

MEDO 2024./2025.

Peto kolo

4.4. – 6.4.2025.

Loomen

Zadaci i rješenja

Juniori

Zadatak J-5.1. [10 bodova]

Na livadi trava raste konstantnom brzinom. Ako bi se na livadu dovelo 9 krava na ispašu, trave bi nestalo za 4 dana. Ako bi se na livadu dovelo 8 krava, trave bi nestalo za 6 dana. Koliko najviše krava može pasti na toj livadi tako da nikada ne ostanu bez trave? Pretpostavljamo da svaka krava svakog dana popase jednaku količinu trave.

Rješenje.

Označimo s p početnu količinu trave na livadi (u kilogramima) te s d količinu trave (u kilogramima) koja naraste na livadi tijekom jednog dana. Također, označimo s k količinu trave (u kilogramima) koju popase jedna krava tijekom jednog dana.

Sada možemo postaviti jednadžbe. 9 krava tijekom 4 dana popase $9 \cdot 4 \cdot k$ kilograma trave. Kako nakon tog razdoblja na livadi nestane trave, to mora biti točno jednako ukupnoj količini trave koja se na livadi nalazi tijekom ta četiri dana, a to je jednako zbroju početne količine trave i količine trave koja naraste za 4 dana. Analogno zaključujemo za slučaj 8 krava, pa dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} 9 \cdot 4 \cdot k = p + 4d \\ 8 \cdot 6 \cdot k = p + 6d. \end{cases}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobijemo $12k = 2d$, iz čega slijedi $d = 6k$. Iz toga zaključujemo da je dnevni prirast trave jednak količini trave koju 6 krava popase za jedan dan. To je i najveći mogući broj krava koje mogu pasti na livadi tako da nikada ne ostanu bez trave, jer ako ih je više onda će se količina trave svakog dana smanjivati i stoga će je u nekom trenutku nestati.

Zadatak J-5.2. [20 bodova]

Na velikom natjecanju u streljaštvu strijelac Oštrooki niti jednom nije promašio cijelu metu. Pogađao je samo desetke, devetke i sedmice i pritom je pogodio točno onoliko desetki koliko devetki i sedmica zajedno. Koliko je najmanje puta Oštrooki gađao metu ako se zna da je ukupno ostvario 920 bodova?

Rješenje.

Označimo s A broj desetki, s B broj devetki i s C broj sedmica koje je Oštrooki pogodio. Iz uvjeta zadatka čitamo $A = B + C$ te $10A + 9B + 7C = 920$. Zanima nas koliko najmanje može iznositi vrijednost $A + B + C$.

Uvrštavanjem $A = B + C$ u jednadžbu za broj bodova dobivamo *diofantsku jednadžbu* $19B + 17C = 920$. Izrazimo li B iz ove jednadžbe dobijemo

$$B = \frac{920 - 17C}{19} = \frac{19 \cdot 48 + 8 - 17C}{19} = 48 - \frac{17C - 8}{19}.$$

Brojevi B i C moraju biti prirodni brojevi. Stoga 19 mora dijeliti $17C - 8$ kako bi razlomak iz prethodnog izraza bio cijeli broj. Sada redom vrijedi:

$$\begin{aligned} 17C - 8 &\in \{0, 19, 38, 57, 76, \dots, 912\} \quad / + 8 \\ \implies 17C &\in \{8, 27, 46, 65, 84, \dots, 920\} \quad / \div 17 \\ \implies C &\in \left\{ \frac{8}{17}, \frac{27}{17}, \frac{46}{17}, \frac{65}{17}, \dots, \frac{255}{17} = 15, \dots, \frac{578}{17} = 34, \frac{901}{17} = 53, \frac{920}{17} \right\} \end{aligned}$$

Kad smo prvi put dobili da je razlomak prirodan broj 15, znali smo da će se idući put to dogoditi za vrijednost razlomka $15 + 19 = 34$ zato što brojnik razlomaka između ova dva broja možemo zapisati kao $255 + 19k$, gdje je $k = 1, 2, 3, \dots, 16$ pa vrijedi $\frac{255 + 19k}{17} = 15 + \frac{19k}{17}$. Kako su 19 i 17 relativno prosti brojevi (nemaju zajedničkih djelitelja većih od 1) zaključujemo da 17 mora dijeliti k . No, to je nemoguće dok je $k < 17$.

Dakle, C može biti jedino 15, 34 i 53. Pripadne vrijednosti broja B su redom 35, 18 i 1. Moguće vrijednosti traženog zbroja $A + B + C = (B + C) + B + C = 2(B + C)$ su sada redom 100, 104 i 108. Oštrooki je stoga najmanje 100 puta gađao metu.

Zadatak J-5.3. [30 bodova]

Koliko ima četvorki (a, b, c, d) prirodnih brojeva takvih da je

$$\text{NZD}(a, b) = 4, \text{NZD}(b, c) = 6, \text{NZD}(c, d) = 1, \text{NZD}(d, a) = 1$$

i $abcd = 216000$?

Rješenje.

Vrijedi $216000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$. Kako je $\text{NZD}(a, b) = 4$, znamo da $4 = 2^2 = 2 \cdot 2$ dijeli brojeve a i b pa možemo pisati $a = 2 \cdot 2 \cdot x$, $b = 2 \cdot 2 \cdot x'$, gdje su x i x' neki relativno prosti prirodni brojevi (tj. nemaju zajedničkih djelitelja većih od 1 jer bi u suprotnom najveći zajednički djelitelj brojeva a i b bio veći od 4). Analognim zaključivanjem dobijemo $b = 2 \cdot 3 \cdot y$ i $c = 2 \cdot 3 \cdot y'$, gdje su y i y' neki relativno prosti prirodni brojevi te iz preostale dvije jednakosti zaključujemo da su brojevi c i d te d i a međusobno relativno prosti.

Sada iz svega izrečenoga zaključujemo da vrijedi $a = 2 \cdot 2 \cdot a_1$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b_1$, $c = 2 \cdot 3 \cdot c_1$ i $d = d_1$, gdje su a_1 , b_1 , c_1 i d_1 prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$\text{NZD}(a_1, b_1) = 1, \text{NZD}(b_1, c_1) = 1, \text{NZD}(c_1, d_1) = 1 \text{ i } \text{NZD}(d_1, a_1) = 1. \quad (\star)$$

Također znamo da broj a_1 ne sadrži faktor 3, broj c_1 ne sadrži faktor 2 i broj d_1 ne sadrži faktore 2 i 3.

Uvrštavajući ove izraze u jednakost $abcd = 216000$ nakon skraćivanja dobijemo $a_1 b_1 c_1 d_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$. Sada moramo prebrojati na koliko načina možemo rasporediti faktore 2, 3 i 5^3 među brojevima a_1 , b_1 , c_1 i d_1 . Faktor 2 može pripadati jedino brojevima a_1 i b_1 pa imamo dvije mogućnosti; faktor 3 može pripadati jedino brojevima b_1 i c_1 pa i za njega imamo dvije mogućnosti. Faktori 5 iz umnoška 5^3 se zbog $(\star)$ mogu rasporediti jedino između parova brojeva a_1 i c_1 ili b_1 i d_1 . U svakom od ova dva slučaja imamo 4 mogućnosti: prvi broj iz para može imati 0, 1, 2 ili 3 faktora 5, a drugi broj preostale faktore. Svi prethodni izbori su međusobno neovisni pa ukupan broj četvorki (a_1, b_1, c_1, d_1) , a time i traženih četvorki (a, b, c, d) , računamo kao umnožak $2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 4) = 32$.

