

MEDO 2025./2026.

Četvrto kolo

14.2.2026.

Kadeti (5. i 6. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak K-4.1. [10 bodova]

Najmanji četveroznamenasti višekratnik broja 13 uvećan je za njegovu trinaestinu.

Odredi dobiveni broj.

Rješenje.

Odredimo prvo najmanji četveroznamenasti višekratnik broja 13. Provjerimo koji ostatak pri dijeljenju s 13 daje 1000 (najmanji četveroznamenasti broj):

$$1000 : 13 = 76 \quad \text{i ostatak } 12.$$

Dakle, $1000 = 13 \cdot 76 + 12$, odnosno

$$1001 = 1000 + 1 = 13 \cdot 76 + 12 + 1 = 13 \cdot 76 + 13 = 13 \cdot 77.$$

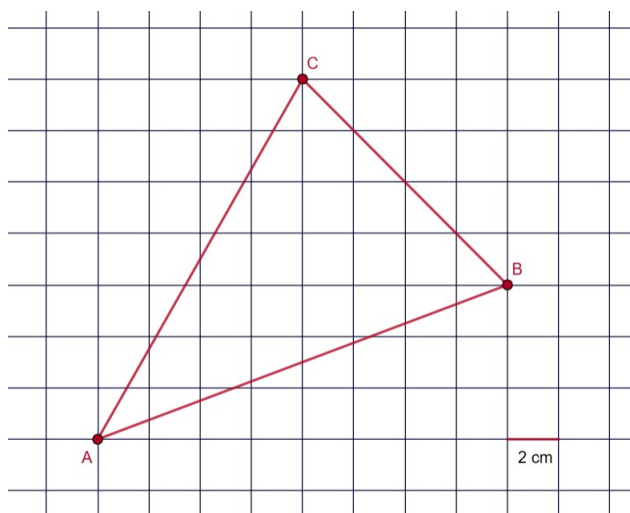
Zaključujemo da je 1001 najmanji četveroznamenasti višekratnik broja 13. Kako je $1001 = 13 \cdot 77$, trinaestina broja 1001 jednaka je $1001 : 13 = 77$. Uvećamo li najmanji četveroznamenasti višekratnik broja 13 njegovom trinaestinom dobivamo

$$1001 + 77 = 1078.$$

Zadatak K-4.2. [15 bodova]

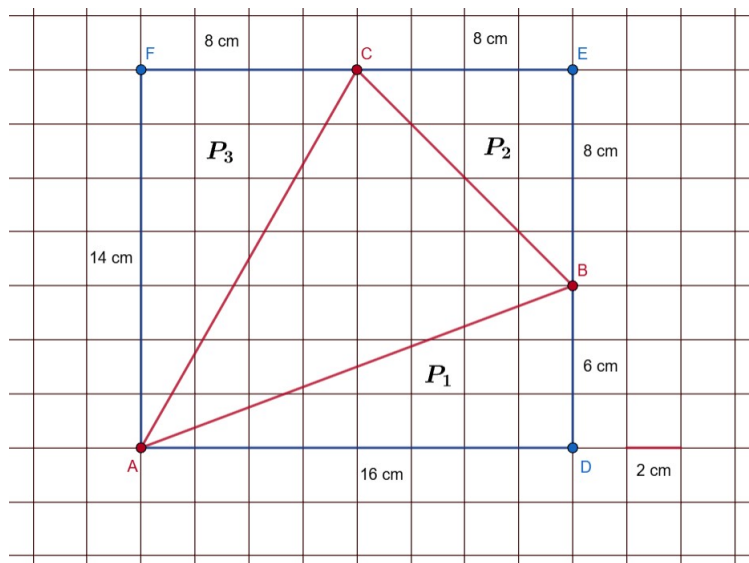
Trokut ABC smješten je u kvadratnu mrežu u kojoj je duljina stranice kvadratića 2 cm.

Izračunaj površinu trokuta ABC .



Rješenje.

„Zapakirajmo” trokut ABC unutar pravokutnika $ADEF$ tako da vrhovi trokuta B i C pripadaju redom stranicama pravokutnika $\overline{DE}$ i $\overline{EF}$.



Duljine stranica dobivenog pravokutnika su 16 cm i 14 cm pa mu je površina jednaka $16 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm} = 224 \text{ cm}^2$.

Označimo s P_1 , P_2 i P_3 površine trokuta ADB , BEC i CFA . Odredimo te površine:

$$P_1 = 16 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} : 2 = 48 \text{ cm}^2.$$

$$P_2 = 8 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} : 2 = 32 \text{ cm}^2.$$

$$P_3 = 8 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm} : 2 = 56 \text{ cm}^2.$$

Površina P trokuta ABC jednaka je razlici površine pravokutnika i zbroya površina P_1 , P_2 i P_3 pa slijedi:

$$P = 224 - (P_1 + P_2 + P_3) = 224 - (48 + 32 + 56) = 224 - 136 = 88 \text{ cm}^2.$$

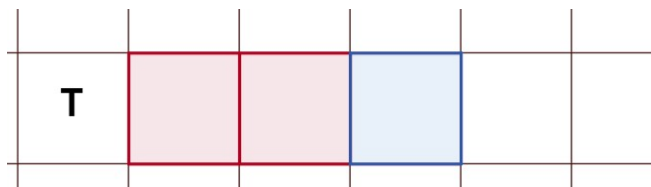
Zadatak K-4.3. [20 bodova]

Toma, Branko i Sven zajedno su skupili 67 bodova na školskom natjecanju iz matematike. Znamo da je Branko osvojio dvostruko više bodova od dvije trećine Tomina broja bodova, a Sven je osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova.

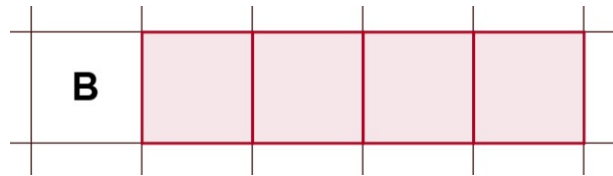
Koliko je bodova osvojio svatko od njih?

Prvo rješenje.

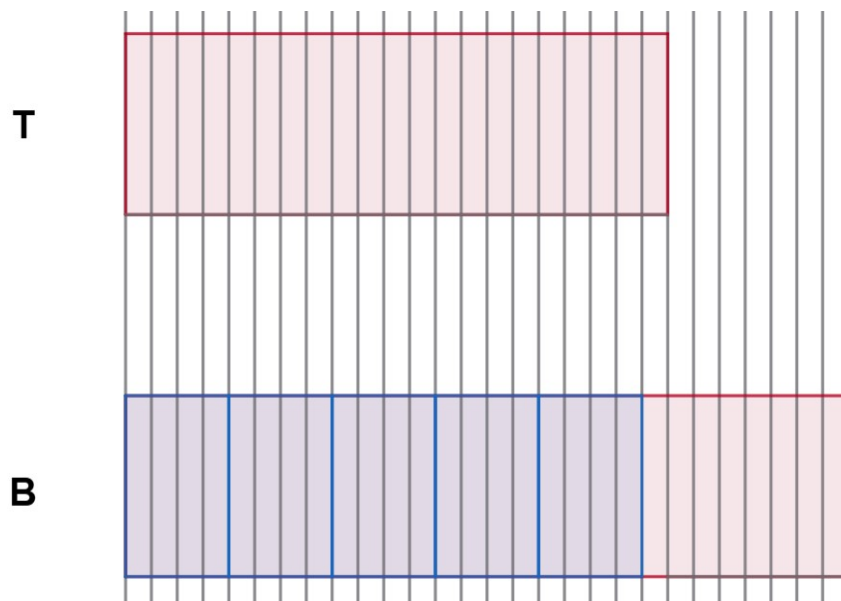
Prikažimo osvojene bodove triju natjecatelja kao pravokutnike. Prvo nacrtajmo pravokutnik koji će predstavljati Tomine bodove i podijelimo ga na tri jednaka dijela pa obojimo dva dijela istom bojom.



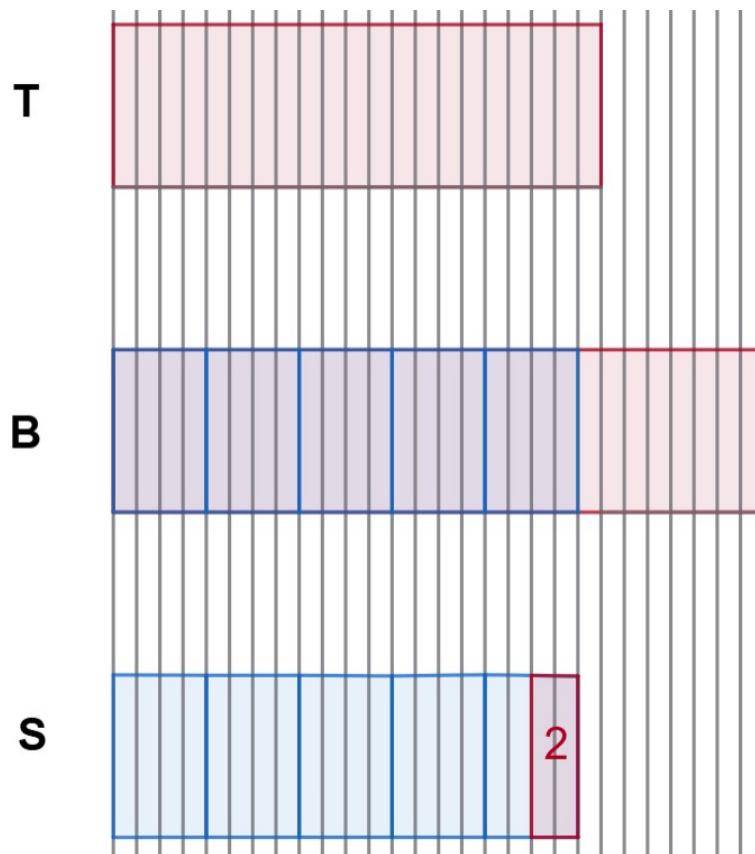
Ta dva dijela predstavljaju dvije trećine Tominih bodova, a Branko je osvojio dva puta više od toga pa ćemo njegove bodove prikazati pomoću 4 takva dijela, tj. Branko je osvojio četiri trećine Tominih bodova.



