

MEDO 2024./2025.

Treće kolo

4.1.2025.

Loomen

Zadaci i rješenja

Juniori

Zadatak J-3.1. [10 bodova]

Odredi najmanji prirodan broj n takav da je umnožak prvih n prirodnih brojeva višekratnik broja 2025.

Prvo rješenje.

Zadatak se može riješiti direktnim računanjem umnožaka prvih nekoliko brojeva i određivanjem prvog umnoška koji je višekratnik broja 2025. Radi lakšeg zapisivanja, umnožak prvih n prirodnih brojeva označava se $n!$ i čita se *n-faktorijela*. Računamo:

$$\begin{aligned}1! &= 1 \\2! &= 1 \cdot 2 = 2 \\3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\5! &= 4! \cdot 5 = 120 \\6! &= 5! \cdot 6 = 720 \\7! &= 6! \cdot 7 = 5040 \\8! &= 7! \cdot 8 = 40320 \\9! &= 8! \cdot 9 = 362880 \\10! &= 9! \cdot 10 = 3628800.\end{aligned}$$

Dijeljenjem vidimo da je tek zadnji umnožak djeljiv s 2025, što znači da je 10 najmanji traženi broj prirodnih brojeva.

Drugo rješenje.

Efikasnija metoda je promatranje prostih faktora koji se pojavljuju u umnošku. Naime, ako želimo da je naš umnožak višekratnik od 2025, to znači da on mora sadržavati sve proste faktore od 2025 i to najmanje onoliko puta koliko se pojavljuju u rastavu broja 2025 na proste faktore.

Rastavimo stoga najprije broj 2025 na proste faktore. Vrijedi $2025 = 45^2$, pa lako dobijemo

$$2025 = 45^2 = (5 \cdot 9)^2 = 5^2 \cdot 9^2 = 5^2 \cdot (3^2)^2 = 5^2 \cdot 3^4.$$

Dakle, naš umnožak mora sadržavati dva faktora 5 i četiri faktora 3. Najmanji prirodni brojevi djeljivi s 5 su 5 i 10, pa zaključujemo da ćemo sigurno morati pomnožiti najmanje prvih 10 prirodnih brojeva.

Ostaje vidjeti što je s faktorom 3. Kako sigurno množimo prvih 10 prirodnih brojeva, u umnošku ćemo imati i brojeve 3, 6 i $9 = 3 \cdot 3$. Njihovim množenjem dobijemo 4 faktora 3, koliko nam je i potrebno. Dakle, množenjem prvih 10 prirodnih brojeva dobijamo višekratnik broja 2025.

Zadatak J-3.2. [20 bodova]

Na stolu su dvije čaše u kojima se nalazi sok od naranče. U prvoj čaši nalazi se pet puta manje soka nego u drugoj čaši. U prvoj čaši udio voća u soku iznosi 85%, dok u drugoj čaši iznosi 60%. Ako prelijemo polovicu soka iz druge čaše u prvu, koliki će udio voća biti u soku u prvoj čaši?

Rješenje.

Prisjetimo se da se udio neke tvari u nekoj otopini (ili smjesi) računa kao omjer

$$\text{udio} = \frac{\text{količina tvari}}{\text{količina otopine}}.$$

Većinom će nam biti lakše računati s količinom tvari, a ne s njenim udjelom.

Označimo s A količinu soka u prvoj čaši, a s B količinu soka u drugoj čaši. Iz uvjeta zadatka znamo da vrijedi $5A = B$. Udio voća u prvoj čaši je 85%. Količina voća u prvoj čaši dakle iznosi $85\% \cdot A = 0.85A$. Analogno, količina voća u drugoj čaši iznosi $60\% \cdot B = 0.6B$.

Preljevanjem polovice soka iz druge čaše se u prvu čašu doda količina voća od $\frac{1}{2} \cdot 0.6B = 0.3B$. Stoga je ukupna količina voća u prvoj čaši nakon preljevanja jednaka

$$0.85A + 0.3B = 0.85A + 0.3 \cdot 5A = 0.85A + 1.5A = 2.35A.$$

Poveća se i ukupna količina soka u prvoj čaši pa iznosi $A + 0.5B = A + 0.5 \cdot 5A = A + 2.5A = 3.5A$. Konačno, udio voća u soku u prvoj čaši nakon preljevanja iznosi

$$\frac{2.35A}{3.5A} = \frac{2.35}{3.5} = 0.6714 = 67.14\%.$$

Zadatak J-3.3. [30 bodova]

Izračunaj zbroj svih znamenki prvih 2025 prirodnih brojeva.

Rješenje.

Označimo sa S zbroj svih znamenki, tj. $S = 0 + 1 + 2 + \dots + 8 + 9$ (naravno, ovaj zbroj ostaje isti ako isključimo znamenku 0, što će nam poslije biti korisno). Ovaj zbroj lako računamo direktno ili zgodnije putem Gaussove dosjetke:

$$S = 0 + 1 + 2 + \dots + 8 + 9 = (0 + 9) + (1 + 8) + \dots + (4 + 5) = 5 \cdot 9 = 45.$$

Podijelimo brojeve čije znamenke zbrajamo u skupine prema broju znamenki. Za jednoznamenaste brojeve smo već odredili zbroj svih njihovih znamenki – to je upravo naš S . Važno je sad primijetiti što se događa kod dvoznamenkastih brojeva. Kod brojeva s istom prvom znamenkom, druga znamenka se mijenja od 0 do 9, pa je njihov zbroj ponovno S . Imamo 9 mogućih prvih znamenki (od 1 do 9), pa zbroj znamenki jedinica kod svih dvoznamenkastih brojeva iznosi $9 \cdot S$. Što se tiče znamenki desetica, svaka se pojavljuje u deset dvoznamenkastih brojeva, pa je njihov ukupni zbroj $10 \cdot S$. Ukupni zbroj svih znamenki kod dvoznamenkastih brojeva stoga iznosi $10S + 9S = 19S$.

Kod troznamenkastih brojeva imamo sličnu situaciju. Što se tiče znamenki jedinica, one se periodično ponavljaju i to za sve moguće izbore prvih dviju znamenki. Tih izbora ima 90 (od 10 do 99), pa je ukupni zbroj znamenki jedinica svih troznamenkastih brojeva jednak $90S$. Znamenke desetice se također periodično ponavljaju kako se mijenja znamenka stotica (9 različitih znamenki stotica), a za svaku znamenku stotica se ista znamenka desetice pojavljuju točno 10 puta, pa je ukupni zbroj znamenki desetica kod troznamenkastih brojeva jednak $9 \cdot 10S = 90S$. Što se tiče znamenki stotica, svaka se pojavi točno 100 puta, pa je ukupni zbroj znamenki stotica jednak $100S$. Ukupni zbroj svih znamenki troznamenkastih brojeva stoga iznosi $90S + 90S + 100S = 280S$.