Zadatak J-5.4. [40 bodova]

Niz od četiri znamenke može se transformirati na sljedeće načine:

- (i) ako su neke dvije susjedne znamenke u nizu različite od 0, one se mogu istovremeno smanjiti za 1 (npr. niz 9870 se na ovaj način može transformirati u bilo koji od nizova 8770 i 9760)

- (ii) ako su neke dvije susjedne znamenke u nizu različite od 9, one se mogu istovremeno povećati za 1 (npr. niz 9870 se na ovaj način može transformirati u bilo koji od nizova 9980 i 9881).

Može li se uzastopnom primjenom ovih transformacija niz 1233 transformirati u niz:

- a) 2025?
b) 5052?

Rješenje.

a) Opisanim transformacijama moguće je niz 1233 pretvoriti u 2025, na primjer:

$$1233 \xrightarrow{(ii)} 2333 \xrightarrow{(i)} 2223 \xrightarrow{(i)} 2113 \xrightarrow{(i)} 2003 \xrightarrow{(ii)} 2014 \xrightarrow{(ii)} 2025.$$

b) Dokažimo da opisanim transformacijama nije moguće broj 1233 pretvoriti u 5052 koristeći *invarijantu* ove transformacije. Za niz od četiri znamenke $abcd$ promatrajmo izraz $(a + c) - (b + d)$, odnosno razliku između zbroja znamenaka na neparnim i parnim pozicijama. Kako transformacije (i) i (ii) mijenjaju vrijednosti susjednih znamenaka za isti iznos, gornja razlika se nakon bilo koje od njih neće promijeniti, jer će se oba zbroja $a + c$ i $b + d$ istovremeno povećati ili smanjiti za 1. Za 1233 promatrana razlika iznosi $1 - 2 + 3 - 3 = -1$, dok za 5052 iznosi $5 - 0 + 5 - 2 = 8$, što znači da nije moguće danim transformacijama pretvoriti jedan broj u drugi.

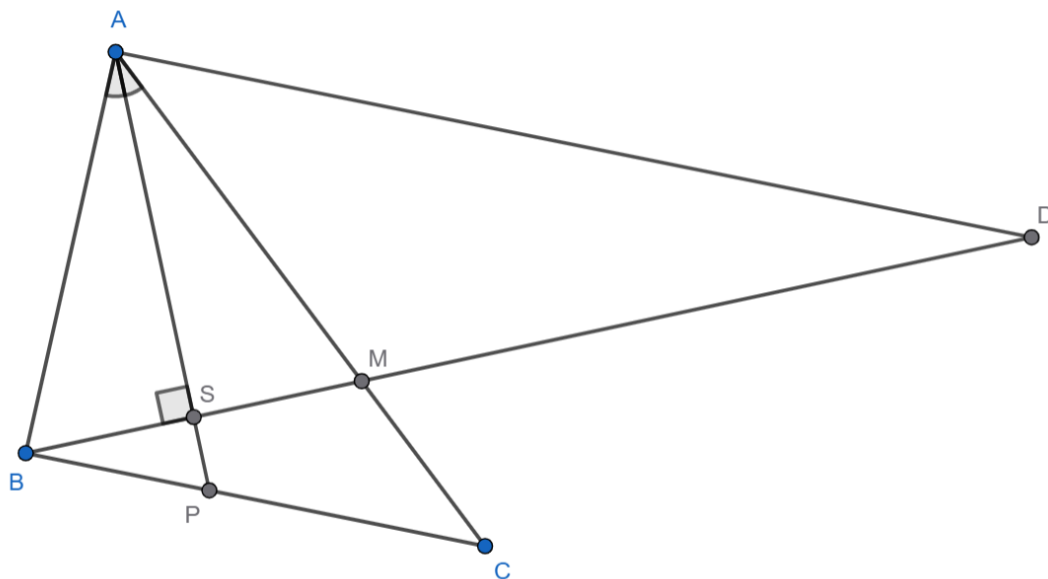
Drugo rješenje za dio b).

Promatramo li zadani niz od četiri znamenke kao četveroznamenkasti prirodni broj, dozvoljene transformacije možemo interpretirati kao pribrajanje ili oduzimanje nekog od brojeva 11, 110 i 1100. Primijetimo kako su svi ovi brojevi djeljivi s 11. Stoga se korištenjem bilo koje transformacije ne mijenja ostatak koji broj daje pri dijeljenju s 11. Sada je dovoljno primijetiti da brojevi 1233 i 5052 ne daju isti ostatak pri dijeljenju s 11.

Zadatak J-5.5. [50 bodova]

Neka je ABC šiljastokutan trokut. Simetrala unutarnjeg kuta trokuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P pri čemu je $|BP| = 2$ i $|PC| = 3$. Pravac koji prolazi točkom A i paralelan je sa stranicom $\overline{BC}$ siječe pravac koji prolazi točkom B i okomit je na pravac AP u točki D . Koliko iznosi $|AD|$?

Prvo rješenje.



Označimo sa S sjecište dužina $\overline{AP}$ i $\overline{BD}$ te s M sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

Uočimo sada da su pravokutni trokuti ASB i ASM sukladni po KSK poučku. Doista, $\angle BAC = \angle SAM = \frac{\alpha}{2}$, dijele stranicu $\overline{AS}$ i $\angle ASB = \angle ASM = 90^\circ$. Zaključujemo da vrijedi $|BS| = |SM|$, tj. točka S je polovište dužine $\overline{BM}$.

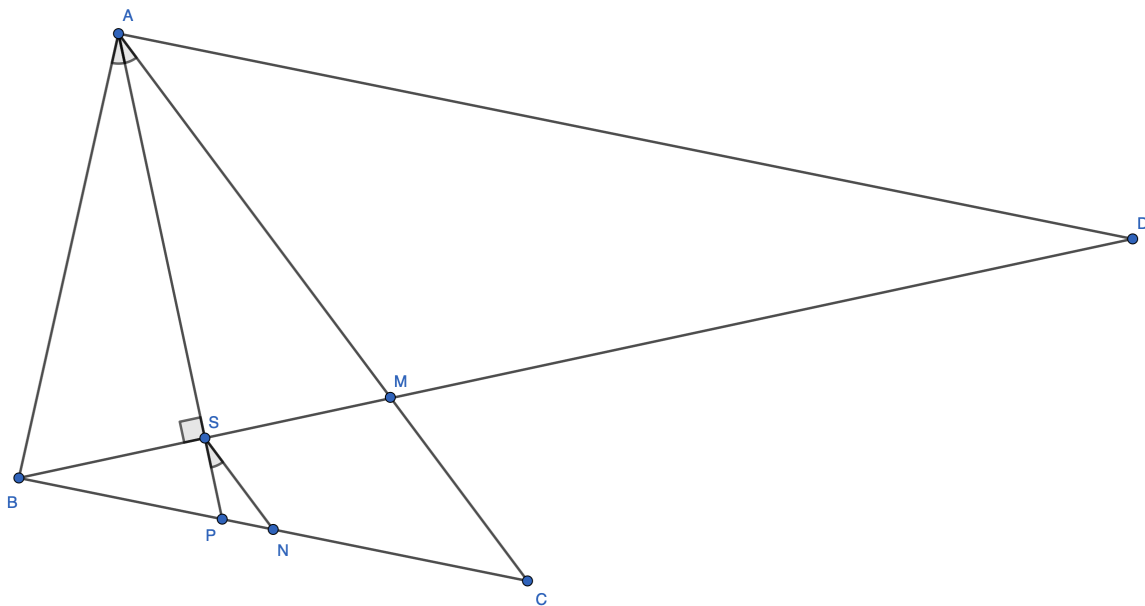
Uočimo sada dva para sličnih trokuta: $\triangle BPS \sim \triangle DAS$ i $\triangle BCM \sim \triangle DAM$. Doista, oba para trokuta su slična po K-K poučku: parovi kutova su im jednaki kao vršni kutovi ili kutovi uz presječnicu usporednih pravaca. Iz ovih sličnosti dobivamo sljedeće omjere:

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$

$$\frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|BM|}{|DM|}$$

Označimo $|BS| = |SM| = x$. Iz prvog niza jednakosti imamo $\frac{2}{|AD|} = \frac{|BS|}{|DS|} = \frac{x}{|DM| + x}$, a iz drugog $\frac{5}{|AD|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{2x}{|DM|}$. Dijeljenjem ovih dviju jednakosti dobivamo $\frac{5}{2} = \frac{2(|DM| + x)}{|DM|} = 2 + \frac{2x}{|DM|}$ iz čega slijedi $\frac{2x}{|DM|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{1}{2}$. Zaključujemo da je stranica $\overline{AD}$ dvostruko duža od stranice $\overline{BC}$, tj. $|AD| = 2 \cdot |BC| = 2 \cdot 5 = 10$.

Drugo rješenje.



Kao u prvom rješenju zaključujemo da je točka S polovište dužine $\overline{BM}$. Definirajmo nadalje točku N kao presjek paralele s $\overline{AC}$ kroz S i dužine $\overline{BC}$.

Trokuti BSN i BMC su slični po K-K poučku jer dijele kut u vrhu B i $\overline{SN} \parallel \overline{MC}$. Kako $|BM| = 2|BS|$ slijedi da je $|BC| = 2|BN|$, odnosno $|BN| = (|BP| + |PC|)/2 = (2 + 3)/2 = 2.5$.

Također su trokuti PNS i PCA slični jer dijele kut u vrhu P i $\overline{NS} \parallel \overline{CA}$. Iz toga dobivamo

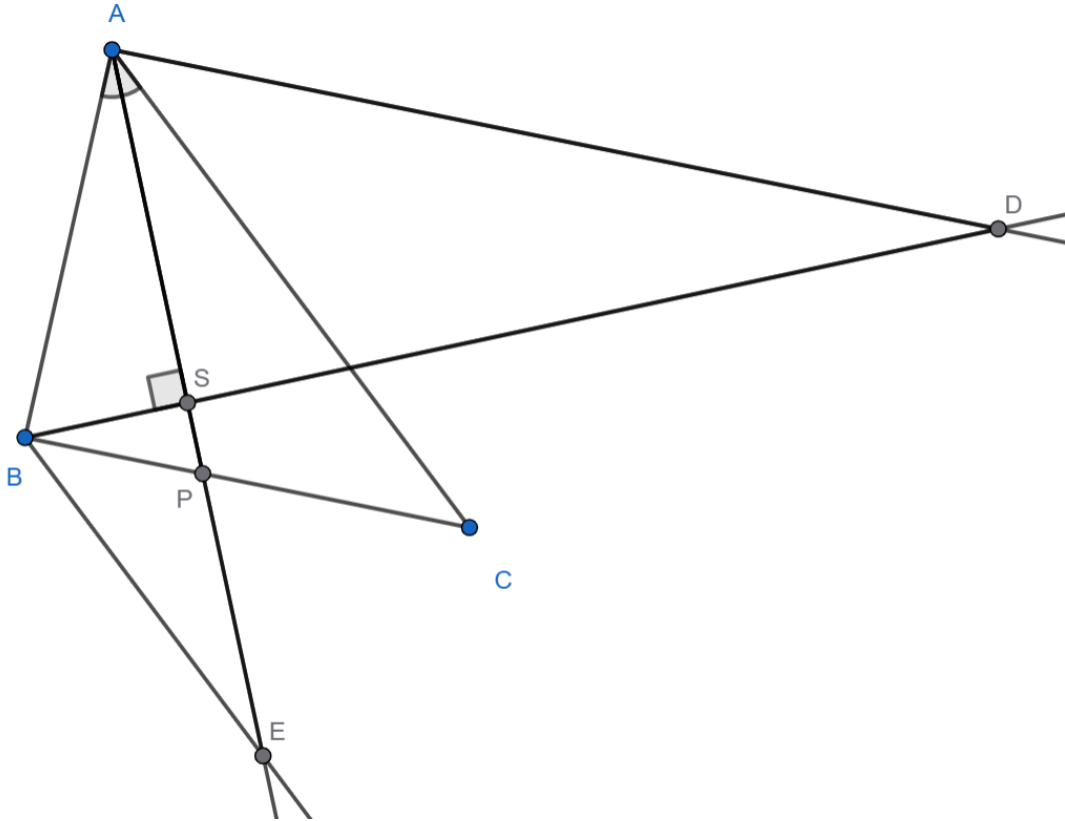
$$\frac{|PS|}{|PA|} = \frac{|PN|}{|PC|} = \frac{|BN| - |BP|}{|NC|} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}.$$

Konačno, trokuti BSP i DSA su slični jer $\angle BSP = \angle DSA = 90^\circ$ i $\angle PBS = \angle ADS$ jer $\overline{BP} \parallel \overline{AD}$. Sada dobivamo

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|SA|} = \frac{\frac{1}{6}|PA|}{\frac{5}{6}|PA|} = \frac{1}{5},$$

odnosno $|AD| = 5|BP| = 10$.

Treće rješenje.



Povucimo paralelu sa stranicom $\overline{AC}$ iz točke B i označimo s E njeno sjecište sa simetralom kuta pri vrhu A . Imamo $\sphericalangle AEB = \sphericalangle EAC = \sphericalangle BAE$, pa je trokut ABE jednakokrani i vrijedi $|AB| = |BE|$. Dužina BS je visina na osnovicu jednakokrannog trokuta pa je točka S polovište dužine $\overline{AE}$.

Primijetimo sada dva para sličnih trokuta: $\triangle BPS \sim \triangle DAS$ i $\triangle BEP \sim \triangle CAP$ (ponovno po K-K poučku, analogno kao u prvom rješenju). Iz ovih sličnosti dobivamo sljedeće omjere:

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$

$$\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|EP|}{|AP|}.$$

Iz drugog niza jednakosti dobivamo $\frac{|EP|}{|AP|} = \frac{2}{3}$. Primijetimo usput da iz ovog niza jednakosti dobijemo i $\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{3}$, što je poznati teorem o omjeru u kojem simetrala unutarnjeg kuta u trokutu dijeli nasuprotnu stranicu.