Budući da je Sven osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova, da bismo prikazali njegove bodove, potrebno je svaki djelić podijeliti na sedmine, a to bi značilo da smo Tomine bodove podijelili na dvadesetjednine. Branko je tada osvojio $\frac{28}{21}$ Tominih bodova.



Budući da je $\frac{5}{7}$ od 28 jednako $28 : 7 \cdot 5 = 20$, Sven je osvojio 2 boda manje od $\frac{20}{21}$ Tominih bodova.



Ako označimo sa x dvadesetjedninu Tominih osvojenih bodova, tada je ukupan broj Tominih bodova $21x$, Brankovih $28x$, a Svenovih $20x - 2$. Budući da je zbroj svih njihovih bodova jednak 67, slijedi jednačba:

$$\begin{aligned} 21x + 28x + 20x - 2 &= 67 \\ 69x - 2 &= 67 \\ 69x &= 69 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Dakle, Toma je osvojio $21 \cdot 1 = 21$ bod, Branko $28 \cdot 1 = 28$ bodova, a Sven $20 \cdot 1 - 2 = 18$ bodova.

Drugo rješenje.

Označimo s T broj Tominih bodova, s B broj Brankovih bodova i sa S broj Svenovih bodova.

Branko je osvojio dvostruko više od dvije trećine Tominih bodova pa vrijedi

$$B = 2 \cdot \frac{2}{3}T = \frac{4}{3}T.$$

Sven je osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova pa vrijedi

$$S = \frac{5}{7}B - 2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}T - 2 = \frac{20}{21}T - 2.$$

Zajedno su skupili 67 bodova pa imamo.

$$T + \frac{4}{3}T + \frac{20}{21}T - 2 = 67,$$

gdje nakon pojednostavljivanja dobivamo

$$\frac{69}{21}T = 69,$$

odakle je $T = 21$. Dalje uvrštavanjem umjesto T dobivamo $B = 28$ i $S = 18$.

Zadatak K-4.4. [25 bodova]

Organizacijski odbor dječje utrke „Mali brzići” nabavlja pobjedničko postolje za svečanost proglašenja najboljih trkača. Postolje se sastoji od tri platforme, za prvo, drugo i treće mjesto. Kada se postolje gleda sprijeda, vide se tri pravokutnika jednake širine, posložena tako da najviša platforma stoji u sredini, a svaka sljedeća (za drugo i treće mjesto) je 5 cm niža od prethodne. Organizatori žele da sve dimenzije tih pravokutnika budu cjelobrojne (u cm) te da ukupna površina tih triju pravokutnika iznosi 2700 cm^2 . Također, širina pojedine platforme treba biti veća od zbroja visina svih platformi, a najniža platforma treba biti visine barem 5 cm.

Koliko može iznositi visina platforme za 1. mjesto?



Rješenje.

Označimo s x duljinu jedne platforme, a s y visinu platforme za treće mjesto. Tada je $y + 5$ visina platforme za drugo mjesto, a $y + 10$ visina platforme za prvo mjesto.

Budući da je ukupna površina jednaka 2700 cm^2 , vrijedi:

$$x \cdot y + x \cdot (y + 5) + x \cdot (y + 10) = 2700$$

$$x \cdot (y + y + 5 + y + 10) = 2700$$

$$x \cdot (3y + 15) = 2700$$

Nakon rastavljanja broja 2700 na proste faktore dobivamo

$$x \cdot (3y + 15) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Sada množimo proste faktore tako da na kraju dobijemo dva faktora koji predstavljaju x i $3y + 15$ i tražimo rješenja. Pri tome imamo na umu da izraz $3y + 15$ predstavlja zbroj visina svih platformi, a prema uvjetima zadatka mora vrijediti $x > 3y + 15$. Također, najniža platforma visine y mora biti barem 5 cm pa je izraz $3y + 15 \geq 3 \cdot 5 + 15 = 30$.

Taj broj 30 možemo dobiti iz prostih faktora $2 \cdot 3 \cdot 5$ pa za stvaranje drugog faktora ostaje $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$.

Sljedeći broj po veličini koji možemo dobiti za $3y + 15$ je 36 kao umnožak $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ pa za stvaranje faktora x ostaje $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.

Na sličan način tražimo dalje; odredimo vrijednost izraza $3y + 15$ kombinirajući moguće proste faktore, a zatim računamo vrijednost od x . Prikazujemo sve moguće rezultate u tablici:

x	90	75	60	54
$3y + 15$	30	36	45	50

Dakle, $3y + 15$ može poprimiti vrijednosti 30, 36, 45 i 50 prema uvjetima zadatka, ali 50 nije moguće rješenje jer 50 nije djeljiv s 3, odnosno tada y ne bi bio cijeli broj.

Dakle, $y \in \{5, 7, 10\}$, a to znači da visina platforme za prvo mjesto $y + 10$ može biti 15 cm, 17 cm ili 20 cm.

Zadatak K-4.5. [30 bodova]

Odredi sve moguće proste brojeve p i q te prirodan broj n takve da vrijedi $2p + 3q + 4n = 2026$.

Rješenje.

Budući da je 2026 paran broj, izraz na lijevoj strani jednakosti također mora biti paran broj. Budući da su $2p$ i $4n$ sigurno parni kao višekratnici broja 2, također i $3q$ mora biti paran broj. Taj broj će biti djeljiv s 2 ako je q djeljiv s 2, a to je moguće samo ako je $q = 2$ jer q mora biti prost broj.

Uvrstimo u izraz $q = 2$ nakon sređivanja imamo $2p + 4n = 2020$, a nakon dijeljenja s 2 dobivamo $p + 2n = 1010$.

Slično kao i prije, 1010 je paran broj, stoga i izraz na lijevoj strani mora biti paran, a to će biti ako je p paran, a zbog toga što je p prost, mora vrijediti $p = 2$.

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo $2n = 1008$, odnosno $n = 504$.

Zadatak K-4.6. [35 bodova]

Pet pjevačica, Antonija, Ivana, Korina, Lucija i Mirela, otpjevale su neki broj pjesama na humanitar-nom koncertu. Svaku su pjesmu otpjevale zajedno tri pjevačice. Svaku od svojih odabranih pjesama svaka je pjevačica pjevala samo jednom. Antonija je otpjevala najviše, i to 8, a Ivana najmanje, i to 5 pjesama.

Koliko je ukupno pjesama otpjevano na ovom koncertu?

Napomena: potrebno je pokazati da se dobiveni broj pjesama doista može postići u skladu s uvjetima zadatka.

Rješenje.

Označimo s A , I , K , L i M broj pjesama koje su otpjevale redom Antonija, Ivana, Korina, Lucija i Mirela. Znamo da vrijedi $A = 8$ i $I = 5$. Također, $5 < K, L, M < 8$ pa K , L i M mogu biti jednaki 6 ili 7.

Neka je n ukupni broj otpjevanih pjesama. Budući da su svaku pjesmu otpjevale 3 pjevačice, vrijedi $A + I + K + L + M = 3n$, odnosno

$$8 + 5 + K + L + M = 3n.$$

Desna strana jednakosti djeljiva je s 3 pa zato i $13 + K + L + M$ mora biti djeljivo s 3. Promatramo mogućnosti za broj pjesama koje su otpjevale Korina, Lucija i Mirela.

- Ako su sve tri djevojke otpjevale po 6 pjesama, imamo $13 + K + L + M = 13 + 6 + 6 + 6 = 31$, što nije djeljivo s 3 pa to nije moguće.
- Ako je jedna od njih otpjevala 7 pjesama, a preostale dvije po 6, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 6 + 6 = 32$. To ponovno nije djeljivo s 3 pa taj slučaj nije moguć.
- Ako su dvije od njih otpjevale po 7 pjesama, a jedna 6, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 7 + 6 = 33$. Kako je 33 djeljiv s 3, zaključujemo da ukupan broj pjesama može biti $33 : 3 = 11$.
- Ako su sve tri djevojke otpjevale po 7 pjesama, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 7 + 7 = 34$, što ponovno nije djeljivo s 3 pa to nije moguće.