Preostalo je još analizirati četveroznamenaste brojeve koji su uključeni u dani raspon, dakle brojevi od 1000 do 2025. Kod brojeva koji imaju znamenku tisućica jednaku 1, vrijedi da je ukupni zbroj svih

znamenki jedinica, desetica i stotica jednak ukupnom zbroju svih znamenki koje smo dosada zbrojili (za jednoznamenkaste, dvoznamenkaste i troznamenkaste brojeve). Doista, ako poistovjetimo jednoznamenkasti broj a sa zapisom $00a$ i analogno za dvoznamenkaste i troznamenkaste brojeve, vidimo da zbrajamo znamenke istih brojeva kao i prije. Dosadašnji ukupni zbroj iznosi $S + 19S + 280S = 300S$. Ovom zbroju trebamo sada pridodati 1000 znamenki 1 jer postoji točno 1000 četveroznamenkastih brojeva sa znamenkom tisućica jednakom 1.

Preostaje još pozbrojiti znamenke u 26 četveroznamenkastih brojeva čija prva znamenka je 2. Zbroj znamenki jedinica iznosi $2S + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 105$; zbroj znamenki desetica iznosi $10 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 22$; znamenka stotica je uvijek 0 pa je i zbroj 0; znamenka tisućica uvijek je 2 pa zbroj iznosi $26 \cdot 2 = 52$.

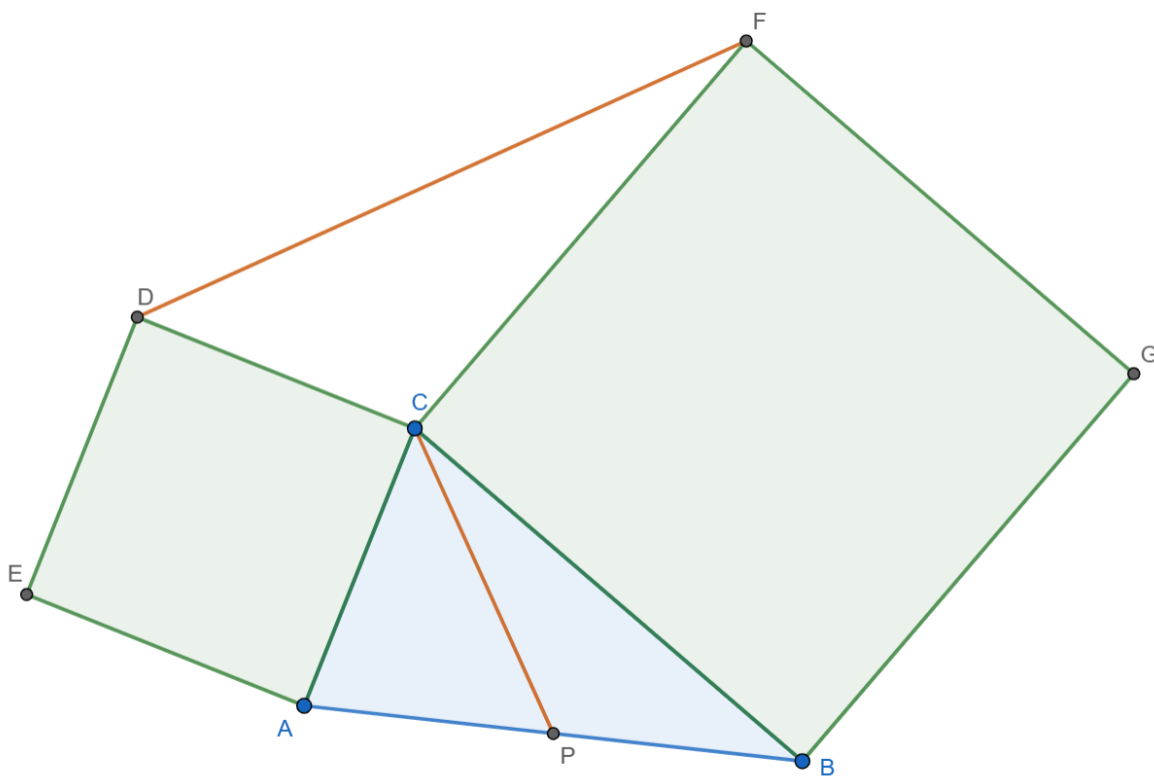
Konačno, zbroj svih znamenki prvih 2025 prirodnih brojeva iznosi:

$$300S + (300S + 1000) + (105 + 22 + 0 + 52) = 600S + 1179 = 600 \cdot 45 + 1179 = 28179.$$

Zadatak J-3.4. [40 bodova]

Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC nacrtani su kvadrati $ACDE$ i $BGFC$ (s vanjske strane trokuta). Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Dokaži da je duljina dužine $\overline{DF}$ dva puta dulja od duljine dužine $\overline{CP}$.

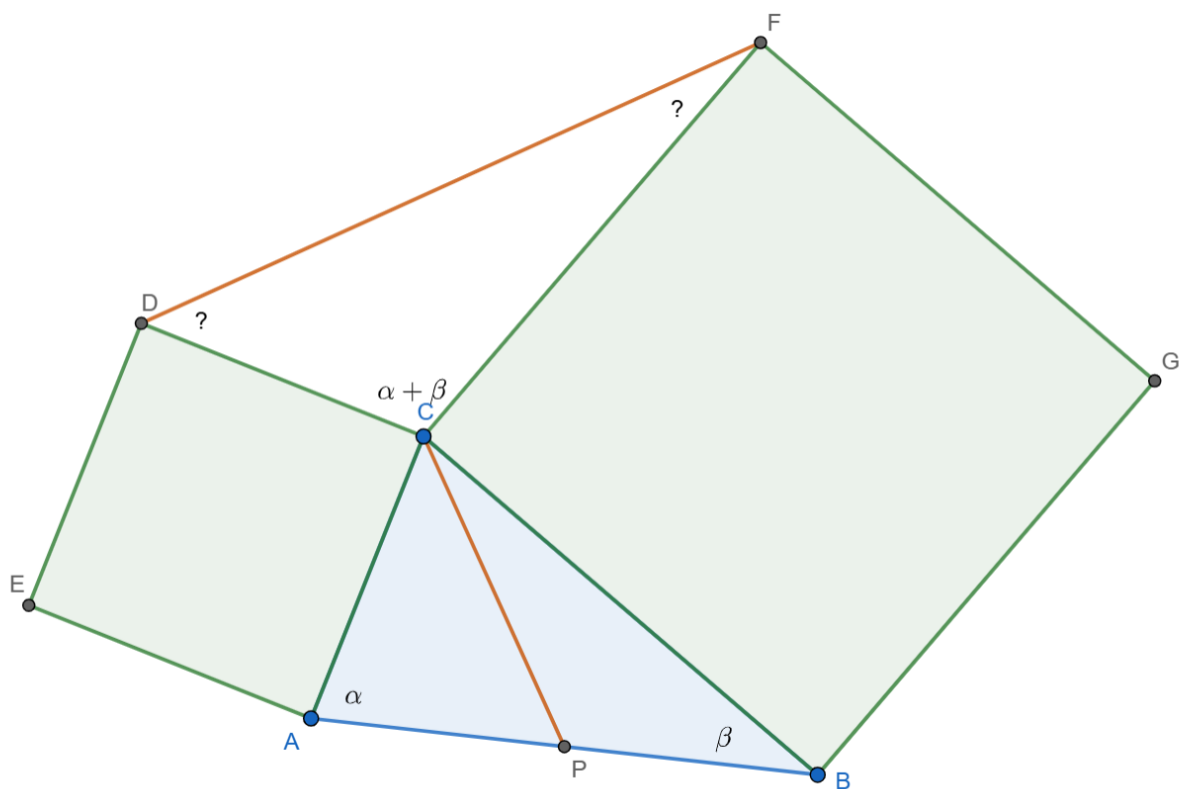
Rješenje.