Označimo $|AE| = 2y$. Tada je $|AS| = |ES| = y$. Sada iz $2y = |EP| + |AP|$ dobivamo $|EP| = \frac{4}{5}y$, pa je $|PS| = |ES| - |EP| = \frac{1}{5}y$. Iz prvog niza jednakosti sada dobivamo

$$|AD| = |BP| \cdot \frac{|AS|}{|PS|} = 2 \cdot \frac{y}{\frac{1}{5}y} = 2 \cdot 5 = 10.$$

Zadatak J-5.6. [60 bodova]

Odredi najmanji prirodni broj N za koji vrijedi sljedeća tvrdnja:

među bilo kojih N različitih prirodnih brojeva postoje četiri različita broja a, b, c i d takva da $a + b$ i $c + d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20.

Rješenje.

Promatrat ćemo ostatke brojeva pri dijeljenju s 20. Primijetimo da ako među N različitih prirodnih brojeva postoje međusobno različiti brojevi a, b, c i d , takvi da a i c imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20 i b i d imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20, onda $a + b$ i $c + d$ imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20 pa je tvrdnja zadovoljena.

Pretpostavimo da to nije slučaj. Tada najviše 3 broja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20, dok su svi ostali ostaci različiti. Označimo ostatak koji se možda ponavlja s x . To znači da imamo bar $N - 2$ različitih ostataka (x i $N - 3$ ostalih ostataka koji su svi različiti i različiti od x).

Od $N - 2$ brojeva možemo napraviti $\frac{(N-2)(N-1)}{2}$ parova. Naime, prvi broj u paru možemo odabrati na $N - 2$ načina, a drugi biramo od preostalih $N - 1$ brojeva. Kako redoslijed brojeva nije bitan, nije važno jesmo li prvo birali a pa b ili b pa a . Zato broj načina treba još podijeliti s 2. Npr. ako od 3 broja 1,2,3 želimo odabrati 2, imamo $3 \cdot 2 = 6$ parova:

$$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2),$$

ali redoslijed nije bitan pa zapravo imamo 3 različita para.

Ako je $\frac{(N-2)(N-1)}{2} \geq 21$, to jest $N \geq 9$, onda sume elemenata neka dva para imaju po *Dirichletovom principu* iste ostatke pri dijeljenju s 20. Neka su ta dva para (a, b) i (c, d) . Ukoliko su svi brojevi a, b, c i d različiti, našli smo tražene brojeve. No može se dogoditi da ta dva para sadrže isti broj. Neka su to parovi (a, b) i (a, c) . To znači da b i c imaju iste ostatke pri dijeljenju s 20. Ali krenuli smo od $N - 2$ brojeva koji svi imaju različite ostatke pa to nije moguće.

Pokazali smo da za $N \geq 9$ uvijek vrijedi tvrdnja zadatka. Pokažimo još primjerom da tvrdnja ne vrijedi za $N < 9$. Ako odaberemo sljedećih 8 prirodnih brojeva:

$$20, 40, 60, 1, 2, 4, 7, 12$$

ne možemo naći 2 para koji u sumi imaju isti ostatak pri dijeljenju s 20. To znači da ako odaberemo bilo kojih N od ovih 8 brojeva ($N \leq 8$), tvrdnja ne vrijedi. Stoga je 9 doista najmanji prirodni broj za koji tvrdnja vrijedi.

Zadatak J-5.7. [70 bodova]

Neka je $p > 3$ prost broj. Odredi sve uređene parove (a, b) cijelih brojeva za koje vrijedi:

$$a^2 + 3ab + 2p(a + b) + p^2 = 0.$$

Prvo rješenje.

Riješimo danu jednadžbu po nepoznanici b :

$$\begin{aligned} a^2 + 2ap + p^2 + b(3a + 2p) &= 0 \\ b(3a + 2p) &= -(a + p)^2 \\ b &= -\frac{(a + p)^2}{3a + 2p}. \end{aligned}$$

Kako je b cijeli broj, mora vrijediti $3a + 2p \mid (a + p)^2$. Tada vrijedi i $3a + 2p \mid 9 \cdot (a + p)^2 = (3a + 3p)^2$. Izraz $(3a + 3p)^2$ možemo rastaviti kao

$$(3a + 2p + p)^2 = (3a + 2p)^2 + 2(3a + 2p)p + p^2.$$

Slijedi da vrijedi $3a + 2p \mid p^2$. Kako je p prost broj, znamo da su svi njegovi cjelobrojni djelitelji ± 1 , $\pm p$ i $\pm p^2$; dakle, $3a + 2p$ mora biti jednako nekom od ovih brojeva.

Neka je stoga $3a + 2p = P$, gdje je P neki od brojeva ± 1 , $\pm p$ i $\pm p^2$. Vidimo da mora vrijediti $3 \mid P - 2p$, pa ćemo podijeliti daljnja razmatranja u ovisnosti o ostatku pri dijeljenju broja p s 3; kako je p prost i veći od 3, mora biti $p = 3k + 1$ ili $p = 3k - 1$ za neki prirodni broj k .

1.° $p = 3k + 1$

Ako je $P = 1$, dobijemo $3a = 1 - 2p = 1 - 2(3k + 1) = -6k - 1$, što nije moguće. Za $P = -1$ dobijemo $3a = -6k - 3$, tj. $a = -2k - 1$; uvrštavanjem u izraz za b dobivamo $b = k^2$. Zaključujemo da svi uređeni parovi $(a, b) = (-2k - 1, k^2)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k + 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu.

Ako je $P = p$, dobivamo $3 \mid -p$, što nije moguće. Ako je $P = -p$, vrijedi $3a = -3p$, tj. $a = -p = -3k - 1$; tada vrijedi $b = 0$, pa u ovom slučaju svi uređeni parovi $(a, b) = (-3k - 1, 0)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k + 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu.

Ako je $P = p^2$, nije zadovoljeno $3 \mid P - 2p$. Ako je $P = -p^2 = -9k^2 - 6k - 1$, dobijemo $3a = -p^2 - 2p = -p(p + 2) = -(3k + 1)(3k + 3)$, tj. $a = -(3k + 1)(k + 1)$. Tada dobivamo $b = k^2$, pa i svi uređeni parovi $(a, b) = (-(3k + 1)(k + 1), k^2)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k + 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu.

2.° $p = 3k - 1$

Ako je $P = 1$, vrijedi $3a = 1 - 2p = 1 - 2(3k - 1) = -6k + 3$, tj. $a = -2k + 1$; dalje dobivamo $b = -k^2$, pa su svi uređeni parovi $(a, b) = (-2k + 1, -k^2)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k - 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu. Ako je $P = -1$ dobijemo $3a = -1 - 2p = -6k + 1$, što nije moguće.

Ponovno nije moguće $P = p$. Ako je $P = -p$, ponovno dobivamo $3a = -3p$, tj. $a = -p = -3k + 1$; opet vrijedi $b = 0$, pa su i svi uređeni parovi $(a, b) = (-3k + 1, 0)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k - 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu.