Dobili smo jednu mogućnost za ukupan broj otpjevanih pjesama, ali preostaje nam provjeriti je li moguće postići 11 otpjevanih pjesama na način da je Antonija otpjevala 8, Ivana 5, dvije od preostalih djevojaka po 7 i jedna 6 pjesama te tako da su svaku pjesmu otpjevale po 3 djevojke.

Pretpostavimo da su Antonija i Ivana otpjevale 5 pjesama skupa, a Antonija još 3 bez Ivane. Preostale tri pjesme tada su morale otpjevati Korina, Lucija i Mirela:

pjesma	1. pjevačica	2. pjevačica	3. pjevačica
1	Antonija	Ivana	
2	Antonija	Ivana	
3	Antonija	Ivana	
4	Antonija	Ivana	
5	Antonija	Ivana	
6	Antonija		
7	Antonija		
8	Antonija		
9	Korina	Lucija	Mirela
10	Korina	Lucija	Mirela
11	Korina	Lucija	Mirela

Pretpostavimo da su Korina i Lucija otpjevale po 7 pjesama, a Mirela 6. Ako su pjesme 6, 7 i 8 otpjevale Antonija, Korina i Lucija, tada Korini i Luciji nedostaje po jedna pjesma. Ako su pjesme 1 i 2 otpjevale Antonija, Ivana i Korina ili Lucija, tada je Mirela morala otpjevati pjesme 3, 4 i 5 čime su zadovoljeni svi uvjeti.

pjesma	1. pjevačica	2. pjevačica	3. pjevačica
1	Antonija	Ivana	Korina
2	Antonija	Ivana	Lucija
3	Antonija	Ivana	Mirela
4	Antonija	Ivana	Mirela
5	Antonija	Ivana	Mirela
6	Antonija	Korina	Lucija
7	Antonija	Korina	Lucija
8	Antonija	Korina	Lucija
9	Korina	Lucija	Mirela
10	Korina	Lucija	Mirela
11	Korina	Lucija	Mirela

Ovo je samo jedan od mogućih rasporeda za koji su zadovoljeni svi uvjeti. Zaključujemo da je na koncertu otpjevano ukupno 11 pjesama.

Zadatak K-4.7. [40 bodova]

Koliko ima brojeva manjih od 10 000 koji imaju točno 6 djelitelja?

Rješenje.

Svaki prirodni broj veći od 1 može se zapisati kao umnožak prostih brojeva. Na primjer,

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5 \quad 32 = 2^5.$$

Postoji jednostavno pravilo za prebrojavanje djelitelja. Ako je broj zapisan kao umnožak svojih prostih faktora

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k},$$

tada je broj njegovih djelitelja jednak $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$.

Na primjer:

- $12 = 2^2 \cdot 3^1$, eksponenti su 2 i 1, pa je broj djelitelja $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$.
- $15 = 3 \cdot 5^1$, eksponenti su 1 i 1, pa je broj djelitelja $(1 + 1) \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$.

- $32 = 2^5$, eksponent je 5, pa je broj djelitelja $5 + 1 = 6$.

Zašto ovo pravilo vrijedi? Pogledajmo opet broj $12 = 2^2 \cdot 3^1$. Svaki djelitelj broja 12 nastaje tako da za faktor 2 odaberemo eksponent 0, 1 ili 2 (to su 3 mogućnosti), a za faktor 3 odaberemo eksponent 0 ili 1 (to su 2 mogućnosti). Ukupno tako imamo $3 \cdot 2 = 6$ kombinacija, i svaka daje drugi djelitelj:

$$2^0 \cdot 3^0 = 1, \quad 2^1 \cdot 3^0 = 2, \quad 2^2 \cdot 3^0 = 4, \quad 2^0 \cdot 3^1 = 3, \quad 2^1 \cdot 3^1 = 6, \quad 2^2 \cdot 3^1 = 12.$$

Brojevi koji imaju točno 6 djelitelja su oni za koje vrijedi

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1) = 6.$$

Broj 6 možemo zapisati kao umnožak brojeva većih od 1 na samo dva načina, pa imamo samo dva slučaja:

- 1. slučaj: $6 = 6$, što znači da imamo samo jedan prosti faktor s eksponentom $a_1 = 5$ (jer $a_1 + 1 = 6$). Dakle, broj je oblika $n = p^5$, gdje je p prosti broj.
- 2. slučaj: $6 = 3 \cdot 2$, što znači da imamo dva različita prosta faktora s eksponentima $a_1 = 2$ i $a_2 = 1$ (jer $a_1 + 1 = 3$ i $a_2 + 1 = 2$). Dakle, broj je oblika $n = p^2 \cdot q$, gdje su p i q različiti prosti brojevi.

Prebrojimo sada sve takve brojeve manje od 10 000.

1. $n = p^5$

Trebamo pronaći sve proste brojeve p takve da je $p^5 < 10\,000$:

- $p = 2$: $2^5 = 32 < 10\,000$
- $p = 3$: $3^5 = 243 < 10\,000$
- $p = 5$: $5^5 = 3125 < 10\,000$
- $p = 7$: $7^5 = 16\,807 > 10\,000$

Za sve proste brojeve veće od 5 peta potencija prelazi 10 000, pa ih ne računamo.

U ovom slučaju dobivamo 3 broja: 32, 243 i 3125.

2. $n = p^2 \cdot q$

Ovdje su p i q različiti prosti brojevi, a uvjet je $p^2 \cdot q < 10\,000$.

Iz toga slijedi da q mora zadovoljavati:

$$q < 10\,000 : p^2.$$

Za svaki prosti broj p trebamo prebrojiti koliko ima prostih brojeva q (različitih od p) koji su manji od $10\,000 : p^2$.

Rezultati su prikazani u sljedećoj tablici. Za svaki p , gornja granica za q dobije se tako da izračunamo $9999 : p^2$ i uzmemo cijeli dio tog broja (jer $p^2 \cdot q$ mora biti manji od 10 000, tj. najviše 9999). Stupac *najveći mogući q* sadrži najveći prosti broj koji zadovoljava oba uvjeta ($q \leq$ granica i $q \neq p$), a stupac *broj rješenja* daje ukupan broj takvih prostih brojeva q .

p	p^2	gornja granica za q	najveći mogući q	broj rješenja
2	4	2499	2477	366
3	9	1111	1109	185
5	25	399	397	77
7	49	204	199	45
11	121	82	79	21
13	169	59	59	16
17	289	34	31	10
19	361	27	23	8
23	529	18	17	7
29	841	11	11	5
31	961	10	7	4
37	1369	7	7	4
41	1681	5	5	3
43	1849	5	5	3
47	2209	4	3	2
53	2809	3	3	2
59	3481	2	2	1
61	3721	2	2	1
67	4489	2	2	1
Ukupno:				761

Za $p = 71$ imamo $p^2 = 5041$, pa čak ni uz najmanji mogući $q = 2$ ne dobivamo broj manji od 10 000 (jer je $5041 \cdot 2 = 10\,082 > 10\,000$). Zato se u tablici ne pojavljuju prosti brojevi $p \geq 71$.

Objasnimo na primjeru kako čitati tablicu. Pogledajmo redak s $p = 7$:

- $p^2 = 49$
- Gornja granica: $9999 : 49 = 204,06 \dots$, cijeli dio je 204. Dakle, q može biti najviše 204.
- Prostih brojeva manjih ili jednakih 204 ima ih ukupno 46 (to su 2, 3, 5, 7, 11, $\dots$, 197, 199).
- Iz tog popisa moramo izbaciti $q = 7$ jer mora biti $q \neq p$. Ostaje $46 - 1 = 45$ prostih brojeva.
- Najveći među njima je 199.

Zbrojimo rezultate iz oba slučaja:

$$\underbrace{3}_{\text{slučaj } p^5} + \underbrace{761}_{\text{slučaj } p^2 \cdot q} = \boxed{764}.$$

Dakle, postoji točno 764 prirodnih brojeva manjih od 10 000 koji imaju točno 6 djelitelja.

Napomena: Umjesto da raspisujemo redom po prostim brojevima p mogli smo raspisivati redom po prostim brojevima q , ali u tom slučaju dobili bismo vrlo veliki broj slučajeva.

Zadatak K-4.8. [45 bodova]

Uoči Valentinova, cvjećar Vlatko ima pune ruke posla i treba brzo sastavljati bukete. Na raspolaganju ima 4 vrste cvijeća: ruže, tulipane, karanfile i ljiljane. Planira sastaviti bukete od po 11 cvjetova.

Koliko različitih vrsta buketa Vlatko može sastaviti ako

- a) nije nužno staviti svaku vrstu cvijeća u buket,
- b) barem 1 cvijet svake vrste mora biti u buketu?

Vrste buketa se međusobno razlikuju po broju cvjetova pojedine vrste. Primjerice, jedna vrsta buketa sadrži 2 ruže, 5 tulipana i 4 ljiljana (bez karanfila), a druga vrsta sadrži 1 ružu, 5 tulipana, 2 ljiljana i 3 karanfila.

Pretpostavljamo da Vlatko ima dovoljno cvijeća svake vrste za sve bukete koje će napraviti.

Rješenje.

Ovaj zadatak je primjena **metode štapića i kuglica** te možemo izraziti ekvivalentni zadatak: Na koliko načina možemo 11 različitih kuglica podijeliti u 4 skupine tako da:

- a) nije nužno da se u svakoj skupini nalazi kuglica,
- b) barem 1 kuglica mora biti u svakoj skupini?

