

MEDO 2024./2025.

Treće kolo

4.1.2025.

Loomen

Zadaci

Juniori

Zadatak J-3.1. [10 bodova]

Odredi najmanji prirodan broj n takav da je umnožak prvih n prirodnih brojeva višekratnik broja 2025.

Zadatak J-3.2. [20 bodova]

Na stolu su dvije čaše u kojima se nalazi sok od naranče. U prvoj čaši nalazi se pet puta manje soka nego u drugoj čaši. U prvoj čaši udio voća u soku iznosi 85%, dok u drugoj čaši iznosi 60%. Ako prelijemo polovicu soka iz druge čaše u prvu, koliki će udio voća biti u soku u prvoj čaši?

Zadatak J-3.3. [30 bodova]

Izračunaj zbroj svih znamenki prvih 2025 prirodnih brojeva.

Zadatak J-3.4. [40 bodova]

Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC nacrtani su kvadrati $ACDE$ i $BGFC$ (s vanjske strane trokuta). Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Dokaži da je duljina dužine $\overline{DF}$ dva puta dulja od duljine dužine $\overline{CP}$.

Zadatak J-3.5. [50 bodova]

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) takve da vrijedi $a \geq b \geq c$ i koje zadovoljavaju sljedeće dvije jednačbe:

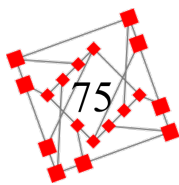
$$(a - b)(b - c) = 25(a - c)$$
$$a + b + c = 2025.$$

Zadatak J-3.6. [60 bodova]

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC . Ako vrijedi $|AC| + |AI| = |BC|$, dokaži da vrijedi $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle CBA$.

Zadatak J-3.7. [70 bodova]

U nekoj dalekoj zemlji, matematička edukativna olimpijada sastoji se od 22 kola. Na svakom kolu 5 najbolje plasiranih natjecatelja dobije čokoladu. Analizom rezultata ustanovljeno je da za svaka dva kola postoji točno jedan natjecatelj koji je dobio čokoladu na oba promatrana kola. Dokaži da postoji natjecatelj koji je dobio čokoladu na svakom kolu.



MEDO 2024./2025.

Treće kolo

4.1.2025.

Zadaci

Loomen

Seniori

Zadatak S-3.1. [10 bodova]

Opseg pravokutnog trokuta iznosi 101, a zbroj kvadrata duljina njegovih stranica iznosi 4050. Kolika je površina tog trokuta?

Zadatak S-3.2. [20 bodova]

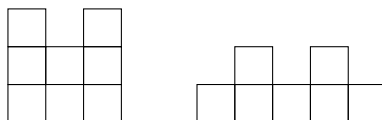
Neka je m prirodan broj. Za prirodan broj n kažemo da je m -složen ako se može zapisati kao umnožak točno m prirodnih brojeva većih od 1 (ne nužno različitih). Dokaži da je broj

$$(2025^4 - 1^4)(2025^4 - 2^4) \cdots (2025^4 - 2024^4)$$

- (a) 6000-složen;
- (b) 10000-složen.

Zadatak S-3.3. [30 bodova]

Na raspolaganju imamo neograničeni broj pločica sa slike. Je li moguće potpuno prekriti (bez preklapanja) ploču dimenzija 777×777 koristeći ove pločice? Dozvoljene su rotacije pločica.



Zadatak S-3.4. [40 bodova]

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC . Ako vrijedi $|AC| + |AI| = |BC|$, dokaži da vrijedi $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle CBA$.

Zadatak S-3.5. [50 bodova]

U nekoj dalekoj zemlji, matematička edukativna olimpijada sastoji se od 22 kola. Na svakom kolu 5 najbolje plasiranih natjecatelja dobije čokoladu. Analizom rezultata ustanovljeno je da za svaka dva kola postoji točno jedan natjecatelj koji je dobio čokoladu na oba promatrana kola. Dokaži da postoji natjecatelj koji je dobio čokoladu na svakom kolu.

Zadatak S-3.6. [60 bodova]

Za funkciju $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ kažemo da je *pseudopolinom* ako za svaka dva različita $a, b \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $a - b \mid f(a) - f(b)$. Odredi sve pseudopolinome f takve da za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $\{0, 1, 2, \dots, n\} = \{f(0), f(1), f(2), \dots, f(n)\}$.

Zadatak S-3.7. [70 bodova]

Zadan je prirodan broj d . Definiramo niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tako da je $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = n \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + d$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da postoji prirodan broj N takav da je niz $(a_n)_{n \geq N}$ aritmetički niz.