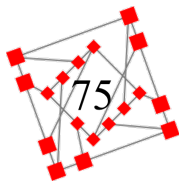
Ako je $P = p^2$, vrijedi $3a = p^2 - 2p = p(p - 2) = (3k - 1)(3k - 3)$, tj. $a = (3k - 1)(k - 1)$; dobijemo $b = -k^2$, pa svi uređeni parovi $(a, b) = ((3k - 1)(k - 1), -k^2)$, takvi da je k prirodan broj za koji je $3k - 1$ prost broj, zadovoljavaju danu jednadžbu. Konačno, ako je $P = -p^2$, ne vrijedi $3 \mid P - 2p$.

Drugo rješenje.

Označimo $d = (a, b)$. Iz početne jednadžbe imamo $d \mid p^2$, tj. d može biti p^2 , p ili 1. Ako je $d = p^2$ onda možemo zapisati $a = p^2x$, $b = p^2y$ pri čemu su x i y relativno prosti cijeli brojevi. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu imamo $p^4x^2 + 3p^4xy + 2p^3(x + y) + p^2 = 0$ što daje kontradikciju modulo p^3 .

Ako je $d = p$, stavimo $a = px$ i $b = py$ pri čemu su x i y relativno prosti cijeli brojevi. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo $x^2 + 3xy + 2(x + y) + 1 = 0$, odakle slijedi da je $y = -\frac{(x+1)^2}{3x+2}$. Lagano se provjeri da su $x + 1$ i $3x + 2$ relativno prosti za svaki cijeli broj x iz čega slijedi da y može biti cijeli broj jedino ako je $3x + 2 = \pm 1$. Ovime dobivamo prvo rješenje kada je $x = -1$ i $y = 0$, tj. $a = -p$ i $b = 0$.

Ako je $d = 1$, onda znamo da su a i b relativno prosti. Nadopunjavanjem do potpunog kvadrata početnu jednadžbu možemo zapisati u obliku $(a + b + p)^2 = b(b - a)$. Budući da su a i b relativno prosti imamo da su i brojevi b i $b - a$ relativno prosti. Posebno, iz gornje jednadžbe onda slijedi da je $b = x^2$ i $b - a = y^2$ za neke relativno proste cijele brojeve x i y . Uvrštavanjem u početnu jednadžbu i sređivanjem dolazimo do jednadžbe $2x^2 - y^2 + p = xy$. Gornju jednadžbu možemo zapisati u obliku $(x - y)(2x + y) = -p$ koja se lagano riješi te dobijemo preostala rješenja u ovisnosti o p modulo 3 kao u prvom rješenju.



MEDO 2024./2025.

Peto kolo

4.4. – 6.4.2025.

Loomen

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-5.1. [10 bodova]

U svako polje 3×3 tablice upisan je po jedan realan broj tako da vrijedi:

- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg stupca iznosi 1
- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg retka iznosi 1
- umnožak svih brojeva iz bilo kojeg 2×2 kvadrata iznosi 2.

Koji je broj upisan u središnje polje tablice?

Rješenje.

Označimo brojeve koji se nalaze u tablici s $a_1, a_2, \dots, a_9$ kao na slici:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Iz trećeg svojstva slijedi da je umnožak brojeva iz gornja 2×2 kvadrata jednak 4:

$$(a_1 a_2 a_4 a_5) \cdot (a_2 a_3 a_5 a_6) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Isti umnožak možemo napisati i na drugačiji način:

$$(a_1 a_2 a_4 a_5) \cdot (a_2 a_3 a_5 a_6) = (a_1 a_2 a_3) \cdot (a_4 a_5 a_6) \cdot a_2 a_5 = 1 \cdot 1 \cdot a_2 a_5 = a_2 a_5,$$

gdje smo koristili svojstvo da je umnožak svakog retka jednak 1. Dobivamo $a_2 a_5 = 4$.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Analognim postupkom iz donja dva retka zaključujemo da vrijedi $a_5 a_8 = 4$. Odatle slijedi

$$(a_2 a_5) \cdot (a_5 a_8) = 4 \cdot 4$$

$$(a_2 a_5 a_8) \cdot a_5 = 16$$

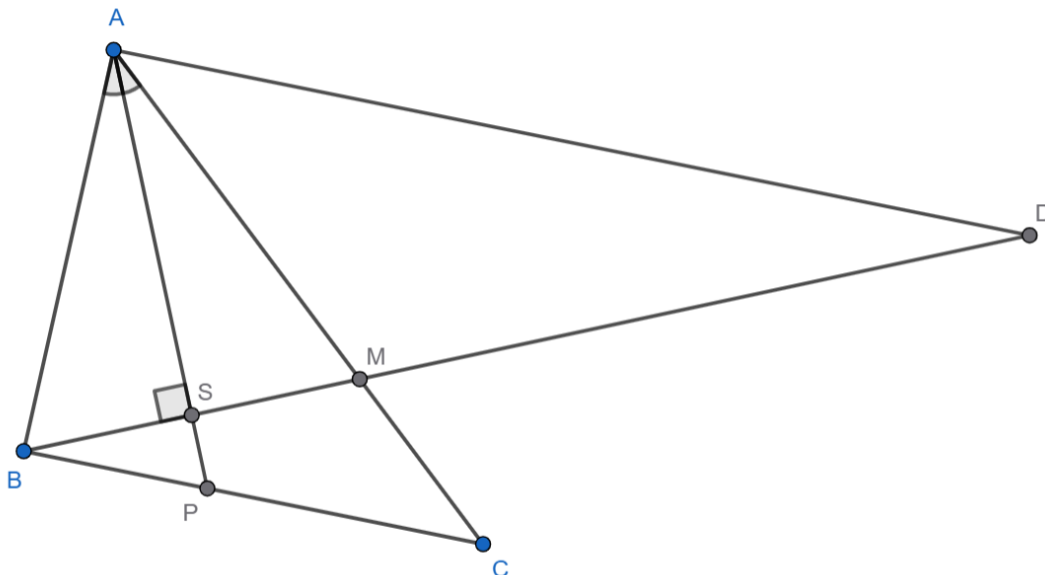
$$a_5 = 16,$$

gdje smo koristili da je umnožak brojeva iz drugog stupca jednak 1. Dakle, broj 16 je upisan u središnje polje.

Zadatak S-5.2. [20 bodova]

Neka je ABC šiljastokutan trokut. Simetrala unutarnjeg kuta trokuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P pri čemu je $|BP| = 2$ i $|PC| = 3$. Pravac koji prolazi točkom A i paralelan je sa stranicom $\overline{BC}$ siječe pravac koji prolazi točkom B i okomit je na pravac AP u točki D . Koliko iznosi $|AD|$?

Prvo rješenje.



Označimo sa S sjecište dužina $\overline{AP}$ i $\overline{BD}$ te s M sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

Uočimo sada da su pravokutni trokuti ASB i ASM sukladni po KSK poučku. Doista, $\angle BAC = \angle SAM = \frac{\alpha}{2}$, dijele stranicu $\overline{AS}$ i $\angle ASB = \angle ASM = 90^\circ$. Zaključujemo da vrijedi $|BS| = |SM|$, tj. točka S je polovište dužine $\overline{BM}$.