Zamislamo da kuglice dijelimo u skupine tako da ih razdvojimo štapićima. Za stvoriti četiri skupine nam trebaju tri štapića. Slijedi jedan primjer kako to možemo napraviti:

• • | • • • | • • • • | • •

Za naš zadatak bi to značilo da se u buketu nalaze 2 ruže, 3 tulipana, 4 karanfila i 2 ljiljana.

Promatrajmo sada posebno svaki podzadatak.

a) U ovom dijelu zadatka moguća je sljedeća situacija:

• • • • • || • • • • | • •

Ovo konkretno znači da je moguće da imamo 5 ruža, nijedan tulipan, 4 karanfila i 2 ljiljana. S obzirom da tako možemo postaviti kuglice i štapiće na bilo koja mjesta, zaključujemo da imamo 14 pozicija za 14 predmeta pa prvi štapić možemo postaviti 14 načina, drugi štapić na 13 načina, a treći na 12 načina. Ukupno je to $14 \cdot 13 \cdot 12$ načina.

Ipak, budući da štapiće ne razlikujemo, taj umnožak treba podijeliti sa brojem mogućih međusobnih razmjesta tih štapića, a budući da imamo 3 štapića, njih možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1$ načina. Dakle, broj mogućih buketa u **a)** zadatku je

$$\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364.$$

b) Budući da u svakoj skupini mora biti barem jedna kuglica, ne smijemo postavljati štapiće jedan za drugim, kao ni na početak ili kraj niza. To znači da ih možemo smještati između 11 kuglica za što imamo 10 mogućnosti. Dakle, prvi štapić možemo postaviti na 10 načina, drugi na 9, a treći na 8, no opet, budući da štapiće ne razlikujemo, trebamo podijeliti umnožak $10 \cdot 9 \cdot 8$ sa brojem međusobnih razmjesta tih štapića, a to je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Dakle, broj mogućih buketa u **b)** zadatku je

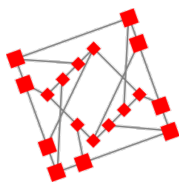
$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Napomena: Ekvivalentan zadatak bi bio odrediti broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

gdje su:

- a) x_1, x_2, x_3 i x_4 nenegativni cijeli brojevi,
- b) x_1, x_2, x_3 i x_4 prirodni brojevi.



MEDO 2025./2026.

Četvrto kolo

14.2.2026

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak J-4.1. [10 bodova]

Toma, Branko i Sven zajedno su skupili 67 bodova na školskom natjecanju iz matematike. Znamo da je Branko osvojio dvostruko više bodova od dvije trećine Tomina broja bodova, a Sven je osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova.

Koliko je bodova osvojio svatko od njih?

Rješenje.

Označimo s T broj Tominih bodova, s B broj Brankovih bodova i sa S broj Svenovih bodova.

Branko je osvojio dvostruko više od dvije trećine Tominih bodova pa vrijedi

$$B = 2 \cdot \frac{2}{3}T = \frac{4}{3}T.$$

Sven je osvojio 2 boda manje od pet sedmina Brankovih bodova pa vrijedi

$$S = \frac{5}{7}B - 2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}T - 2 = \frac{20}{21}T - 2.$$

Zajedno su skupili 67 bodova pa imamo.

$$T + \frac{4}{3}T + \frac{20}{21}T - 2 = 67,$$

gdje nakon pojednostavljivanja dobivamo

$$\frac{69}{21}T = 69,$$

odakle je $T = 21$. Dalje uvrštavanjem umjesto T dobivamo $B = 28$ i $S = 18$.

Zadatak J-4.2. [15 bodova]

Ako brojeve 1995 i 2026 podijelimo istim brojem, dobit ćemo redom ostatke 52 i 16.

S kojim brojem smo podijelili dane brojeve?

Rješenje.

Označimo s n traženi broj. Tada vrijedi $1995 = nk + 52$ i $2026 = nl + 16$ gdje su k i l prirodni brojevi.

Oduzimanjem 52 iz prve te 16 iz druge jednakosti dobivamo $1943 = nk$ i $2010 = nl$. Ovo znači da je n zajednički djeljitelj brojeva 1943 i 2010.

Rastavom tih brojeva na proste faktore dobivamo $1943 = 67 \cdot 29$ i $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.

Broj 67 je jedini zajednički djelitelj (osim 1) ovih brojeva, tako da je $n = 67$.

Zadatak J-4.3. [20 bodova]

U dvije posude spremljene su dvije nijanse tempere ljubičaste boje, dobivene miješanjem crvene i plave tempere. U prvoj posudi je pomiješano 8 litara crvene i 7 litara plave tempere, a u drugoj posudi 11 litara crvene i 9 litara plave tempere. Iz obje posude izvađeno je istovremeno po 7 litara tempere te je zatim izvađeni dio iz prve posude uliven u drugu i obratno.

Od koliko se litara crvene, a od koliko plave tempere sastoji ljubičasta tempera u svakoj od posuda nakon prelijevanja?

Rješenje.

Analizirajmo sastav smjese u svakoj od posuda. U prvoj posudi pomiješano je 8 litara crvene i 7 litara plave boje pa crvena boja čini $\frac{8}{8+7}$ te smjese, a plava boja $\frac{7}{8+7}$ smjese. U drugoj posudi pomiješano je 11 litara crvene i 9 litara plave boje pa crvena boja čini $\frac{11}{11+9}$ te smjese, a plava boja $\frac{9}{11+9}$ smjese. Udjeli se proporcionalno prenose u bilo koju količinu pojedine smjese:

posuda	prva posuda		druga posuda	
boja	crvena	plava	crvena	plava
u 1 litri smjese	$\frac{8}{15}$ litre	$\frac{7}{15}$ litre	$\frac{11}{20}$ litre	$\frac{9}{20}$ litre
u 7 litara smjese	$7 \cdot \frac{8}{15} = \frac{56}{15}$ litre	$7 \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{15}$ litre	$7 \cdot \frac{11}{20} = \frac{77}{20}$ litre	$7 \cdot \frac{9}{20} = \frac{63}{20}$ litre
u ostatku smjese	$8 \cdot \frac{8}{15} = \frac{64}{15}$ litre	$8 \cdot \frac{7}{15} = \frac{56}{15}$ litre	$13 \cdot \frac{11}{20} = \frac{143}{20}$ litre	$13 \cdot \frac{9}{20} = \frac{117}{20}$ litre

U četvrtom retku tablice sada imamo količine crvene i plave boje koje smo odlili iz pojedine posude, a u petom retku količine boje koje su ostale u odgovarajućoj posudi. Nakon ulijevanja po 7 litara u suprotne posude imamo sljedeće količine boja po posudama:

posuda	prva posuda		druga posuda	
boja	crvena	plava	crvena	plava
bilo u posudi (litara)	$\frac{64}{15}$	$\frac{56}{15}$	$\frac{143}{20}$	$\frac{117}{20}$
doliveno (litara)	$\frac{77}{20}$	$\frac{63}{20}$	$\frac{56}{15}$	$\frac{49}{15}$
ukupno (litara)	$\frac{64}{15} + \frac{77}{20} = 8\frac{7}{60}$	$\frac{56}{15} + \frac{63}{20} = 6\frac{53}{60}$	$\frac{143}{20} + \frac{56}{15} = 10\frac{53}{60}$	$\frac{117}{20} + \frac{49}{15} = 9\frac{7}{60}$

Nakon prelijevanja u prvoj posudi nalazi se $8\frac{7}{60}$ litara crvene i $6\frac{53}{60}$ litara plave tempere, a u drugoj posudi nalazi se $10\frac{53}{60}$ litara crvene i $9\frac{7}{60}$ litara plave tempere.

Zadatak J-4.4. [25 bodova]

Pet pjevačica, Antonija, Ivana, Korina, Lucija i Mirela, otpjevale su neki broj pjesama na humanitar-nom koncertu. Svaku su pjesmu otpjevale zajedno tri pjevačice. Svaku od svojih odabranih pjesama svaka je pjevačica pjevala samo jednom. Antonija je otpjevala najviše, i to 8, a Ivana najmanje, i to 5 pjesama.

Koliko je ukupno pjesama otpjevano na ovom koncertu?

Napomena: potrebno je dokazati da se dobiveni broj pjesama doista može postići u skladu s uvjetima zadatka.

Rješenje.

Označimo s A , I , K , L i M broj pjesama koje su otpjevale redom Antonija, Ivana, Korina, Lucija i Mirela. Znamo da vrijedi $A = 8$ i $I = 5$. Također, $5 < K, L, M < 8$ pa K , L i M mogu biti jednaki 6 ili 7.

Neka je n ukupni broj otpjevanih pjesama. Budući da su svaku pjesmu otpjevale 3 pjevačice, vrijedi $A + I + K + L + M = 3n$, odnosno

$$8 + 5 + K + L + M = 3n.$$

Desna strana jednakosti djeljiva je s 3 pa zato i $13 + K + L + M$ mora biti djeljivo s 3. Promatramo mogućnosti za broj pjesama koje su otpjevale Korina, Lucija i Mirela.