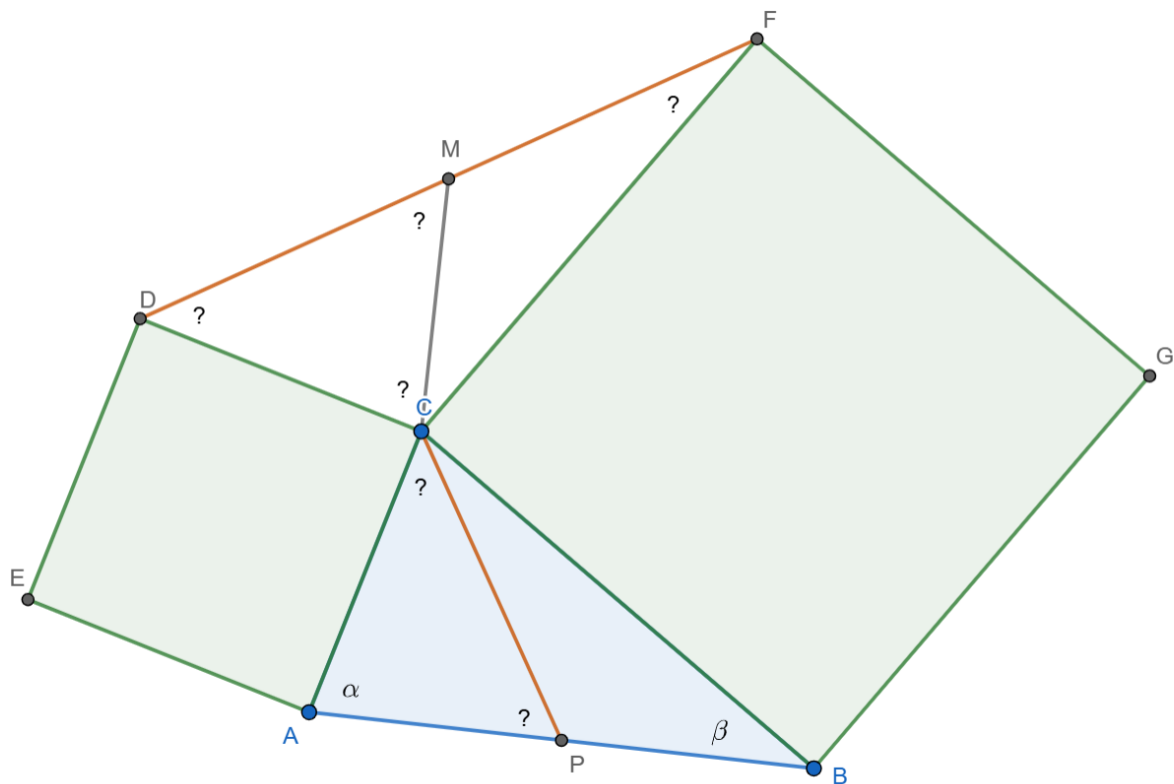
Prvi instinkt je vjerojatno računati kutove i pokušati nešto zaključiti iz toga. Ako označimo $\angle BAC = \alpha$ i $\angle CAB = \beta$ te $\angle ACB = \gamma$, znamo da vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Tada lako dobijemo

$$\angle FCD = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \gamma) = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta.$$

No nažalost, daljnje kuteve ne možemo lagano izračunati.



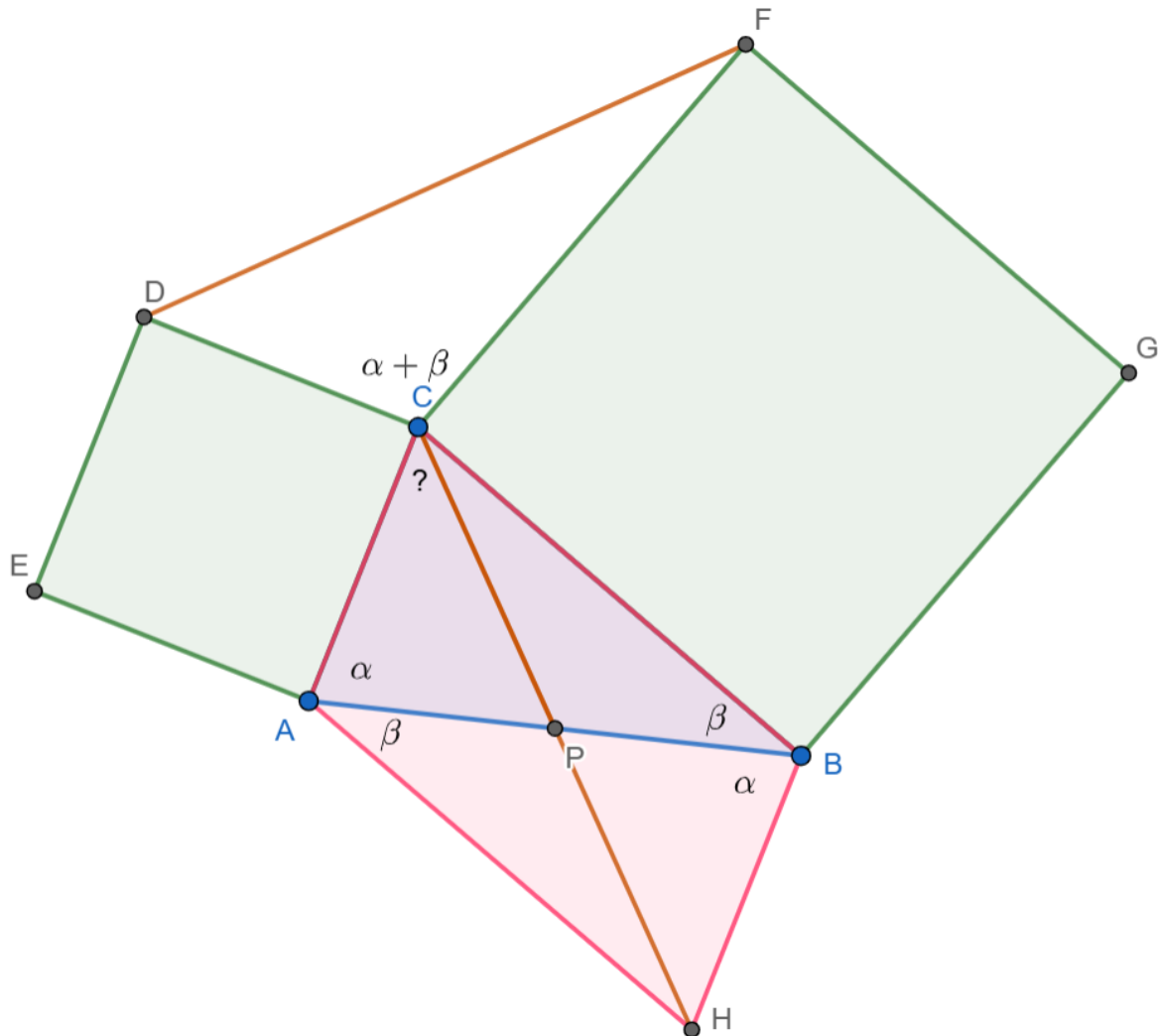
Želimo dokazati da vrijedi $|DF| = 2|CP|$. Stoga je jedna ideja uvesti polovište stranice $\overline{DF}$ kao novu točku M i nekako dokazati da vrijedi $|DM| = |CP|$, možda pomoću sukladnosti trokuta. No, ponovno imamo problem s određivanjem ključnih kutova.



