploča dimenzije 6×2 .

Promotrimo sve moguće ostatke koje n daje pri dijeljenju s 3. Ako je n djeljiv s 3 tada direktno možemo zapisati $n = 3a$ za neki nenegativni cijeli broj a . Ako n daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 tada možemo zapisati $n = 3a + 2 \cdot 2$ te budući da je u tom slučaju $n \geq 4$ slijedi da je a nenegativan cijeli broj. Konačno ako n daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3 tada možemo zapisati $n = 3a + 2$.

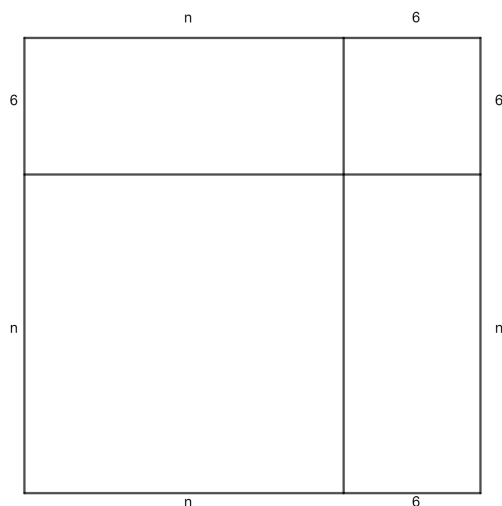
Dokazat ćemo matematičkom indukcijom s korakom 6 da za sve $n \neq 3$ Katarina može izrezati $n \times n$ kolač na željeni način.

Kolači dimenzija 1×1 i 2×2 se očito mogu izrezati na željeni način. Iz gornje Leme slijedi da i kolač dimenzija 6×6 možemo izrezati na željeni način. Rezanje kolača oblika 4×4 , 5×5 , 7×7 i 9×9 je prikazano na slici.



Pretpostavimo da smo za neki $n \geq 2$ uspjeli izrezati kolač dimenzija $n \times n$ na željeni način. Dokažimo da tada možemo izrezati i kolač dimenzija $(n + 6) \times (n + 6)$.

Kolač dimenzija $(n + 6) \times (n + 6)$ možemo podijeliti na jedan $n \times n$ kvadrat, dva pravokutnika dimenzije $6 \times n$ te jedan kvadrat dimenzije 6×6 kao na slici. Iz pretpostavke znamo da $n \times n$ kvadrat možemo izrezati na željeni način, a prema Lemi pravokutnike dimenzija $6 \times n$ i kvadrata 6×6 možemo izrezati u samo L-triomine. Prema tome, posudu $(n + 6) \times (n + 6)$ također možemo izrezati na željeni način.

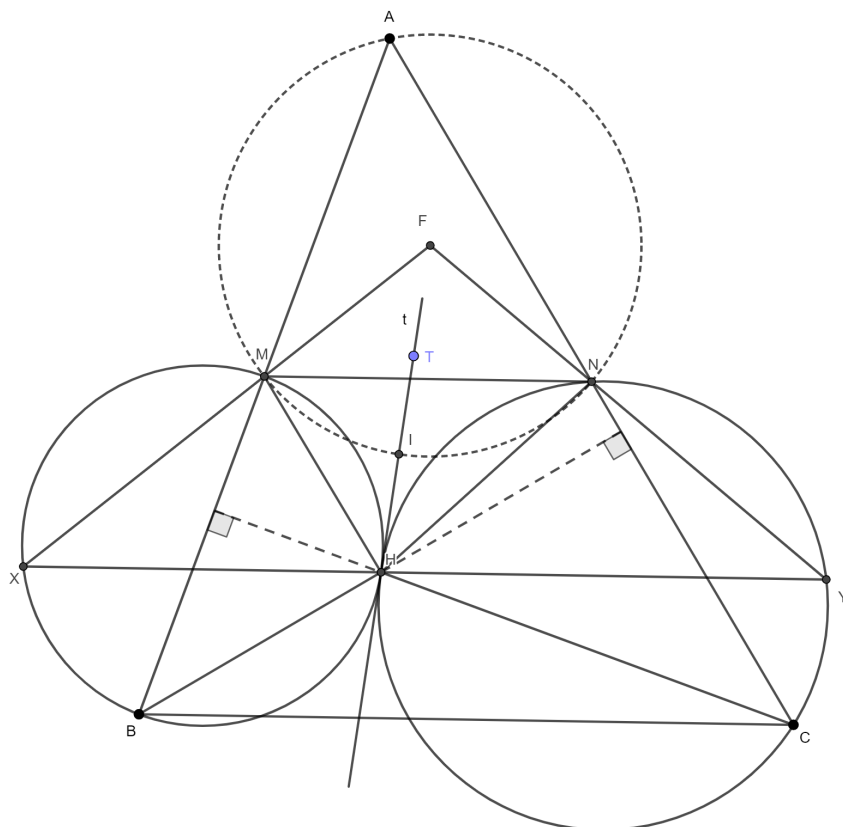


Zadatak S-2.6. [35 bodova]

Neka je H ortocentar trokuta ABC te neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Pretpostavimo da se točka H nalazi unutar četverokuta $BCNM$ te da se opisane kružnice trokuta BHM i CNH međusobno dodiruju. Pravac kroz H paralelan s BC siječe opisane kružnice trokuta BHM i CNH redom u točkama X i Y . Neka je F sjecište pravaca MX i NY te neka je I središte upisane kružnice trokuta MHN . Dokaži da je $|FI| = |FA|$.