- Ako su sve tri djevojke otpjevale po 6 pjesama, imamo $13 + K + L + M = 13 + 6 + 6 + 6 = 31$, što nije djeljivo s 3 pa to nije moguće.
- Ako je jedna od njih otpjevala 7 pjesama, a preostale dvije po 6, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 6 + 6 = 32$. To ponovno nije djeljivo s 3 pa taj slučaj nije moguć.
- Ako su dvije od njih otpjevale po 7 pjesama, a jedna 6, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 7 + 6 = 33$. Kako je 33 djeljiv s 3, zaključujemo da ukupan broj pjesama može biti $33 : 3 = 11$.

- Ako su sve tri djevojke otpjevale po 7 pjesama, imamo $13 + K + L + M = 13 + 7 + 7 + 7 = 34$, što ponovno nije djeljivo s 3 pa to nije moguće.

Dobili smo jednu mogućnost za ukupan broj otpjevanih pjesama, ali preostaje nam provjeriti je li moguće postići 11 otpjevanih pjesama na način da je Antonija otpjevala 8, Ivana 5, dvije od preostalih djevojaka po 7 i jedna 6 pjesama te tako da su svaku pjesmu otpjevale po 3 djevojke.

Pretpostavimo da su Antonija i Ivana otpjevale 5 pjesama skupa, a Antonija još 3 bez Ivane. Preostale tri pjesme tada su morale otpjevati Korina, Lucija i Mirela:

pjesma	1. pjevačica	2. pjevačica	3. pjevačica
1	Antonija	Ivana	
2	Antonija	Ivana	
3	Antonija	Ivana	
4	Antonija	Ivana	
5	Antonija	Ivana	
6	Antonija		
7	Antonija		
8	Antonija		
9	Korina	Lucija	Mirela
10	Korina	Lucija	Mirela
11	Korina	Lucija	Mirela

Pretpostavimo da su Korina i Lucija otpjevale po 7 pjesama, a Mirela 6. Ako su pjesme 6, 7 i 8 otpjevale Antonija, Korina i Lucija, tada Korini i Luciji nedostaje po jedna pjesma. Ako su pjesme 1 i 2 otpjevale Antonija, Ivana i Korina ili Lucija, tada je Mirela morala otpjevati pjesme 3, 4 i 5 čime su zadovoljeni svi uvjeti.

pjesma	1. pjevačica	2. pjevačica	3. pjevačica
1	Antonija	Ivana	Korina
2	Antonija	Ivana	Lucija
3	Antonija	Ivana	Mirela
4	Antonija	Ivana	Mirela
5	Antonija	Ivana	Mirela
6	Antonija	Korina	Lucija
7	Antonija	Korina	Lucija
8	Antonija	Korina	Lucija
9	Korina	Lucija	Mirela
10	Korina	Lucija	Mirela
11	Korina	Lucija	Mirela

Ovo je samo jedan od mogućih rasporeda za koji su zadovoljeni svi uvjeti. Zaključujemo da je na koncertu otpjevano ukupno 11 pjesama.

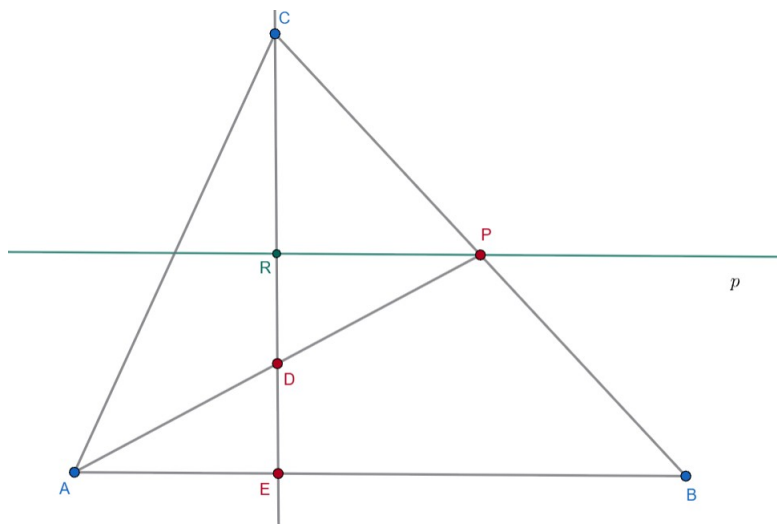
Zadatak J-4.5. [30 bodova]

U trokutu ABC točka P je polovište stranice $\overline{BC}$, a točka D je polovište težišnice $\overline{AP}$. Pravac CD siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E .

U kojem omjeru točka E dijeli stranicu $\overline{AB}$?

Rješenje.

Nacrtajmo skicu te na njoj nacrtamo pravac p , takav da je $P \in p$ i $p \parallel AB$.



Pravac p siječe dužinu $\overline{CE}$ u točki R , a to znači da je $\overline{PR}$ srednjica trokuta BCE . Slijedi da je $|BE| = 2|PR|$.

Nadalje, $|AD| = |PD|$ jer je D polovište od $\overline{AP}$. Također, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle PDR$ jer su to vršni kutovi i $\sphericalangle EAD = \sphericalangle RPD$ jer su to šiljasti kutovi uz presječnicu AP .

Zaključujemo da je trokut AED sukladan trokutu DPR pa posebno slijedi $|AE| = |PR|$. Od ranije imamo da je $|BE| = 2|PR|$ pa sada slijedi $|BE| = 2|AE|$, odnosno točka E dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru $1 : 2$.

Zadatak J-4.6. [35 bodova]

Uoči Valentinova, cvjećar Vlatko ima pune ruke posla i treba brzo sastavljati bukete. Na raspolaganju ima 4 vrste cvijeća: ruže, tulipane, karanfile i ljiljane. Planira sastaviti bukete od po 11 cvjetova.

Koliko različitih vrsta buketa Vlatko može sastaviti ako

- nije nužno staviti svaku vrstu cvijeća u buket,
- barem 1 cvijet svake vrste mora biti u buketu?

Vrste buketa se međusobno razlikuju po broju cvjetova pojedine vrste. Primjerice, jedna vrsta buketa sadrži 2 ruže, 5 tulipana i 4 ljiljana (bez karanfila), a druga vrsta sadrži 1 ružu, 5 tulipana, 2 ljiljana i 3 karanfila.

Pretpostavljamo da Vlatko ima dovoljno cvijeća svake vrste za sve bukete koje će napraviti.

Rješenje.

Ovaj zadatak je primjena **metode štapića i kuglica** te možemo izraziti ekvivalentni zadatak: Na koliko načina možemo 11 različitih kuglica podijeliti u 4 skupine tako da:

- nije nužno da se u svakoj skupini nalazi kuglica,
- barem 1 kuglica mora biti u svakoj skupini?

Zamislamo da kuglice dijelimo u skupine tako da ih razdvojimo štapićima. Za stvoriti četiri skupine nam trebaju tri štapića. Slijedi jedan primjer kako to možemo napraviti:

• • | • • • | • • • • | • •

Za naš zadatak bi to značilo da se u buketu nalaze 2 ruže, 3 tulipana, 4 karanfila i 2 ljiljana.

Promatramo sada posebno svaki podzadatak.

a) U ovom dijelu zadatka moguća je sljedeća situacija:



Ovo konkretno znači da je moguće da imamo 5 ruža, nijedan tulipan, 4 karanfila i 2 ljiljana. S obzirom da tako možemo postaviti kuglice i štapiće na bilo koja mjesta, zaključujemo da imamo 14 pozicija za 14 predmeta pa prvi štapić možemo postaviti 14 načina, drugi štapić na 13 načina, a treći na 12 načina. Ukupno je to $14 \cdot 13 \cdot 12$ načina.

Ipak, budući da štapiće ne razlikujemo, taj umnožak treba podijeliti sa brojem mogućih međusobnih razmještaja tih štapića, a budući da imamo 3 štapića, njih možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1$ načina. Dakle, broj mogućih buketa u a) zadatku je

$$\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364.$$

b) Budući da u svakoj skupini mora biti barem jedna kuglica, ne smijemo postavljati štapiće jedan za drugim, kao ni na početak ili kraj niza. To znači da ih možemo smještati između 11 kuglica za što imamo 10 mogućnosti. Dakle, prvi štapić možemo postaviti na 10 načina, drugi na 9, a treći na 8, no opet, budući da štapiće ne razlikujemo, trebamo podijeliti umnožak $10 \cdot 9 \cdot 8$ sa brojem međusobnih razmještaja tih štapića, a to je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Dakle, broj mogućih buketa u b) zadatku je

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Napomena: Ekvivalentan zadatak bi bio odrediti broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

gdje su:

- a) x_1, x_2, x_3 i x_4 nenegativni cijeli brojevi,
- b) x_1, x_2, x_3 i x_4 prirodni brojevi.

Zadatak J-4.7. [40 bodova]

Koliko prirodnih brojeva dijeli barem jedan od brojeva 10^{60} , 20^{50} i 30^{40} ?

Rješenje.

Neka je A skup svih djelitelja broja 10^{60} , B skup svih djelitelja broja 20^{50} i C skup svih djelitelja broja 30^{40} .