Stoga moramo razmišljati u drugom smjeru, „izvan okvira”. Pogledajmo koja svojstva *težišnice trokuta* (dužine koja spaja vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice, u našem slučaju dužina $\overline{CP}$) možemo

iskoristiti. U trokutu DCF znamo da vrijedi $|DC| = |AC|$ i $|CF| = |BC|$ te $\angle FCD = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$. To je vrlo slično karakteristikama trokuta ABC . Iskoristit ćemo to u sljedećem docrtavanju.

Primijetimo da trokut ABC možemo shvatiti kao *polovicu paralelograma* kojeg dobijemo tako da povučemo paralele sa stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ u vrhovima A i B redom. Pogledajmo što tada dobijemo.



Najprije, zbog poučka o kutovima uz presječnicu paralelnih pravaca zaključujemo da vrijedi $\angle HAB = \beta$ i $\angle ABH = \alpha$. Dalje, kako se dijagonale u paralelogramu međusobno prepolovljavaju (ovo se vidi iz sukladnosti trokuta APC i BPH), znamo da je dijagonala $\overline{CH}$ zapravo produžetak težišnice $\overline{CP}$ i da je dvostruko dulja od nje.

Sada ostaje primijetiti da su trokuti DCF i CAH sukladni po SKS poučku: podudaraju se u duljinama parova stranica $\overline{DC}$ i $\overline{AC}$ te $\overline{CF}$ i $\overline{AH}$ te u kutu među njima $\angle FCD = \angle HAC = \alpha + \beta$. Stoga vrijedi $|DF| = |CH| = 2|CP|$, što smo htjeli pokazati.

Zadatak J-3.5. [50 bodova]

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) takve da vrijedi $a \geq b \geq c$ i koje zadovoljavaju sljedeće dvije jednačbe:

$$\begin{aligned}(a-b)(b-c) &= 25(a-c) \\ a+b+c &= 2025.\end{aligned}$$

Rješenje.

Ako krenemo direktno s razmnožavanjem prve jednačbe i uvrštavanjem vrijednosti iz jedne jednačbe

u drugu, vidimo da dolazimo do kvadratnih izraza s kojima ne možemo lagano baratati. Stoga je ideja pojednostaviti jednadžbe prije početka računanja. U tome će nam pomoći *supstitucija varijabli*.

Primijetimo da iz uvjeta zadatka znamo uređaj (poredak) među prirodnim brojevima a , b i c . Zaključujemo da postoje nenegativni cijeli brojevi x i y (dakle, $x, y \geq 0$) za koje vrijedi $b = c + x$ i $a = b + y = c + x + y$. Uvrštavanjem u početne jednadžbe dobijamo:

$$\begin{aligned} xy &= 25(x + y) \\ 3c + 2x + y &= 2025. \end{aligned}$$

Riješimo najprije „rubne” slučajeve $x = 0$ ili $y = 0$. Iz prve jednadžbe vidimo da je to zapravo jedan slučaj (čim je jedan od x ili y nula, takav mora biti i drugi). Tada iz druge jednadžbe dobijemo $c = \frac{2025}{3} = 675$, pa je jedna trojka koja zadovoljava sve uvjete zadatka $(675, 675, 675)$.

Riješimo sada diofantsku jednadžbu $xy = 25(x + y)$, s tim da znamo $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Napomenimo da je ova jednadžba ekvivalentna često viđenoj varijanti $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{25}$. Izrazimo varijablu y preko x :

$$\begin{aligned} xy &= 25x + 25y \\ xy - 25y &= 25x \\ y(x - 25) &= 25x \\ y &= \frac{25x}{x - 25}. \end{aligned}$$

Znamo da je y cijeli broj, pa takav mora biti i razlomak s desne strane. Koristimo standardni postupak rastava razlomka ovog tipa:

$$\frac{25x}{x - 25} = \frac{25x - 25 \cdot 25 + 25 \cdot 25}{x - 25} = \frac{25(x - 25) + 625}{x - 25} = \frac{25(x - 25)}{x - 25} + \frac{625}{x - 25} = 25 + \frac{625}{x - 25}.$$

Zaključujemo da razlomak $\frac{625}{x - 25}$ mora biti cijeli broj. To je jedino moguće ako nazivnik $x - 25$ dijeli brojnik 625. Svi djelitelji broja $625 = 5^4$ su $-625, -125, -25, -5, -1, 1, 5, 25, 125, 625$. Kako je x prirodan broj, zaključujemo da se prva tri djelitelja ne mogu postići. U ostalim slučajevima, x je redom jednak 20, 24, 26, 30, 50, 150, 650. Za y redom dobijemo $-100, -600, 650, 150, 50, 30, 26$. Kako i y mora biti prirodan, odbacujemo i prva dva slučaja. Konačno, sve mogućnosti za par (x, y) su $(26, 650), (30, 150), (50, 50), (150, 30), (650, 26)$.

