

MEDO 2024./2025.

Peto kolo

4.4. - 6.4.2025.

Loomen

Zadaci

Juniori

Zadatak J-5.1. [10 bodova]

Na livadi trava raste konstantnom brzinom. Ako bi se na livadu dovelo 9 krava na ispašu, trave bi nestalo za 4 dana. Ako bi se na livadu dovelo 8 krava, trave bi nestalo za 6 dana. Koliko najviše krava može pasti na toj livadi tako da nikada ne ostanu bez trave? Pretpostavljamo da svaka krava svakog dana popase jednaku količinu trave.

Zadatak J-5.2. [20 bodova]

Na velikom natjecanju u streljaštvu strijelac Oštrooki niti jednom nije promašio cijelu metu. Pogađao je samo desetke, devetke i sedmice i pritom je pogodio točno onoliko desetki koliko devetki i sedmica zajedno. Koliko je najmanje puta Oštrooki gađao metu ako se zna da je ukupno ostvario 920 bodova?

Zadatak J-5.3. [30 bodova]

Koliko ima četvorki (a, b, c, d) prirodnih brojeva takvih da je

$$\text{NZD}(a, b) = 4, \text{NZD}(b, c) = 6, \text{NZD}(c, d) = 1, \text{NZD}(d, a) = 1$$

i $abcd = 216000$?

Zadatak J-5.4. [40 bodova]

Niz od četiri znamenke može se transformirati na sljedeće načine:

- (i) ako su neke dvije susjedne znamenke u nizu različite od 0, one se mogu istovremeno smanjiti za 1 (npr. niz 9870 se na ovaj način može transformirati u bilo koji od nizova 8770 i 9760)
- (ii) ako su neke dvije susjedne znamenke u nizu različite od 9, one se mogu istovremeno povećati za 1 (npr. niz 9870 se na ovaj način može transformirati u bilo koji od nizova 9980 i 9881).

Može li se uzastopnom primjenom ovih transformacija niz 1233 transformirati u niz:

- a) 2025?
- b) 5052?

Zadatak J-5.5. [50 bodova]

Neka je ABC šiljastokutan trokut. Simetrala unutarnjeg kuta trokuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P pri čemu je $|BP| = 2$ i $|PC| = 3$. Pravac koji prolazi točkom A i paralelan je sa stranicom $\overline{BC}$ siječe pravac koji prolazi točkom B i okomit je na pravac AP u točki D . Koliko iznosi $|AD|$?

Zadatak J-5.6. [60 bodova]

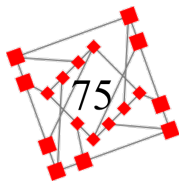
Odredi najmanji prirodni broj N za koji vrijedi sljedeća tvrdnja:

među bilo kojih N različitih prirodnih brojeva postoje četiri različita broja a , b , c i d takva da $a + b$ i $c + d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20.

Zadatak J-5.7. [70 bodova]

Neka je $p > 3$ prost broj. Odredi sve uređene parove (a, b) cijelih brojeva za koje vrijedi:

$$a^2 + 3ab + 2p(a + b) + p^2 = 0.$$



MEDO 2024./2025.

Peto kolo

4.4. - 6.4.2025.

Loomen

Zadaci

Seniori

Zadatak S-5.1. [10 bodova]

U svako polje 3×3 tablice upisan je po jedan realan broj tako da vrijedi:

- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg stupca iznosi 1
- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg retka iznosi 1
- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg 2×2 kvadrata iznosi 2.

Koji je broj upisan u središnje polje tablice?

Zadatak S-5.2. [20 bodova]

Neka je ABC šiljastokutan trokut. Simetrala unutarnjeg kuta trokuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P pri čemu je $|BP| = 2$ i $|PC| = 3$. Pravac koji prolazi točkom A i paralelan je sa stranicom $\overline{BC}$ siječe pravac koji prolazi točkom B i okomit je na pravac AP u točki D . Koliko iznosi $|AD|$?

Zadatak S-5.3. [30 bodova]

Riješi sljedeći sustav jednažbi u skupu realnih brojeva:

$$\begin{aligned}2x_2 &= x_1 + \frac{2}{x_1} \\2x_3 &= x_2 + \frac{2}{x_2} \\&\vdots \\2x_{2025} &= x_{2024} + \frac{2}{x_{2024}} \\2x_1 &= x_{2025} + \frac{2}{x_{2025}}.\end{aligned}$$

Zadatak S-5.4. [40 bodova]

Neka je $k > 2$ prirodan broj. Dokaži da je $2^{2^k-1} - 2^k - 1$ složen broj.

Zadatak S-5.5. [50 bodova]

Dan je trokut ABC s ortocentrom H . Nožišta okomica iz točke H na simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta pri vrhu A su redom točke P i Q . Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. Dokaži da točke P , Q i M leže na istom pravcu.

Zadatak S-5.6. [60 bodova]

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- (i) postoji realan broj M takav da je $f(x) < M$ za sve realne brojeve x
- (ii) vrijedi $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$ za sve realne brojeve x i y .

Zadatak S-5.7. [70 bodova]

Dani prirodni broj transformiramo nizom koraka. U svakom koraku od trenutnog broja dobivamo novi broj tako da umetnemo jedan ili više znakova „+” između njegovih znamenki te izračunamo vrijednost dobivenog izraza. Primjerice, od broja 123 u jednom koraku možemo dobiti bilo koji od brojeva $1 + 23 = 24$, $12 + 3 = 15$ i $1 + 2 + 3 = 6$.

Odredi, ako postoji, najmanji prirodan broj M takav da opisanim postupkom možemo dobiti jednoznamenasti broj u najviše M koraka počevši od bilo kojeg prirodnog broja.