Rješenje.

Neka je $\angle BAC = \alpha$, pravac t zajednička tangenta opisanih kružnica trokuta BHM i CNH te točka T proizvoljna točka na pravcu t kao na slici.



Dužina $\overline{MN}$ je srednjica trokuta ABC pa je zato i pravac MN paralelan s pravcima BC i XY .

Budući da je H ortocentar trokuta ABC slijedi da je

$$\sphericalangle HBM = \sphericalangle HBA = 90^\circ - \alpha.$$

Četverokut $BHMX$ je tetivan pa je zato

$$\sphericalangle HXM = \sphericalangle HBM = 90^\circ - \alpha.$$

Konačno kako su pravci XY i MN paralelni imamo da je

$$\sphericalangle NMF = \sphericalangle HXM = 90^\circ - \alpha.$$

Analogno se dobije da je i $\sphericalangle FNM = 90^\circ - \alpha$.

Iz gornjeg imamo da je $\sphericalangle NMF = \sphericalangle FNM = 90^\circ - \alpha$ pa je zato $|FM| = |FN|$. Nadalje, imamo da je

$$\sphericalangle MFN = 180^\circ - \sphericalangle NMF - \sphericalangle FNM = 2\alpha = 2\sphericalangle BAC$$

iz čega slijedi da je kut $\sphericalangle MFN$ središnji kut obodnog kuta MAN na opisanoj kružnici trokuta AMN . Posebno, imamo da je F središte opisane kružnice trokuta AMN .

Dokažimo da se točka I nalazi na opisanoj kružnici trokuta AMN .

Prema teoremu o kutu između tetive i tangente redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle THM &= \sphericalangle MHX = 90^\circ - \alpha, \\ \sphericalangle NHT &= \sphericalangle NCH = 90^\circ - \alpha.\end{aligned}$$

Iz gornjeg slijedi da je

$$\sphericalangle NHM = \sphericalangle NHT + \sphericalangle THM = 180^\circ - 2\alpha.$$

Konačno, kako je I središte upisane kružnice trokuta MHN možemo izračunati

$$\sphericalangle NIM = 180^\circ - \sphericalangle MNI - \sphericalangle IMN = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle MNH + \sphericalangle HMN) = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle NHM = 180^\circ - \alpha.$$

Iz gornjeg slijedi da je četverokut $MINA$ tetivan, tj. točka I se nalazi na opisanoj kružnici trokuta AMN .

Budući da je F središte opisane kružnice trokuta AMN i točka I se također nalazi na opisanoj kružnici slijedi da je $|FI| = |FA|$ što je i trebalo dokazati.

Zadatak S-2.7. [40 bodova]

Za racionalan broj r kažemo da je *poseban* ako se može zapisati u obliku $r = \frac{p^k}{q}$ pri čemu su p i q relativno prosti prirodni brojevi i $k > 1$ prirodan broj.

Neka su a , b i c pozitivni racionalni brojevi takvi da je $abc = 1$. Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi k , l i m takvi da je $a^k + b^l + c^m$ prirodan broj. Dokaži da su brojevi a , b i c posebni.

Rješenje.

Neka je p prosti broj takav da je $v_p(a) > 0$, ako takav ne postoji onda je a recipročan prirodnom broju te očito poseban (specijalno ako za nijedan od a, b, c ne postoji takav p nužno je $a = b = c = 1$ koji su očito posebni). Dalje pretpostavljamo da postoji takav p .

Tvrdimo da je a poseban. Iz uvjeta zadatka imamo $v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = 0$ te onda znamo da je $\min(v_p(b), v_p(c)) < 0$. Tvrdimo da su oba negativna, zaista kada bismo imali $v_p(b) > 0, v_p(c) < 0$ tada bismo imali $v_p(a^k + b^l + c^m) = v_p(c^m) < 0$ što je nemoguće jer je $a^k + b^l + c^m$ prirodan broj.

Nadalje, neka je $v_p(b^l) \neq v_p(c^m)$ tada je $v_p(a^k + b^l + c^m) = \min(v_p(b^l), v_p(c^m)) < 0$ što je opet nemoguće jer je $a^k + b^l + c^m$ prirodan broj. Dakle, $v_p(b^l) = v_p(c^m) \iff lv_p(b) = mv_p(c)$, odnosno vidimo da postoji prirodan broj t takav da je

$$v_p(b) = -t \frac{m}{\gcd(m, l)}, \quad v_p(c) = -t \frac{l}{\gcd(m, l)}$$

Konačno, kako je $v_p(a) + v_p(b) + v_p(c) = 0$ imamo

$$v_p(a) = -v_p(b) - v_p(c) = t \frac{m + l}{\gcd(m + l)}$$

Stoga ako je $v_p(a) > 0$ imamo $\frac{m+l}{\gcd(m+l)} \mid v_p(a)$. Kako to vrijedi za proizvoljan p takav da je $v_p(a) > 0$ brojnik od a je $\frac{m+l}{\gcd(m+l)}$ -ta potencija prirodnog broja pa je a poseban. Analogno se dobije da su b, c posebni.