Promatrajmo elemente iz skupa A . Budući da je $10^{60} = 2^{60} \cdot 5^{60}$, svi elementi skupa A su oblika $2^k \cdot 5^l$, gdje su k i l nenegativni cijeli brojevi manji ili jednaki od 60. Te k i l možemo odabrati svaki na 61 način (jer k i l mogu biti i 0) pa je ukupan broj djelitelja broja 10^{60} jednak 61^2 . Pišemo: $|A| = 61^2$.

Sada promatrajmo skup B . Broj 20^{50} rastavljamo na proste faktore tako da je $20^{50} = (2^2)^{50} \cdot 5^{50} = 2^{100} \cdot 5^{50}$. Elementi skupa B su oblika $2^k \cdot 5^l$, gdje je k nenegativni cijeli broj manji ili jednak od 100, a l nenegativni cijeli broj manji ili jednak od 50. Broj k možemo odabrati na 101 način, a l na 51 način pa je $|B| = 101 \cdot 51$.

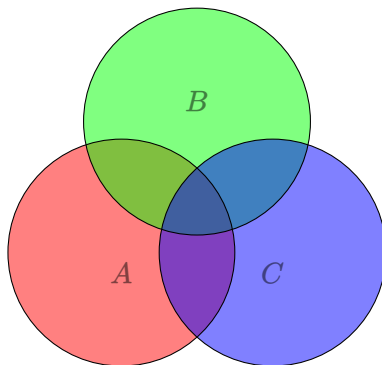
Zbog $30^{40} = 2^{40} \cdot 3^{40} \cdot 5^{40}$, elementi skupa C su oblika $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, gdje su k, l i m nenegativni cijeli brojevi manji ili jednaki od 40 pa je $|C| = 41^3$.

Nas zanima koliko prirodnih brojeva dijeli barem jedan od zadanih brojeva, dakle tražimo broj elemenata skupa $A \cup B \cup C$. To ćemo naći tako da iskoristimo **formulu uključivanja i isključivanja**.

Formula uključivanja i isključivanja za tri skupa:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Ona intuitivno proizlazi iz Vennovih dijagrama koji prikazuju tri skupa. Kada zbrojimo broj elemenata iz A , B i C , time smo elemente presjeka $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap C$ prebrojili dva puta pa ih jednom oduzmemo, a kako broj elemenata presjeka $A \cap B \cap C$ najprije tri puta zbrojili, a zatim tri puta oduzeli, potrebno je još jednom dodati $|A \cap B \cap C|$.



Odredimo prvo $|A \cap B|$. Elementi skupa $A \cap B$ u svom rastavu na proste faktore smiju imati samo 2 i 5 pri čemu faktora 2 smije biti najviše 60 (zbog oblika brojeva iz A), faktora 5 najviše 50 (zbog oblika brojeva iz B). Zbog toga je $|A \cap B| = 61 \cdot 51$.

Slično zaključujemo za $|B \cap C|$. Smijemo imati najviše 40 faktora 2 i 40 faktora 5 pa je $|B \cap C| = 41^2$.

Također je na sličan način $|A \cap C| = 41^2$ i $|A \cap B \cap C| = 41^2$.

Prema formuli uključivanja i isključivanja konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 61^2 + 101 \cdot 51 + 41^3 - 61 \cdot 51 - 41^2 - 41^2 + 41^2 \\ &= \boxed{73001} \end{aligned}$$

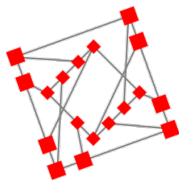
Zadatak J-4.8. [45 bodova]

U šiljastokutnom trokutu ABC mjera kuta $\sphericalangle BAC$ iznosi 45° . Neka je O središte opisane kružnice trokutu ABC , a H njegov ortocentar. Neka je točka D nožište visine iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$. Neka je X polovište luka $\widehat{AH}$ kružnice opisane trokutu AHD koji sadrži D .

Dokaži da je $|DX| = |DO|$.

Rješenje.

Skica:



MEDO 2025./2026.

Četvrto kolo

14.2.2026.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Loomen

Zadaci i rješenja

Zadatak S-4.1. [10 bodova]

U jednoj džungli živi nekoliko orangutana. Svaka dva orangutana su prijatelji ili su neprijatelji. Svaki orangutan ima točno tri neprijatelja. Orangutani se drže pravila: „Neprijatelj mog prijatelja je i moj neprijatelj“.

Koliko orangutana živi u toj džungli?

Rješenje.

Neka n orangutana živi u džungli. Tvrdimo da su rješenja $n = 4$ i $n = 6$.

Neka su A, B dva orangutana koji su prijatelji te neka je C neprijatelj od A . Tada je po pravilu i C neprijatelj od B . Ista tvrdnja vrijedi ako i zamijenimo uloge A i B , tj. svi orangutani koji su međusobno prijatelji imaju iste neprijatelje.

Stoga, kako svaki orangutan ima točno 3 neprijatelja, svaki orangutan ima najviše 2 prijatelja, odnosno, svaki orangutan može imati veze s najviše 5 drugih pa je $n \leq 6$. (te je očito $n \geq 4$ jer imamo barem jednog orangutana s njegova 3 neprijatelja)

Za $n = 4$ imamo da su svi međusobno neprijatelji.

Za $n = 5$ bi značilo da svaki orangutan ima samo jednog prijatelja, ali kada bismo ih pokušali grupirati imali bismo dvije grupe od 2 prijatelja te zadnji orangutan ne bi imao prijatelja.

Za $n = 6$ imamo po dvije grupe od 3 prijatelja.

Zadatak S-4.2. [15 bodova]

Riješi sustav jednadžbi:

$$\frac{5xy}{x+y} = 12, \quad \frac{5yz}{y+z} = 18, \quad \frac{5zx}{z+x} = 36.$$

Rješenje.

Jasno je da su x, y i z različiti od 0. Stoga možemo promatrati recipročne vrijednosti svake jednadžbe:

$$\frac{x+y}{5xy} = \frac{1}{12}, \quad \frac{y+z}{5yz} = \frac{1}{18}, \quad \frac{x+z}{5xz} = \frac{1}{36}.$$

Uvedemo li supstituciju $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, dobivamo sustav

$$a+b = \frac{5}{12}, \quad b+c = \frac{5}{18}, \quad a+c = \frac{5}{36}$$

Zbrajanjem svih jednadžbi imamo $2(a+b+c) = \frac{10}{12}$, odakle dobijemo $a+b+c = \frac{5}{12}$.

S obzirom da je $a + b = a + b + c$, slijedi da je $c = 0$. To međutim ne može vrijediti jer je $c = \frac{1}{z}$. Stoga sustav nema rješenja.

Napomena. Ako u brojniku treće jednadžbe umjesto 5 napišemo 13, sustav ima lijepa rješenja. Nikad nećemo znati je li to možda trebalo pisati u zadatku ...

Zadatak S-4.3. [20 bodova]

Odredi sve proste brojeve p i q takve da p dijeli $q^2 - 4$ i q dijeli $p^2 - 1$.

Rješenje.

Pretpostavimo najprije da je $p \leq q$, tada je $q > p - 1$ pa iz $q \mid (p - 1)(p + 1)$ znamo da je $q = p + 1$ pa su jedini prosti p, q ovdje $(2, 3)$, ali uvrštavanjem vidimo da to ne vrijedi jer 2 ne dijeli $3^2 - 4$.

Sada neka je $p > q$, tada je $p > q - 2$ pa iz $p \mid (q - 2)(q + 2)$ slijedi $q - 2 = 0$ ili $p = q + 2$. U prvom slučaju vidimo da vrijedi bilo koji $p > 2$, a u drugom slučaju imamo da $q \mid (q + 2)^2 - 1$ odnosno $q \mid 3$ pa je u tom slučaju rješenje $(5, 3)$.

Sva rješenja za (p, q) su $(5, 3), (p, 2)$ za $p > 2$.

Zadatak S-4.4. [25 bodova]

Neka je ABC jednakokračan trokut u kojem je $|AB| = |AC|$. Tangenta na opisanu kružnicu k trokuta ABC , paralelna s $\overline{BC}$, dodiruje kružnicu k u točki E , gdje je $E \neq A$, i siječe pravac AB u točki D .

Neka je F presjek dužine $\overline{CD}$ s kružnicom k . Ako je F središte upisane kružnice trokuta BDE , odredi kutove trokuta ABC .

Rješenje.

Napomena. Konfiguracija iz uvjeta zadatka je nemoguća: točka F ne može biti središte upisane kružnice trokuta BDE . Stoga se zadatak proglašava nevažecim i svi natjecatelji na njemu ostvaruju sve bodove. U nastavku je rješenje koje bi bilo ispravno kad bi konfiguracija bila moguća.

Nazovimo $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle CBA = \beta$. Kako su BC i DE paralelni, vrijedi $\sphericalangle EDB = \beta$.

