

MEDO 2024./2025.

Prvo kolo

26.10.2024.

Zadaci

Loomen

Test se sastoji od 7 zadataka.

Zadaci nose različit maksimalni mogući broj bodova (naznačeno pored zadatka).

Konačni rezultat na testu jednak je zbroju bodova na 4 zadatka s najvećim ostvarenim brojem bodova.

Rješenja se šalju isključivo putem [Loomena](#).

Vrijeme pisanja testa je 4 sata.

Juniori

Zadatak J-1.1. [10 bodova]

Umnožak dvaju prirodnih brojeva iznosi 5704. Ako prvi broj umanjimo za 20, a drugi ostane isti, umnožak postaje 2024. Koliko iznosi drugi broj?

Zadatak J-1.2. [20 bodova]

Izračunaj površinu četverokuta čiji su vrhovi u točkama $(-6, -2)$, $(-4, 6)$, $(-1, 8)$ i $(7, -7)$.

Zadatak J-1.3. [30 bodova]

U svako polje tablice 3×3 treba upisati po jedan od brojeva 1, 2, ..., 9 tako da svi brojevi budu iskorišteni i da svi zbrojevi brojeva u svakom retku i svakom stupcu budu neparni. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Zadatak J-1.4. [40 bodova]

Neka su a , b , c i d prirodni brojevi koji zadovoljavaju jednakost $ab + bc + cd + da = 2024$. Koliko najviše može iznositi $a + b + c + d$?

Zadatak J-1.5. [50 bodova]

Neka je $M = 5555^{4444}$ i $N = 5555^{2222}$. Odredi ostatak pri dijeljenju broja M^N s 9.

Zadatak J-1.6. [60 bodova]

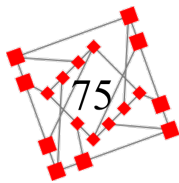
U trokut ABC upisan je polukrug čiji promjer leži na stranici $\overline{AB}$ i koji dira stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u točkama D i E redom. Neka je F nožište okomice iz točke C na $\overline{AB}$. Ako je $\angle ECF = 21^\circ$ i $\angle FCD = 33^\circ$, koliko iznose $\angle FEC$ i $\angle CDF$?

Zadatak J-1.7. [70 bodova]

Mali medo ima 24 male kutije označene brojevima od 1 do 24, jednu veliku kutiju i neograničenu količinu loptica na raspolaganju. Na početku igre medo uzima neku količinu loptica i razmješta ih po volji u neke od malih kutija (može i u sve). Velika kutija je na početku igre prazna. Tokom igre, medo ponavlja sljedeći potez, dok god može:

- odabire neku od malih kutija u kojoj je trenutni broj loptica jednak oznaci te kutije, uzima sve loptice iz te kutije i stavlja po jednu u svaku od malih kutija označenih brojevima 1, 2, ..., $k - 1$, gdje je k oznaka odabrane kutije, a preostalu lopticu ubaci u veliku kutiju.

Igra završava kada medo više ne može napraviti potez. Kažemo da je medo *pobijedio* ako su na kraju igre sve male kutije prazne. Odredi najveći mogući broj loptica u velikoj kutiji nakon igre u kojoj je medo pobijedio.



MEDO 2024./2025.

Prvo kolo

26.10.2024.

Loomen

Zadaci

Test se sastoji od 7 zadataka.

Zadaci nose različit maksimalni mogući broj bodova (naznačeno pored zadatka).

Konačni rezultat na testu jednak je zbroju bodova na 4 zadatka s najvećim ostvarenim brojem bodova.

Rješenja se šalju isključivo putem [Loomena](#).

Vrijeme pisanja testa je 4 sata.

Seniori

Zadatak S-1.1. [10 bodova]

Leda prehoda određeni put po ravnoj stazi i vrati se natrag (istim putem) autobusom za ukupno 3 sata i 45 minuta. Ako isti put prijeđe vozeći bicikl, a natrag ponovno autobusom, treba joj ukupno 2 sata i 15 minuta.

Ako znamo da Leda vozi bicikl dvostruko brže nego što hoda, koliko bi joj ukupno vremena trebalo da prijeđe isti put (u oba smjera) vozeći bicikl cijelim putem?

Zadatak S-1.2. [20 bodova]

Neka je $M = 5555^{4444}$ i $N = 5555^{2222}$. Odredi ostatak pri dijeljenju broja M^N s 9.

Zadatak S-1.3. [30 bodova]

Za pozitivne realne brojeve a , b i c vrijedi $a + b + c = 1$ i $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 9$.

Izračunaj $\frac{1}{a^{2024}} + \frac{1}{b^{2024}} + \frac{1}{c^{2024}}$.

Zadatak S-1.4. [40 bodova]

U trokut ABC upisan je polukrug čiji promjer leži na stranici $\overline{AB}$ i koji dira stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u točkama D i E redom. Neka je F nožište okomice iz točke C na $\overline{AB}$. Ako je $\angle ECF = 21^\circ$ i $\angle FCD = 33^\circ$, koliko iznose $\angle FEC$ i $\angle CDF$?

Zadatak S-1.5. [50 bodova]

Mali medo ima 24 male kutije označene brojevima od 1 do 24, jednu veliku kutiju i neograničenu količinu loptica na raspolaganju. Na početku igre medo uzima neku količinu loptica i razmješta ih po volji u neke od malih kutija (može i u sve). Velika kutija je na početku igre prazna. Tokom igre, medo ponavlja sljedeći potez, dok god može:

- odabire neku od malih kutija u kojoj je trenutni broj loptica jednak oznaci te kutije, uzima sve loptice iz te kutije i stavlja po jednu u svaku od malih kutija označenih brojevima $1, 2, \dots, k-1$, gdje je k oznaka odabrane kutije, a preostalu lopticu ubaci u veliku kutiju.

Igra završava kada medo više ne može napraviti potez. Kažemo da je medo *pobijedio* ako su na kraju igre sve male kutije prazne. Odredi najveći mogući broj loptica u velikoj kutiji nakon igre u kojoj je medo pobijedio.

Zadatak S-1.6. [60 bodova]

Za točku T u koordinatnoj ravnini kažemo da je *skladna* ako su joj obje koordinate cjelobrojne i ako dužina koja spaja ishodište i točku T ne sadrži niti jednu drugu točku s cjelobrojnim koordinatama. Za prirodan broj k , označimo sa $S(k)$ broj skladnih točaka (x, y) za koje vrijedi $x^2 + y^2 = k^2$.

Izračunaj zbroj svih vrijednosti $S(d)$, gdje su d svi različiti pozitivni djelitelji broja $2021 \cdot 2025$.

Zadatak S-1.7. [70 bodova]

U nekoj dalekoj državi banka izdaje kovanice raznih apoeni (vrijednosti) iz intervala $[0, 1]$. Odredi najmanju pozitivnu konstantu C takvu da, neovisno o izdanim apoenima, vrijedi:

- bilo koji konačan skup kovanica čija ukupna vrijednost ne prelazi 1000 može se rasporediti u 10 skupina tako da ukupna vrijednost kovanica u svakoj skupini bude najviše C .