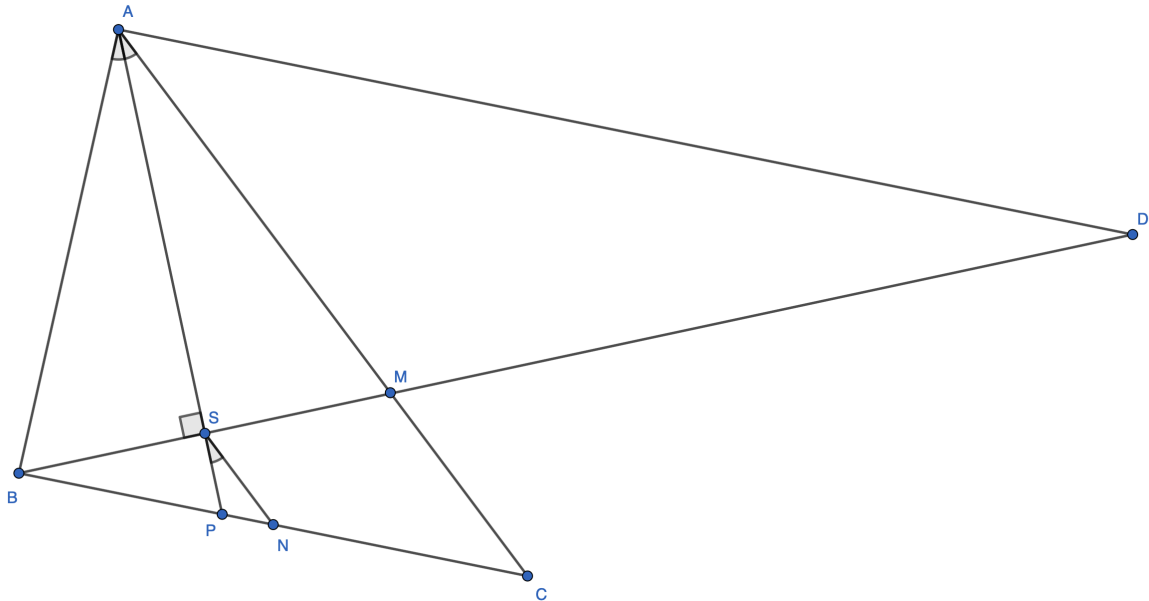
Uočimo sada dva para sličnih trokuta: $\triangle BPS \sim \triangle DAS$ i $\triangle BCM \sim \triangle DAM$. Doista, oba para trokuta su slična po K-K poučku: parovi kutova su im jednaki kao vršni kutovi ili kutovi uz presječnicu usporednih pravaca. Iz ovih sličnosti dobivamo sljedeće omjere:

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$

$$\frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|BM|}{|DM|}$$

Označimo $|BS| = |SM| = x$. Iz prvog niza jednakosti imamo $\frac{2}{|AD|} = \frac{|BS|}{|DS|} = \frac{x}{|DM| + x}$, a iz drugog $\frac{5}{|AD|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{2x}{|DM|}$. Dijeljenjem ovih dviju jednakosti dobivamo $\frac{5}{2} = \frac{2(|DM| + x)}{|DM|} = 2 + \frac{2x}{|DM|}$ iz čega slijedi $\frac{2x}{|DM|} = \frac{|BM|}{|DM|} = \frac{1}{2}$. Zaključujemo da je stranica $\overline{AD}$ dvostruko duža od stranice $\overline{BC}$, tj. $|AD| = 2 \cdot |BC| = 2 \cdot 5 = 10$.

Drugo rješenje.



Kao u prvom rješenju zaključujemo da je točka S polovište dužine $\overline{BM}$. Definirajmo nadalje točku N kao presjek paralele s $\overline{AC}$ kroz S i dužine $\overline{BC}$.

Trokuti BSN i BMC su slični po K-K poučku jer dijele kut u vrhu B i $\overline{SN} \parallel \overline{MC}$. Kako $|BM| = 2|BS|$ slijedi da je $|BC| = 2|BN|$, odnosno $|BN| = (|BP| + |PC|)/2 = (2 + 3)/2 = 2.5$.

Također su trokuti PNS i PCA slični jer dijele kut u vrhu P i $\overline{NS} \parallel \overline{CA}$. Iz toga dobivamo

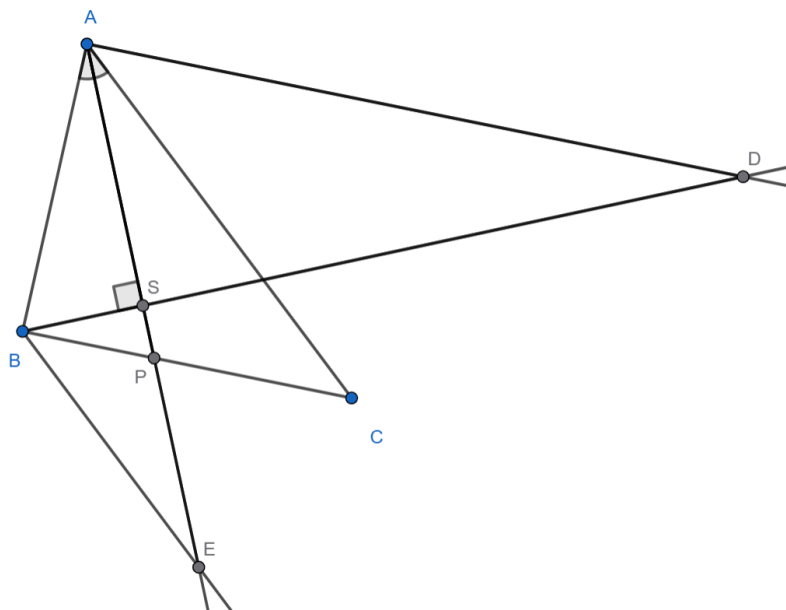
$$\frac{|PS|}{|PA|} = \frac{|PN|}{|PC|} = \frac{|BN| - |BP|}{|NC|} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6}.$$

Konačno, trokuti BSP i DSA su slični jer $\angle BSP = \angle DSA = 90^\circ$ i $\angle PBS = \angle ADS$ jer $\overline{BP} \parallel \overline{AD}$. Sada dobivamo

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|SA|} = \frac{\frac{1}{6}|PA|}{\frac{5}{6}|PA|} = \frac{1}{5},$$

odnosno $|AD| = 5|BP| = 10$.

Treće rješenje.



Povucimo paralelu sa stranicom $\overline{AC}$ iz točke B i označimo s E njeno sjecište sa simetralom kuta pri vrhu A . Imamo $\sphericalangle AEB = \sphericalangle EAC = \sphericalangle BAE$, pa je trokut ABE jednakokračan i vrijedi $|AB| = |BE|$. Dužina BS je visina na osnovicu jednakokračnog trokuta pa je točka S polovište dužine $\overline{AE}$.

Primijetimo sada dva para sličnih trokuta: $\triangle BPS \sim \triangle DAS$ i $\triangle BEP \sim \triangle CAP$ (ponovno po K-K poučku, analogno kao u prvom rješenju). Iz ovih sličnosti dobivamo sljedeće omjere:

$$\frac{|BP|}{|AD|} = \frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$

$$\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|EP|}{|AP|}.$$

Iz drugog niza jednakosti dobivamo $\frac{|EP|}{|AP|} = \frac{2}{3}$. Primijetimo usput da iz ovog niza jednakosti dobijemo i $\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{3}$, što je poznati teorem o omjeru u kojem simetrala unutarnjeg kuta u trokutu dijeli nasuprotnu stranicu.