Uvrštavanjem u jednadžbu $3c + 2x + y = 2025$ dobivamo redom sljedeće vrijednosti za c : 441, 605, 625, 565, 233. Stoga su sve tražene trojke (a, b, c) jednake:

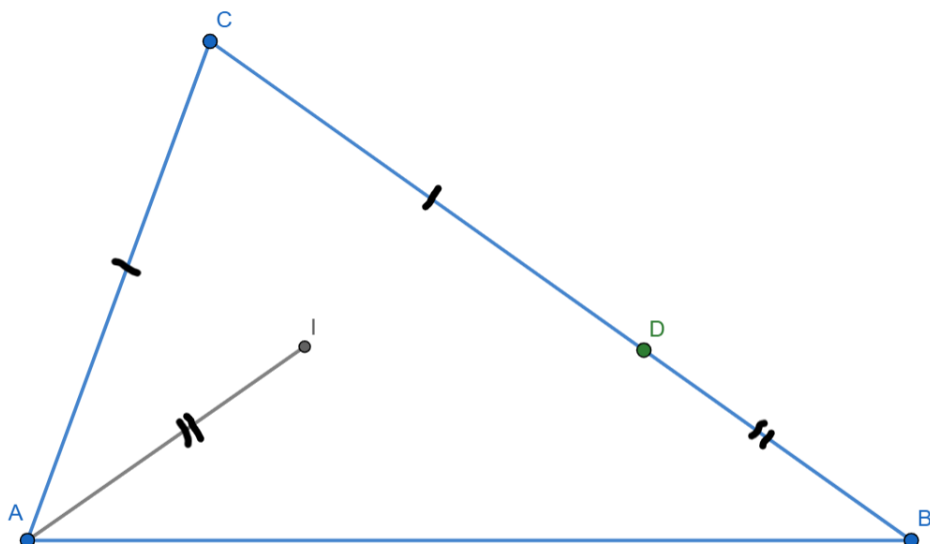
$$(1117, 467, 441), (785, 635, 605), (725, 675, 625), (745, 715, 565) \text{ i } (909, 883, 233).$$

Zadatak J-3.6. [60 bodova]

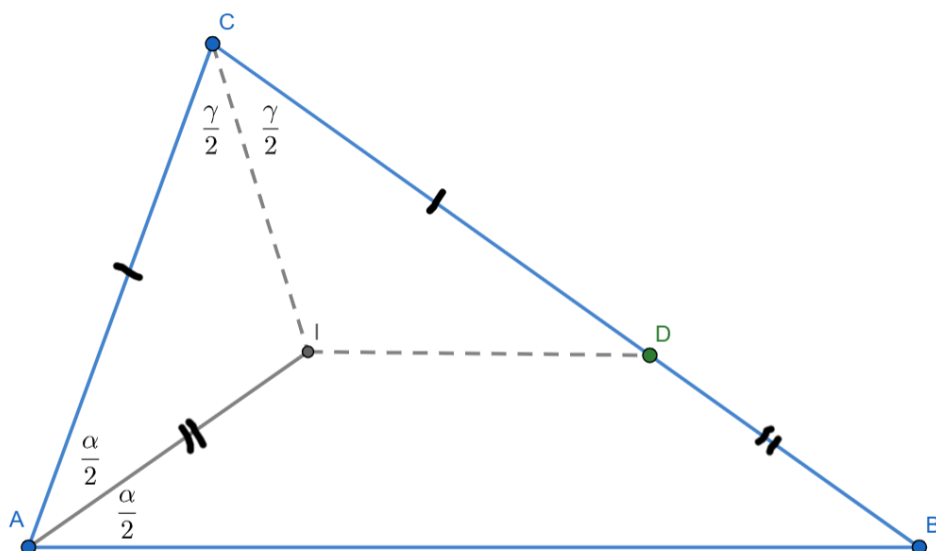
Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC . Ako vrijedi $|AC| + |AI| = |BC|$, dokaži da vrijedi $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle CBA$.

Rješenje.

Iskoristit ćemo zadani uvjet tako da uvedemo točku D na stranici $\overline{BC}$ za koju vrijedi $|AC| = |CD|$ i $|AI| = |DB|$.



Docrtajmo sada dužine $\overline{CI}$ i $\overline{DI}$ i označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Znamo da su pravci AI i CI simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$ redom.



Vidimo da su trokuti AIC i DCI sukladni po SKS poučku ($|AC| = |CD|$, zajednička stranica $\overline{CI}$ i jednaki kutovi $\sphericalangle ACI = \sphericalangle ICD = \frac{\gamma}{2}$). To znači da vrijedi $|AI| = |ID|$ te $\sphericalangle IAC = \sphericalangle CDI = \frac{\alpha}{2}$.

Promotrimo sada četverokut $ABDI$. Možemo zaključiti da je on tetivan, jer vrijedi $\sphericalangle BAI + \sphericalangle IDB = \frac{\alpha}{2} + (180^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 180^\circ$. Sada preostaje uočiti da su trokuti ABD i BAI sukladni po KSK poučku: stranica $\overline{AB}$ im je zajednička te su im parovi kutova $\sphericalangle IAB$ i $\sphericalangle DAB$ te $\sphericalangle ADB$ i $\sphericalangle AIB$ jednaki kao obodni kutevi nad tetivama iste kružnice jednake duljine. Iz toga slijedi traženo $\sphericalangle CBA = \frac{\alpha}{2} = \frac{\sphericalangle BAC}{2}$.

Zadatak J-3.7. [70 bodova]

U nekoj dalekoj zemlji, matematička edukativna olimpijada sastoji se od 22 kola. Na svakom kolu 5 najbolje plasiranih natjecatelja dobije čokoladu. Analizom rezultata ustanovljeno je da za svaka dva kola postoji točno jedan natjecatelj koji je dobio čokoladu na oba promatrana kola. Dokaži da postoji natjecatelj koji je dobio čokoladu na svakom kolu.

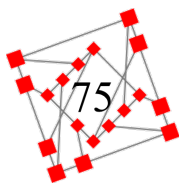
Rješenje.

Označimo prvo kolo s K_1 i promotrimo 5 natjecatelja koji su dobili čokoladu (tj. bili nagrađeni) na tom kolu. Na svakom od preostalih 21 kola netko od tih 5 natjecatelja je ponovno bio nagrađen, jer svaka dva kola imaju jednog zajedničkog nagrađenog natjecatelja. Prema *Dirichletovom principu* zaključujemo da postoji natjecatelj među 5 nagrađenih na prvom kolu koji je bio nagrađen još na barem 5 kola među preostalima. Doista, u suprotnom bismo imali da je svaki učenik među 5 nagrađenih na prvom kolu bio nagrađen na najviše 4 preostala kola, no onda bi ukupno imali najviše $5 \cdot 4 = 20$ nagrađenih učenika na preostalim kolima, ali to je manje nego što ima preostalih kola.