Zadatak S-2.8. [45 bodova]

Za strogo rastući niz pozitivnih realnih brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kažemo da je *vilenjački* ako za svaki realan broj $c > 0$ postoji prirodan broj N takav da je $a_n < cn$ za svaki prirodan broj $n \geq N$. Nadalje, kažemo da je član vilenjačkog niza a_n *božićna kapica* ako je $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$ za sve $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Postoji li u svakom vilenjačkom nizu beskonačno mnogo božićnih kapica?

Rješenje.

Odgovor: Svaki vilenjački niz ima beskonačno mnogo božićnih kapica.

Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vilenjački niz te stavimo da je $a_0 = 0$. Promotrimo točke (n, a_n) za sve nenegativne cijele brojeve n u koordinatnom sustavu kao na slici.

Za svaki prirodan broj n označimo s k_n koeficijent smjera pravca kojeg dobijemo spajanjem točaka $(0, a_0)$ i (n, a_n) .

Korištenjem svojstva vilenjačkog niza za $c = k_1$ slijedi da postoji prirodan broj N takav da je $a_n < cn$ za svaki $n \geq N$. Posebno, to znači da je

$$k_n = \frac{a_n - a_0}{n - 0} = \frac{a_n}{n} < k_1$$

za svaki $n \geq N$.

Promotrimo koeficijente smjera $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$. Neka je n_1 najveći indeks $i = 1, 2, \dots, N-1$ za koji je koeficijent smjera k_i maksimalan. Iz prethodne nejednakosti također imamo da je $k_{n_1} > k_n$ za sve $n \geq N$, tj. k_{n_1} je je maksimalan mogući koeficijent smjera pravca. Zbog maksimalnosti koeficijenta smjera k_{n_1} se zato sve promatrane točke nalaze na ili ispod pravca kojeg dobijemo spajanjem točaka $(0, a_0)$ i (n_1, a_{n_1}) .

Obojimo točku (n_1, a_{n_1}) crveno bojom, a sve prethodne točke $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n_1 - 1, a_{n_1-1})$ obojimo plavom bojom.

Stavimo točku (n_1, a_{n_1}) u ishodište koordinatnog sustava te promotrimo ostatka niza (a_n) za $n > n_1$ u tom novom koordinatnom sustavu. Koordinate novih točaka će biti oblika $(n, a_n - a_{n_1})$ za sve $n > n_1$.

Direktnim računom se lagano provjeri da se svojstva vilenjačkog niza očuvaju kada svakom članu niza oduzmemo isti realan broj x . Posebno, slijedi da je niz $(a_n - a_{n_1})_{n > n_1}$ dalje vilenjački niz. Zbog

toga analognim postupkom kao i prije možemo definirati indeks n_2 te točku (n_2, a_{n_2}) obojati crvenom bojom, a sve prijašnje točke plavom.

Ponavljanjem gornjeg postupka redom dobijemo niz crvenih točaka $A_1 = (n_1, a_{n_1})$, $A_2 = (n_2, a_{n_2})$, $\dots$, $A_k = (n_k, a_{n_k})$, $\dots$

Pokažimo da je za svaku crvenu točku $A_j = (n_j, a_{n_j})$ broj a_{n_j} božićna kapica.

Neka je $i < n_j$ i promotrimo točke $X_1 = (n_j - i, a_{n_j - i})$, $A_j = (n_j, a_{n_j})$ i $X_2 = (n_j + i, a_{n_j + i})$. Iz definicije crvenih točaka i svojstva maksimalnosti koeficijenata smjerova znamo da se točke X_1 i X_2 nalaze na ili ispod pravca koje dobijemo spajanjem točaka A_{j-1} i A_j i pravca kojeg dobijemo spajanjem točaka A_j i A_{j+1} . Posebno, to znači da je

$$\sphericalangle X_1 A_j X_2 \leq \sphericalangle A_{j-1} A_j A_{j+1} < 180^\circ.$$

Iz $\sphericalangle X_1 A_j X_2 < 180^\circ$ slijedi da pravac $X_1 A$ zatvara veći kut s x -osi, nego pravac $X_2 A$, tj. koeficijent smjera pravca $X_1 A$ je veći od koeficijenta smjera pravca $X_2 A$. Prema tome imamo da je

$$k_{X_1 A} = \frac{a_{n_j} - a_{n_j - i}}{i} > k_{X_2 A} = \frac{a_{n_j + i} - a_{n_j}}{i}$$

iz čega konačno slijedi da je $a_{n_j - i} + a_{n_j + i} < 2a_{n_j}$ za svaki $i < n_j$. Dakle, a_{n_j} je zaista božićna kapica za svaki prirodan broj j .