Označimo $|AE| = 2y$. Tada je $|AS| = |ES| = y$. Sada iz $2y = |EP| + |AP|$ dobivamo $|EP| = \frac{4}{5}y$, pa je $|PS| = |ES| - |EP| = \frac{1}{5}y$. Iz prvog niza jednakosti sada dobivamo

$$|AD| = |BP| \cdot \frac{|AS|}{|PS|} = 2 \cdot \frac{y}{\frac{1}{5}y} = 2 \cdot 5 = 10.$$

Zadatak S-5.3. [30 bodova]

Riješi sljedeći sustav jednačbi u skupu realnih brojeva:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= x_1 + \frac{2}{x_1} \\ 2x_3 &= x_2 + \frac{2}{x_2} \\ &\vdots \\ 2x_{2025} &= x_{2024} + \frac{2}{x_{2024}} \\ 2x_1 &= x_{2025} + \frac{2}{x_{2025}}. \end{aligned}$$

Rješenje.

Primijetimo najprije da su svi brojevi istog predznaka. Naime, iz prve jednačbe zaključujemo da su x_1 i x_2 istog predznaka, iz druge da su x_2 i x_3 itd. Također, svi brojevi su različiti od 0. Pretpostavimo prvo da su svi pozitivni. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$x_i + \frac{2}{x_i} \geq 2\sqrt{2}, \text{ za sve } i = 1, 2, \dots, 2025.$$

Stoga iz sustava zaključujemo da je $x_i \geq \sqrt{2}$ za sve $i = 1, 2, \dots, 2025$, a to znači da je $\frac{2}{x_i} \leq \sqrt{2}$. Sada zbrajanjem svih jednačbi dobivamo:

$$2025\sqrt{2} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2025} = \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \dots + \frac{2}{x_{2025}} \leq 2025\sqrt{2}.$$

Oдавde slijedi da ne može biti $x_i > \sqrt{2}$ pa mora biti $x_1 = x_2 = \dots = x_{2025} = \sqrt{2}$.

Ako su pak svi brojevi negativni, pomnožimo sve jednačbe s -1 i stavimo $a_i = -x_i$. Tada su $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ pozitivni pa opet zaključujemo $a_1 = a_2 = \dots = a_{2025} = \sqrt{2}$, odakle je $x_1 = x_2 = \dots = x_{2025} = -\sqrt{2}$.

Zadatak S-5.4. [40 bodova]

Neka je $k > 2$ prirodan broj. Dokaži da je $2^{2^k-1} - 2^k - 1$ složen broj.

Rješenje.

Neka je $N = 2^{2^k-1} - 2^k - 1$.

Ako je n paran, 2^n daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, a ako je n neparan, ostatak je 2. Stoga, ako je k paran, N je djeljiv s 3 i veći od 3 pa je složen.

Neka je k neparan. Uočimo:

$$2N = 2^{2^k} - 2^{k+1} - 2 = (2^{2^k} - 1) - (2^{k+1} + 1).$$

Dalje, raspisujući uzastopno razliku kvadrata, imamo

$$(2^{2^k} - 1) = (2^{2^{k-1}} + 1)(2^{2^{k-1}} - 1) = (2^{2^{k-1}} + 1)(2^{2^{k-2}} + 1)(2^{2^{k-2}} - 1) = \dots = (2^{2^{k-1}} + 1)(2^{2^{k-2}} + 1) \dots (2^{2^0} + 1)$$

pa je $2N = (2^{2^{k-1}} + 1)(2^{2^{k-2}} + 1) \dots (2^{2^0} + 1) - (2^{k+1} + 1)$.

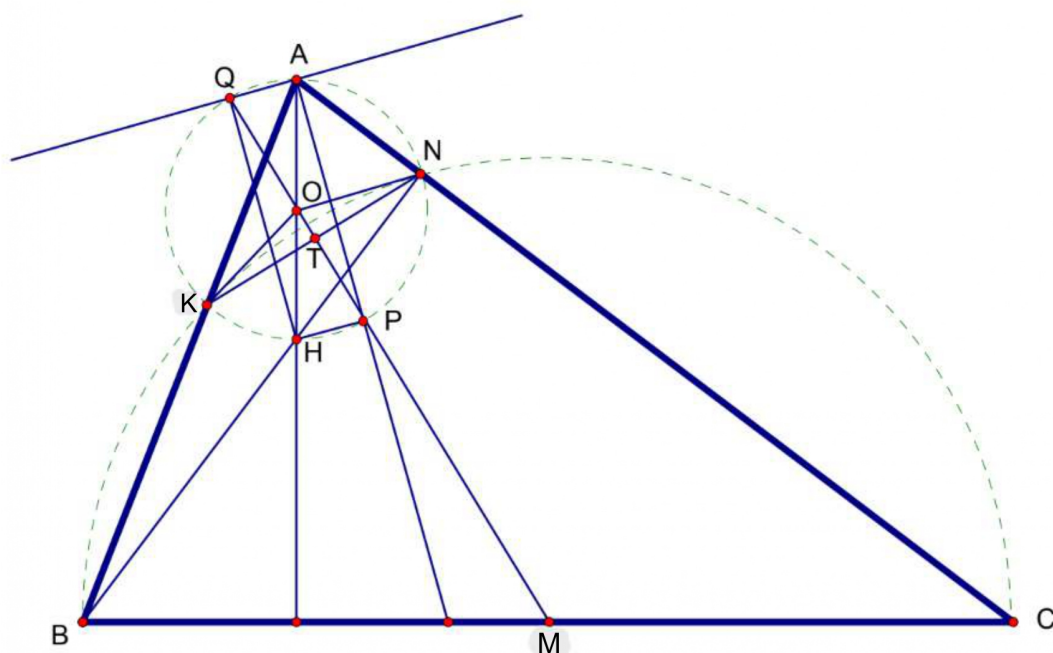
Kako je $k+1$ paran možemo pisati $k+1 = 2^a t$, za $a \geq 1$ i $t \geq 1$ neparan. Jer je t neparan imamo $2^{k+1} + 1 = (2^{2^a} + 1)(2^{2^a(t-1)} - 2^{2^a(t-2)} + \dots - 2^{2^a} + 1)$ pa $2^{2^a} + 1 \mid 2^{k+1} + 1$.

Ako je $a \geq k$, tada je $k+1 \geq 2^k$, što ne vrijedi za $k > 2$. Dakle $a \leq k-1$ pa se faktor $2^{2^a} + 1$ pojavljuje u produktu $(2^{2^{k-1}} + 1)(2^{2^{k-2}} + 1) \dots (2^{2^0} + 1)$. Stoga $2^{2^a} + 1 \mid 2N$, a kako je to neparni djelitelj, slijedi $2^{2^a} + 1 \mid N$.

Ostaje još pokazati da je $2^{2^a} + 1 \neq N$ jer tada N ima djelitelja različitog od 1 i N . Ukoliko je $N = 2^{2^a} + 1$, tada jer je $a \geq 1$, N daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4. S druge strane kako je $k > 2$ iz originalnog zapisa slijedi da N daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 što je kontradikcija.