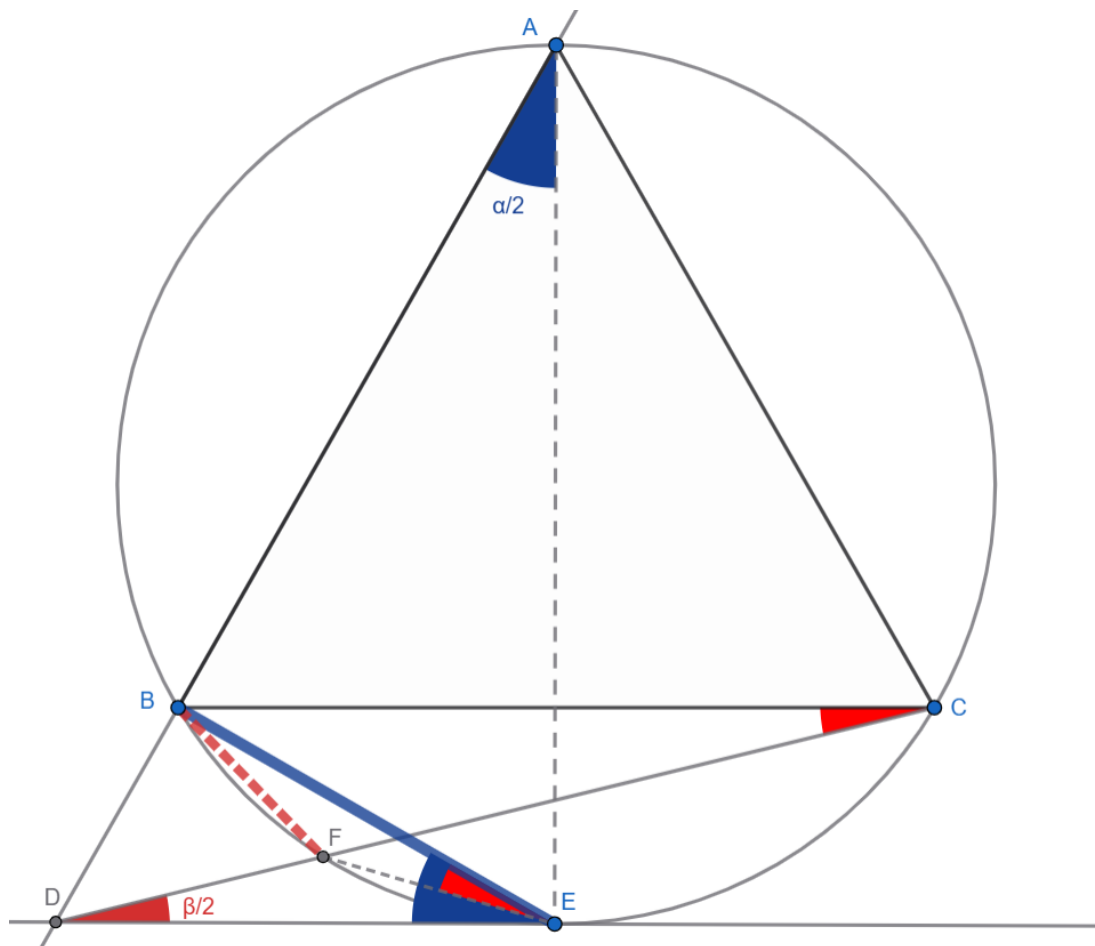
Kako je trokut ABC jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$, jasno je da je pravac AE simetrala kuta $\sphericalangle BAC = \alpha$. Kut $\sphericalangle BED$ je kut između tangente DE i tetive BE pa je jednak obodnom kutu nad tetivom BE , dakle $\sphericalangle BED = \frac{\alpha}{2}$ (prema poučku o kutu između tetive i tangente).

Kutovi $\sphericalangle BEF$ i $\sphericalangle BCF$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{BF}$, pa su jednaki. Kako je $BC \parallel DE$, vrijedi i $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BCF$, kao kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca.

Ako bi sada točka F bila središte upisane kružnice trokuta BDE , trebalo bi vrijediti

$$\frac{\beta}{2} = \sphericalangle EDF = \sphericalangle BCF = \sphericalangle BEF = \frac{\alpha}{4}.$$

Iz toga slijedi $\alpha = 2\beta$, iz čega proizlazi $\alpha = 90^\circ$ i $\beta = 45^\circ$. No, ponovno, ta situacija nije moguća jer središte upisane kružnice trokuta BDE **nije** na kružnici opisanoj trokutu ABC .



Zadatak S-4.5. [30 bodova]

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je broj $n^2 + 2^n$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

Neka je k prirodan broj tak da je $n^2 + 2^n = k^2$.

Prebacivanjem n^2 na drugu stranu i korištenjem formule za razliku kvadrata imamo da je

$$2^n = k^2 - n^2 = (k - n)(k + n).$$

Budući da je desna strana gornje jednakosti potencija broja 2 slijedi da svaki od faktora $(k - n)$ i $(k + n)$ također mora biti potencija broja 2, tj. postoje nenegativni cijeli brojevi a i b takvi da je $k - n = 2^a$ i $k + n = 2^b$.

Kako je $k + n > k - n$ slijedi da je $b > a$. Time sada redom imamo da je

$$k - n = 2^a \mid 2^b = k + n.$$

Kako $k - n \mid k + n$ imamo da također vrijedi i

$$k - n \mid (k + n) - (k - n) = 2n$$

iz čega slijedi da mora biti $k - n \leq 2n$, odnosno da je $k \leq 3n$.

Korištenjem nejednakosti $k \leq 3n$ u početnoj jednadžbi redom imamo

$$n^2 + 2^n = k^2 \leq 9n^2$$

$$2^n \leq 8n^2$$

$$2^{n-3} \leq n^2.$$

Uočimo da za $n = 10$ imamo $2^7 = 128 > 100 = 10^2$.

Nadalje, 2^{n-3} je eksponencijalna funkcija što brže raste od funkcije n^2 koja je kvadratna funkcija. Zato imamo da za $n \geq 10$ vrijedi $2^{n-3} > n^2$.

Dakle, $n \geq 10$ sigurno nije rješenje zadatka pa nam preostaje još provjeriti brojeve $n \leq 9$.

Direktnom provjerom vidimo da jedino za $n = 6$ dobijemo da je $n^2 + 2^n$ kvadrat prirodnog broja.

Dakle, jedini rješenje zadatka je $n = 6$.

Zadatak S-4.6. [35 bodova]

Neka je $P(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima, stupnja $n \geq 5$ i s pozitivnim vodećim koeficijentom takav da je $P(0) = 0$ te da ima točno n različitih cjelobrojnih nultočaka.

Dokaži da su sve cjelobrojne nultočke polinoma $P(P(x))$ ujedno i nultočke polinoma $P(x)$.

Rješenje.

Iz $P(0) = 0$ imamo da je 0 jedna od nultočki polinoma $P(x)$. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ preostale cjelobrojne nultočke polinoma $P(x)$.

Polinom $P(x)$ sada možemo zapisati kao

$$P(x) = ax(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})$$

pri čemu je a vodeći koeficijent polinoma $P(x)$.

Uvrštavanjem $P(x)$ umjesto x u prethodnu jednakost slijedi da je

$$P(P(x)) = aP(x)(P(x) - x_1)(P(x) - x_2) \cdots (P(x) - x_{n-1}).$$

Iz gornjeg slijedi da su sve nultočke polinoma $P(x)$ ujedno i nultočke polinoma $P(P(x))$.

Pretpostavimo da postoji cjelobrojna nultočka y polinoma $P(P(x))$ koja nije nultočka od $P(x)$, tj. $y \neq 0, x_1, \dots, x_{n-1}$.

Kako je $P(P(y)) = 0$ i $P(y) \neq 0$ slijedi da je $P(y) = x_i$ za neki $i = 1, \dots, n-1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $i = 1$, odnosno da je $P(y) = x_1$.

Iz zapisa polinoma $P(x)$ preko njegovih nultočaka tada imamo da vrijedi

$$ay(y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_{n-1}) = x_1.$$

Kako su $y, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ međusobno različiti cijeli brojevi i $n \geq 5$ imamo da je

$$|(y - x_2)(y - x_3)(y - x_4) \cdots (y - x_{n-1})| \geq |(-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdots (y - x_{n-1})| \geq 2.$$

Prema tome imamo da je

$$|x_1| \geq a \cdot 2|y(y - x_1)|.$$

Budući da je $y \neq 0, x_1$ primjenom nejednakosti $mn \geq m + n - 1$ koja vrijedi za sve prirodne brojeve m i n redom dobivamo

$$|x_1| \geq 2a|y| \cdot |y - x_1| \geq 2(|y| + |y - x_1| - 1) \geq 2(|x_1| - 1).$$

Iz gornjeg slijedi da mora biti $|x_1| \leq 2$.

Imamo da je $x_1 \neq 0$. Nadalje, kako je

$$x_1 = ay(y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_{n-1})$$

i $y, y - x_1, \dots, y - x_{n-1}$ je $n \geq 5$ međusobno različitih cijelih brojeva slijedi da $x_1 \neq \pm 1, \pm 2$. Kontradikcija!

Dakle, sve cjelobrojne nultočke polinoma $P(P(x))$ su ujedno i nultočke polinoma $P(x)$ što smo i trebali dokazati.

Zadatak S-4.7. [40 bodova]

Medvjedica Lina i medo Lino igraju sljedeću igru na školskoj ploči. Prvo Lina napiše konačno mnogo različitih prirodnih brojeva na ploču. Nakon toga Lino može raditi sljedeće poteze s brojevima koji se trenutno nalaze na ploči:

- (i) može zamijeniti bilo koji par brojeva n i $n + 1$ na ploči brojem $n - 2$
- (ii) može zamijeniti bilo koji par brojeva n i $n + 4$ brojem $n - 1$.