Označimo tih pet kola s K_2, K_3, K_4, K_5 i K_6 te natjecatelja koji je nagrađen na svima njima s a . Dakle, za sada znamo da je učenik a jedini učenik koji je nagrađen na svakom od kola $K_1, K_2, \dots, K_6$. Dodatno, a je jedini nagrađeni natjecatelj koji je zajednički među nagrađenim natjecateljima na bilo koja dva kola iz $K_1, K_2, \dots, K_6$.

Neka je sada L bilo koje kolo različito od $K_1, K_2, \dots, K_6$. L mora imati zajedničkog nagrađenog natjecatelja sa svakim od kola $K_1, K_2, \dots, K_6$. Kako je točno 5 učenika nagrađeno na kolu L , po Dirichletovom principu sada zaključujemo da je neki od učenika nagrađenih na kolu L nagrađen na dva kola među kolima $K_1, K_2, \dots, K_6$. No, tada je taj učenik nagrađen na neka dva kola iz $K_1, K_2, \dots, K_6$, pa po tvrdnji s kraja prethodnog odlomka zaključujemo da taj učenik mora biti a .

Dakle, učenik a dobio je čokoladu i na kolu L . Kako je kolo L bilo odabrano proizvoljno, zaključujemo da za sva preostala kola vrijedi isti zaključak. Time je dokazano da je učenik a nagrađen čokoladom na svakom kolu natjecanja.



MEDO 2024./2025.

Treće kolo

4.1.2025.

Loomen

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-3.1. [10 bodova]

Opseg pravokutnog trokuta iznosi 101, a zbroj kvadrata duljina njegovih stranica iznosi 4050. Kolika je površina tog trokuta?

Rješenje.

Označimo duljine stranica pravokutnog trokuta standardno s a , b i c , gdje je c duljina hipotenuze. Po uvjetima zadatka znamo da vrijedi $O = a + b + c = 101$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 4050$. U pravokutnom trokutu vrijedi slavni Pitagorin poučak $c^2 = a^2 + b^2$. Uvrštavanjem ovoga u drugu jednakost dobijemo $2c^2 = 4050$, pa $c^2 = 2025$, iz čega slijedi $c = 45$.

Sada dobivamo sustav od dvije jednačbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} a + b = 56 \\ a^2 + b^2 = 2025. \end{cases}$$

Sustav je moguće riješiti izražavanjem jedne varijable preko druge iz prve jednačbe i uvrštavanjem u drugu, nakon čega dobijemo kvadratnu jednačbu koju riješimo metodom svodenjema na kvadrat (ili direktno koristeći formulu). No, u zadatku se traži da odredimo površinu trokuta, a znamo da je ona jednaka $P = \frac{ab}{2}$. Dakle, dovoljno je odrediti vrijednost umnoška ab .

Kvadrirajmo prvu jednačbu. Dobijemo

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= 56^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 3136. \end{aligned}$$

Sada umjesto $a^2 + b^2$ uvrstimo 2025 i direktno dobijemo

$$\begin{aligned} 2025 + 2ab &= 3136 \\ 2ab &= 1111 \\ ab &= \frac{1111}{2}. \end{aligned}$$

Tražena površina trokuta je dakle jednaka $P = \frac{1111}{4}$.

Zadatak S-3.2. [20 bodova]

Neka je m prirodan broj. Za prirodan broj n kažemo da je m -složen ako se može zapisati kao umnožak točno m prirodnih brojeva većih od 1 (ne nužno različitih). Dokaži da je broj

$$(2025^4 - 1^4)(2025^4 - 2^4) \cdots (2025^4 - 2024^4)$$

(a) 6000-složen;

(b) 10000-složen.

Rješenje.

(a) Zadatak nam je rastaviti dani broj na umnožak od 6000 faktora većih od 1. Broj se već sastoji od 2024 faktora oblika $a^4 - b^4$. Svaki taj faktor možemo dalje rastaviti pomoću jednakosti

$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

Ovim postupkom ćemo dani broj raspisati kao umnožak

$$\begin{aligned} & 2024 \cdot 2026 \cdot (2025^2 + 1^2) \cdot 2023 \cdot 2027 \cdot (2025^2 + 2^2) \cdots 1 \cdot 4049 \cdot (2025^2 + 2024^2) \\ &= 2 \cdot 3 \cdots 2023 \cdot 2024 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdots 4048 \cdot 4049 \cdot (2025^2 + 1^2) \cdot (2025^2 + 2^2) \cdots (2025^2 + 2024^2), \end{aligned}$$

koji se sastoji od $2024 \cdot 3 - 1 = 6071$ prirodnih broja veća od 1, što dokazuje da je dani broj 6000-složen („višak” faktora možemo grupirati u jedan faktor).

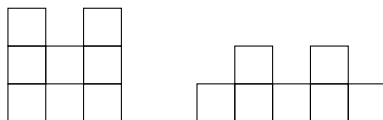
(b) Kako bismo došli do 10000 faktora, osim algebarskih manipulacija moramo razmatrati i aritmetička svojstva faktora. Promotrimo prvo parnost dobivenih faktora. Vidimo da je među njima $1012 \cdot 3 = 3036$ parnih faktora. Svaki od njih osim faktora 2 rastavimo na $2 \cdot k$, gdje je $k \geq 1$, čime dobivamo 3035 novih faktora.

Slično, svaki treći faktor među prvim faktorima 2, 3, ..., 2023, 2024, 2026, 2027, ..., 4048, 4049 je djeljiv s 3, pa možemo izlučiti faktor 3 iz njih. Isključit ćemo 3 i 6, jer njihove faktore smo već prebrojali, a u umnošku nedostaje broj 2025 koji je djeljiv s 3. To daje $1349 - 3 = 1346$ novih faktora.

Konačno, dokazali smo da dani broj može zapisati kao umnožak od $6071 + 3035 + 1346 = 10452$ prirodnih brojeva većih od 1. Time je dokazano da je dani broj i 10000-složen.

Zadatak S-3.3. [30 bodova]

Na raspolaganju imamo neograničeni broj pločica sa slike. Je li moguće potpuno prekriti (bez preklapanja) ploču dimenzija 777×777 koristeći ove pločice? Dozvoljene su rotacije pločica.



Rješenje.

Dokazat ćemo da nije moguće postići traženo popločavanje. Koristimo metodu *bojanja*, koja se često koristi u zadacima s popločavanjima. Postoje razni načini bojanja ploče i zadatak se često lagano riješi pravim odabirom broja boja i njihovim rasporedom na ploči.

Obojimo sva polja naše ploče u crno i bijelo „šahovski”, tj. tako da susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) uvijek budu obojana u različite boje.

Promotrimo sada polja koja prekrivaju dane pločice. Primjećujemo da kamo god na ploču stavimo bilo koju od ovih pločica, uvijek vrijedi da je broj polja jedne boje koje ona prekrije jednak 5, a broj prekrivenih polja druge boje jednak 2. Stoga je razlika broja prekrivenih polja jedne i druge boje jednaka 3.