Lino može raditi gornje poteze koliko god puta želi (i može). Tijekom igre na ploči se mogu pojaviti negativni brojevi te se brojevi na ploči mogu ponavljati.

Postoji li najmanji broj koji Lina i Lino mogu dobiti na ploči igranjem ove igre? Ako postoji, odredi ga.

Rješenje.

Odgovor: Najmanji broj koji Lina i Lino mogu postići je broj -3 .

Pokažimo da se broj -3 može postići.

Lina na ploču može zapisati brojeve 1, 2, 3, 4 i 5.

Lino u prvom koraku može primjeniti potez (i) na brojeve 4 i 5. Time se nakon toga na ploči nalaze brojevi 1, 2, 3 i 2. Nakon toga Lino može ponovo primjeniti potez (i) na brojeve 2 i 4. Nakon toga se na ploči redom nalaze brojevi 1, 2, 0. Ponovno primjenom poteza (i) na brojeve 1 i 2 na ploči ostanu brojevi -1 i 0. Konačno, primjenom poteza (i) na preostale brojeve Lino dobiva broj -3 .

Dokažimo sada da se na ploči nikad ne može pojaviti broj manji od -3 .

Neka je L konačan skup brojeva koje je Lina napisala na ploču.

Odredit ćemo realan broj x za koji ćemo moći svakom broj $k \in L$ pridružiti težinu x^k tako da se ukupna težina $\sum_{n \in L} x^n$ svih brojeva na ploči ne promijeni nakon što Lino napravi potez (i) ili (ii).

Potezom (i) ukupna težina na ploči se promijeni za $x^{n-2} - x^n - x^{n+1}$ za neki $n \in L$. pa želimo da za naš broj x vrijedi

$$\begin{aligned}x^{n-2} - x^n - x^{n+1} &= 0, \\1 - x^2 - x^3 &= 0.\end{aligned}$$

Promotrimo polinom $P(t) = t^3 + t^2 - 1$. Iz gornjeg imamo da naš broj x mora biti nultočka polinoma $P(t)$. Kako je $P(0) = -1$ i $P(1) = 1$ slijedi da postoji nultočka polinoma $P(t)$ u intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Stavimo da je naš broj x upravo ta nultočka polinoma $P(t)$.

Promotrimo još promjenu težina nakon poteza (ii). Neka je Lino napravio potez na brojevima n i $n + 4$. Tada imamo da je promjena u težinama upravo

$$x^{n-1} - x^n - x^{n+4} = x^{n-1}(1 - x - x^5) = x^{n-1}(x^2 - x + 1)(1 - x^2 - x^3) = 0$$

što smo i htjeli postići.

Dakle, ovako definiranim brojem x zaista možemo postići da se ukupna težina $\sum_{n \in L} x^n$ ne mijenja nakon što se napravi neki od mogućih poteza.

Uočimo sada da za ukupnu težinu svih brojeva na ploči vrijedi

$$\sum_{n \in L} x^n < \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = x^{-4}.$$

Pretpostavimo da se u nekom trenutku na ploči nalazi broj $k \leq -4$. Kako je $0 < x < 1$ i kako je ukupna težina svih brojeva na ploči očuvana slijedi

$$\sum_{n \in L} x^n \geq x^k \geq x^{-4}$$

što dovodi do kontradikcije s prethodnom nejednakosti $\sum_{n \in L} x^n < x^{-4}$.

Time smo pokazali da se na ploči ne mogu pojaviti brojevi manji od -3 .

Dakle, -3 je zaista najmanji broj kojeg Lina i Lino mogu postići.

Zadatak S-4.8. [45 bodova]

Četverokutu $ABCD$ upisana je kružnica k . Neka je točka O sjecište pravaca AB i CD . Neka je k_1 kružnica koja dira stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, a k_2 kružnica koja dira stranicu $\overline{AD}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Neka je K točka u kojoj k_1 dira $\overline{BC}$ i L točka u kojoj k_2 dira $\overline{AD}$.

Pretpostavimo da se točke O , K i L nalaze na istom pravcu. Dokaži da se tada polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ te središte kružnice k također nalaze na istom pravcu.

Rješenje.

Dokažimo najprije sljedeću tvrdnju.

Lema: Neka je I središte upisane kružnice k trokuta ABC , a I_A središte pripisane kružnice trokuta ABC nasuprot vrha A . Kružnice k i k_A redom diraju stranicu $\overline{BC}$ u točkama D i E . Neka je točka M polovište stranice $\overline{BC}$. Tada vrijedi:

- (i) Pravci MI i AE su paralelni.
- (ii) Pravci MI_A i AD su paralelni.



- Tvrdnja očito vrijedi ako je $b = c$ jer se u tom slučaju sve točke nalaze na istom pravcu. Zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b < c$. U tom slučaju imamo da se točka E nalazi između točaka B i M , a točka D između točaka M i C .

Da bi dokazali da su pravci MI i AE paralelni dovoljno nam je dokazati da su trokuti MDI i EA_1A slični.

Budući da su oba trokuta pravokutna za dokazati gornju sličnost nam je dovoljno pokazati da vrijedi omjer

$$\frac{|ID|}{|AA_1|} = \frac{|DM|}{|A_1E|}.$$

Imamo da je

$$\frac{|ID|}{|AA_1|} = \frac{r}{v_a}.$$

Izračunajmo duljine dužina $\overline{DM}$ i $\overline{A_1E}$.

Redom imamo

$$|DM| = |CM| - |CD| = \frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-b}{2}.$$

Iz trigonometrije pravokutnog trokuta AA_1C i kosinusovog poučka u trokutu ABC redom imamo

$$|A_1C| = b \cos \gamma = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Tim sada možemo izračunati duljinu dužine $\overline{A_1E}$

$$|A_1E| = |CE| - |A_1C| = \frac{a+c-b}{2} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} = \frac{(c-b)(a+b+c)}{2a}.$$

Konačno imamo da je

$$\frac{|DM|}{|A_1E|} = \frac{a}{a+b+c}.$$

Dakle, dovoljno nam je dokazati da vrijedi

$$\frac{r}{v_a} = \frac{a}{a+b+c},$$

odnosno da vrijedi

$$av_a = r(a+b+c).$$

Međutim, iz formule za površinu trokuta ABC i radijus upisane kružnice r trokuta ABC imamo da vrijedi

$$av_a = 2P(ABC) = r(a+b+c).$$

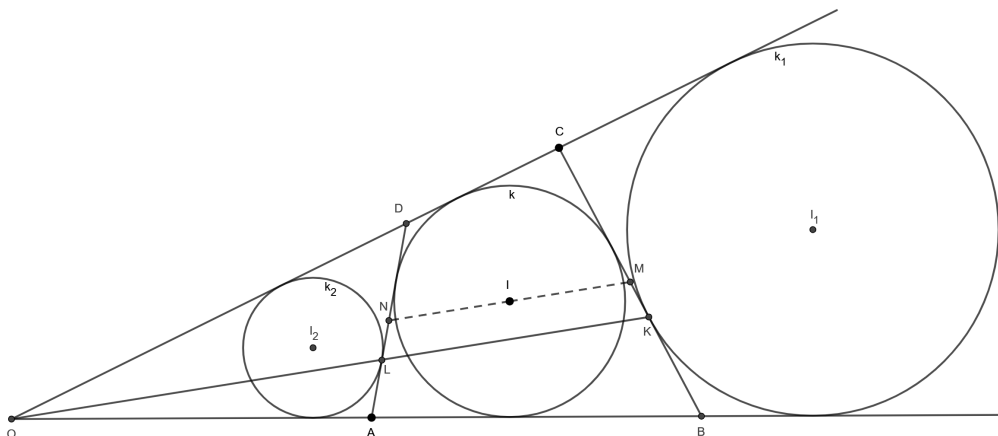
Dakle, trokuti MDI i EA_1A su zaista slični te time slijedi da su pravci MI i AE paralelni.

- (ii) Analognim računom kao u (i) se dokaže da su trokuti MEI_A i DA_1A slični iz čega slijedi da su pravci MI_A i AD paralelni.

Vratimo se sada na početni zadatak.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se točka O nalazi na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha A , a na produžetku stranice $\overline{CD}$ preko vrha D .

Neka su I , I_1 i I_2 redom središta kružnica k , k_1 i k_2 te neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.



Uočimo da je k_2 upisana kružnica trokuta OAD , a k pripisana kružnica trokuta OAD nasuprot vrha O .

Primjenom Leme na trokut OAD iz tvrdnja (ii) zaključujemo da su pravci IN i OL paralelni.

Nadalje, k je upisana kružnica trokuta OBC , a k_1 je pripisana kružnica trokuta OBC nasuprot vrha O .

Ponovnom primjenom Leme na trokut OBC iz tvrdnje (i) dobivamo da su pravci IM i OK paralelni.

Budući da se točke O , K i L nalaze na istom pravcu iz prethodnih paralelnosti slijedi da su pravci IM i IN međusobno paralelni.

Međutim, kako pravci IM i IN imaju zajedničku točku I te su međusobno paralelni slijedi da je zapravo riječ o istim pravcima, tj. točke I , M i N se nalaze na istom pravcu što smo i trebali dokazati.