Kako to vrijedi za svaku postavljenu pločicu, za sva polja koja prekrivaju pločice postavljene na bilo koji dozvoljeni način vrijedi da je ukupna razlika broja polja jedne i druge boje djeljiva s 3. Doista,

ta razlika je na početku 0 (dok nije postavljena niti jedna pločica), a dodavanjem svake nove pločice se promijeni za 3 ili -3 .

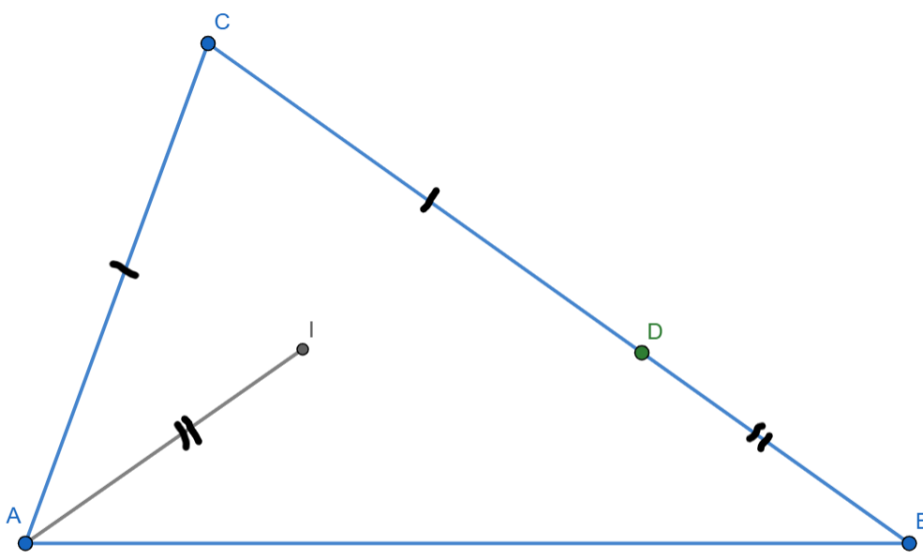
Pogledajmo sada našu cijelu ploču. Ona ima neparan broj polja te za 1 više polja jedne boje od polja druge boje. Dakle, ukupna razlika u broju polja jedne i druge boje nije djeljiva s 3. Zaključujemo da nije moguće prekriti ploču s danim pločicama.

Zadatak S-3.4. [40 bodova]

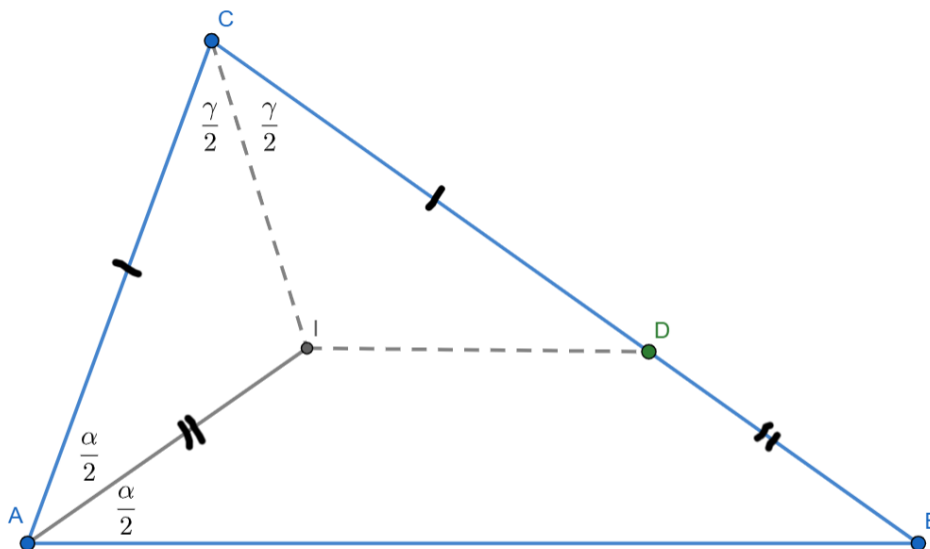
Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC . Ako vrijedi $|AC| + |AI| = |BC|$, dokaži da vrijedi $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle CBA$.

Rješenje.

Iskoristit ćemo zadani uvjet tako da uvedemo točku D na stranici $\overline{BC}$ za koju vrijedi $|AC| = |CD|$ i $|AI| = |DB|$.



Docrtajmo sada dužine $\overline{CI}$ i $\overline{DI}$ i označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Znamo da su pravci AI i CI simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$ redom.



Vidimo da su trokuti AIC i DCI sukladni po SKS poučku ($|AC| = |CD|$, zajednička stranica $\overline{CI}$ i

jednaki kutovi $\sphericalangle ACI = \sphericalangle ICD = \frac{\gamma}{2}$). To znači da vrijedi $|AI| = |ID|$ te $\sphericalangle IAC = \sphericalangle CDI = \frac{\alpha}{2}$.

Promotrimo sada četverokut $ABDI$. Možemo zaključiti da je on tetivan, jer vrijedi $\sphericalangle BAI + \sphericalangle IDB = \frac{\alpha}{2} + (180^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 180^\circ$. Sada preostaje uočiti da su trokuti ABD i BAI sukladni po *KSK* poučku: stranica $\overline{AB}$ im je zajednička te su im parovi kutova $\sphericalangle IAB$ i $\sphericalangle DAB$ te $\sphericalangle ADB$ i $\sphericalangle AIB$ jednaki kao obodni kutevi nad tetivama iste kružnice jednake duljine. Iz toga slijedi traženo $\sphericalangle CBA = \frac{\alpha}{2} = \frac{\sphericalangle BAC}{2}$.

Zadatak S-3.5. [50 bodova]

U nekoj dalekoj zemlji, matematička edukativna olimpijada sastoji se od 22 kola. Na svakom kolu 5 najbolje plasiranih natjecatelja dobije čokoladu. Analizom rezultata ustanovljeno je da za svaka dva kola postoji točno jedan natjecatelj koji je dobio čokoladu na oba promatrana kola. Dokaži da postoji natjecatelj koji je dobio čokoladu na svakom kolu.

Rješenje.

Označimo prvo kolo s K_1 i promotrimo 5 natjecatelja koji su dobili čokoladu (tj. bili nagrađeni) na tom kolu. Na svakom od preostalih 21 kola netko od tih 5 natjecatelja je ponovno bio nagrađen, jer svaka dva kola imaju jednog zajedničkog nagrađenog natjecatelja. Prema *Dirichletovom principu* zaključujemo da postoji natjecatelj među 5 nagrađenih na prvom kolu koji je bio nagrađen još na barem 5 kola među preostalima. Doista, u suprotnom bismo imali da je svaki učenik među 5 nagrađenih na prvom kolu bio nagrađen na najviše 4 preostala kola, no onda bi ukupno imali najviše $5 \cdot 4 = 20$ nagrađenih učenika na preostalim kolima, ali to je manje nego što ima preostalih kola.

Označimo tih pet kola s K_2, K_3, K_4, K_5 i K_6 te natjecatelja koji je nagrađen na svima njima s a . Dakle, za sada znamo da je učenik a jedini učenik koji je nagrađen na svakom od kola $K_1, K_2, \dots, K_6$. Dodatno, a je jedini nagrađeni natjecatelj koji je zajednički među nagrađenim natjecateljima na bilo koja dva kola iz $K_1, K_2, \dots, K_6$.

Neka je sada L bilo koje kolo različito od $K_1, K_2, \dots, K_6$. L mora imati zajedničkog nagrađenog natjecatelja sa svakim od kola $K_1, K_2, \dots, K_6$. Kako je točno 5 učenika nagrađeno na kolu L , po Dirichletovom principu sada zaključujemo da je neki od učenika nagrađenih na kolu L nagrađen na dva kola među kolima $K_1, K_2, \dots, K_6$. No, tada je taj učenik nagrađen na neka dva kola iz $K_1, K_2, \dots, K_6$, pa po tvrdnji s kraja prethodnog odlomka zaključujemo da taj učenik mora biti a .

Dakle, učenik a dobio je čokoladu i na kolu L . Kako je kolo L bilo odabrano proizvoljno, zaključujemo da za sva preostala kola vrijedi isti zaključak. Time je dokazano da je učenik a nagrađen čokoladom na svakom kolu natjecanja.

Zadatak S-3.6. [60 bodova]

Za funkciju $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ kažemo da je *pseudopolinom* ako za svaka dva različita $a, b \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $a - b \mid f(a) - f(b)$. Odredi sve pseudopolinome f takve da za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $\{0, 1, 2, \dots, n\} = \{f(0), f(1), f(2), \dots, f(n)\}$.

Rješenje.

Nije teško vidjeti da svaki pseudopolinom f koji zadovoljava dano svojstvo mora biti bijekcija. Surjekcija je jer za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ postoji neki n veći od njega za koji vrijedi dano svojstvo pa je $m = f(k)$ za neki $k \leq n$, tj. m je u slici funkcije f . Injekcija je jer bi u suprotnom za dovoljno velike n -ove skupovi $\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ imali manje od n elemenata.

Označimo $d = f(0)$ i odredimo ovu vrijednost. Uzmimo $N > d$ za koji vrijedi dano svojstvo. Tada vrijedi $f(N) \leq N$. S druge strane, iz definicije pseudopolinoma, imamo da vrijedi $N - 0 \mid f(N) - d$. Kako je f injekcija, ne može biti $f(N) = d$, pa mora biti $f(N) - d \geq N$ ili $f(N) - d \leq -N$. U drugom slučaju bi $f(N)$ morao biti negativan, zbog početnog izbora od N , što nije moguće. Onda mora vrijediti $f(N) - d \geq N$, a kako znamo $f(N) \leq N$ i svi ovi brojevi su nenegativni, iz ovoga slijedi

da vrijedi $f(N) = N$ i $d = 0$.

Sada za sve prirodne brojeve n vrijedi $n - 0 \mid f(n) - 0$, iz čega slijedi $f(n) \geq n$. Dokažimo da uvijek mora vrijediti $f(n) = n$. Pretpostavimo suprotno; neka je n_0 najmanji prirodni broj takav da vrijedi $f(n_0) > n_0$. Tada za n manje od n_0 vrijedi $f(n) = n < n_0$, a za n veće od n_0 vrijedi $f(n) \geq n > n_0$, pa vidimo da n_0 nije u slici funkcije f , što je kontradikcija s njenom surjektivnošću. Ovime je dokazano da je identiteta jedini pseudopolinom koji zadovoljava dano svojstvo.

Zadatak S-3.7. [70 bodova]

Zadan je prirodan broj d . Definiramo niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tako da je $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = n \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + d$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da postoji prirodan broj N takav da je niz $(a_n)_{n \geq N}$ aritmetički niz.

Prvo rješenje.

Pokazat ćemo da niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ postaje aritmetički za $n \geq d + 1$.

Korištenjem nejednakosti $\lfloor x \rfloor \leq x$ slijedi da je $a_{n+1} \leq a_n + d$. Induktivnim korištenjem posljednje nejednakosti dobivamo $a_{n+1} \leq nd + a_1 \leq (n + 1)d$.

Dakle, $a_n \leq nd$ za svaki prirodan broj n .

Neka je $q = \left\lfloor \frac{a_d}{d} \right\rfloor$. Indukcijom ćemo dokazati da je $a_n = (n - 1)q + d$ za sve $n \geq d + 1$.

Za $n = d + 1$ imamo da je $a_{d+1} = d \left\lfloor \frac{a_d}{d} \right\rfloor + d = dq + d$.

Pretpostavimo da je $a_n = (n - 1)q + d$ za neki $n \geq d + 1$ i dokažimo da je $a_{n+1} = nq + d$.

Imamo da je

$$a_{n+1} = n \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + d = n \left\lfloor \frac{(n-1)q + d}{n} \right\rfloor + d = nq + d + \left\lfloor \frac{d-q}{n} \right\rfloor.$$

Uočimo da je $q = \left\lfloor \frac{a_d}{d} \right\rfloor \leq d$ jer je $a_d \leq d^2$. Stoga za $n \geq d + 1$ vrijedi da je $0 \leq \frac{d-q}{n} < 1$, odnosno $\left\lfloor \frac{d-q}{n} \right\rfloor = 0$. Time konačno dobivamo $a_{n+1} = nq + d$, čime je indukcija završena.

Drugo rješenje.

Analogno kao u prvom rješenju dobijemo $a_n \leq nd$ za svaki prirodan broj n .

Uvedimo novi niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiran s $b_n = \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor$ za svaki prirodan broj n . Iz relacije $a_{n+1} = n \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + d$ slijedi da je

$$b_{n+1} = \left\lfloor \frac{nb_n + d}{n+1} \right\rfloor = b_n + \left\lfloor \frac{d-b_n}{n+1} \right\rfloor.$$

Nadalje, uočimo da je $b_n \leq d$ jer imamo $a_n \leq nd$ pa slično kao u prethodnom rješenju zaključujemo da je $\left\lfloor \frac{d-b_n}{n+1} \right\rfloor = 0$ za $n \geq d$.

Prema tome imamo da je $b_{n+1} = b_n$ za sve $n \geq d$, odnosno da je niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstantan za $n \geq d$. Označimo tu konstantu s C . Tada je $a_{n+1} = nb_n + d = nC + d$ za sve $n \geq d$ što čini traženi aritmetički niz.