Zadatak S-5.5. [50 bodova]

Dan je trokut ABC s ortocentrom H . Nožišta okomica iz točke H na simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta pri vrhu A su redom točke P i Q . Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$. Dokaži da točke P , Q i M leže na istom pravcu.

Rješenje.

Ako je $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, tada se točke P i Q podudaraju pa tvrdnja trivijalno vrijedi. Neka je dakle u nastavku $\sphericalangle BAC \neq 90^\circ$. Četverokut $HPAQ$ je očito pravokutnik, stoga mu možemo opisati kružnicu. Označimo njeno središte s O , a njena sjecišta sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom s K i N . U nastavku dokazujemo da su točke K i N nožišta okomica iz odgovarajućih vrhova u trokutu ABC , iz čega slijedi da je četverokut $BCNK$ tetivan sa središtem opisane kružnice u točki M te da je pravac QP simetrala tetive $\overline{KN}$, čime će biti dokazana tražena tvrdnja.

Označimo s T presjek pravca PQ (na kojem se nalazi središte kružnice O) s dužinom $\overline{KN}$. Kako je AP simetrala kuta kod vrha A , vrijedi $\sphericalangle KOP = 2 \cdot \sphericalangle KAP = 2 \cdot \sphericalangle PAN = \sphericalangle PON$. Sada vidimo da su trokuti KTO i NTO sukladni po S-K-S poučku. Ovo dokazuje da je pravac QP simetrala dužine $\overline{KN}$.

Kako je $\overline{AH}$ promjer kružnice opisane pravokutniku $HPAQ$, po Talesovom poučku vrijedi $\sphericalangle HNA = \sphericalangle HKA = 90^\circ$, a jer je H ortocentar trokuta ABC , slijedi da su dužine BN i CK visine u trokutu ABC . Sada po obratu Talesovog poučka zaključujemo da točke K i N leže na kružnici čiji je promjer stranica $\overline{BC}$.

Konačno, dokazali smo da je pravac QP simetrala tetive KN kružnice koja prolazi točkama B, C, N i K , iz čega slijedi da taj pravac prolazi i kroz središte te kružnice, a to je upravo točka M .

Zadatak S-5.6. [60 bodova]

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- (i) postoji realan broj M takav da je $f(x) < M$ za sve realne brojeve x
- (ii) vrijedi $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$ za sve realne brojeve x i y .

Rješenje.

Za uređeni par realnih brojeva (x, y) označimo s $P(x, y)$ izraz $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$. Uvrstimo nekoliko pogodno odabranih konkretnih vrijednosti za x i y .

Iz $P(0, y)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} f(0 \cdot f(y)) + yf(0) &= 0 \cdot f(y) + f(0 \cdot y) \\ f(0) + yf(0) &= 0 + f(0) \\ yf(0) &= 0. \end{aligned}$$

Kako je y proizvoljan realan broj, mora biti $f(0) = 0$.

Iz $P(x, 1)$ slijedi:

$$\begin{aligned} f(x \cdot f(1)) + 1 \cdot f(x) &= xf(1) + f(x \cdot 1) \\ f(xf(1)) + f(x) &= xf(1) + f(x) \\ f(xf(1)) &= xf(1) \end{aligned}$$

Ako bi bilo $f(1) \neq 0$, tada bi iz zadnje jednakosti slijedilo da je funkcija neograničena odozgo, što je u kontradikciji s prvim uvjetom zadatka. Stoga vrijedi $f(1) = 0$.

Iz $P(1, y)$ sada dobivamo:

$$\begin{aligned} f(1 \cdot f(y)) + yf(1) &= 1 \cdot f(y) + f(1 \cdot y) \\ f(f(y)) + y \cdot 0 &= f(y) \\ f(f(y)) &= f(y) \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $f^{(2)}(y) = f(f(y)) = f(y)$, gdje je $f^{(2)} = f \circ f$. Iz ovoga induktivno slijedi da za bilo koji prirodni broj n vrijedi $f^{(n)}(y) = f^{(n-1)}(f(y)) = f(y)$ za sve $y \in \mathbb{R}$. Kako bi f bila odozgo ograničena, mora vrijediti $f(y) \leq 0$ za sve $y \in \mathbb{R}$.

Vidimo da je $f \equiv 0$, tj. nul-funkcija $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, jedno rješenje dane funkcijske jednadžbe. Pretpostavimo sada da za neki realni broj r vrijedi $f(r) \neq 0$. Znamo da je $f(r) < 0$.

Neka je $t \in \mathbb{R}$ takav da $f(t) = 0$. Iz $P(r, t)$ tada dobijemo $f(tr) = t \cdot f(r)$. Kako je $f(x) \leq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je t nenegativan.

Iz $P\left(x, \frac{1}{x}\right)$, gdje je $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, imamo

$$f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{1}{x}f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right),$$

a iz $P\left(\frac{1}{x}, x\right)$:

$$f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}f(x).$$

Zbrajanjem ove dvije jednakosti dobivamo $f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = 0$. No, kako su oba pribrojnika nepozitivna, mora biti $f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sada iz prethodnog odjeljka zaključujemo da mora biti $xf\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ i $\frac{1}{x}f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Kako otprije znamo da je vrijednost funkcije uvijek nepozitivna, slijedi da za sve $x > 0$ mora biti $f(x) = 0$.

Iz $P(x, -1)$ dobijemo

$$f(xf(-1)) - f(x) = xf(-1) + f(-x).$$

Ako uvrstimo $x < 0$ onda znamo da je $f(-x) = 0$ te $f(xf(-1)) = 0$ jer je $xf(-1) > 0$. Slijedi da za $x < 0$ vrijedi $f(x) = -xf(-1)$. Iskoristimo sada naš $r \in \mathbb{R}$ za koji znamo da vrijedi $f(r) < 0$. Iz prethodne jednakosti uvrštavanjem $x = f(r)$ dobivamo $f(f(r)) = -f(r)f(-1)$. No, otprije znamo da vrijedi i $f(f(r)) = 2f(r)$. Izjednačavanjem ovih izraza dobivamo $f(-1) = -2$. Sada možemo zaključiti da za sve $x < 0$ vrijedi $f(x) = 2x$.

Uvrštavanjem se provjeri da funkcije $f \equiv 0$ i $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$ zadovoljavaju početne uvjete.

Zadatak S-5.7. [70 bodova]

Dani prirodni broj transformiramo nizom koraka. U svakom koraku od trenutnog broja dobivamo novi broj tako da umetnemo jedan ili više znakova „+“ između njegovih znamenki te izračunamo vrijednost dobivenog izraza. Primjerice, od broja 123 u jednom koraku možemo dobiti bilo koji od brojeva $1 + 23 = 24$, $12 + 3 = 15$ i $1 + 2 + 3 = 6$.

Odredi, ako postoji, najmanji prirodan broj M takav da opisanim postupkom možemo dobiti jednoznamenasti broj u najviše M koraka počevši od bilo kojeg prirodnog broja.

Rješenje.

Odgovor: $M = 3$.

Uočimo da nam je za broj 289 potrebno najmanje 3 koraka da dođemo do jednoznamenastog broja (npr. pomoću sljedećih koraka: $289 \rightarrow 2 + 8 + 9 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$). Time imamo da je $M \geq 3$.

Za dokaz da je upravo $M = 3$ će nam trebati sljedeće tvrdnje.

Tvrdnja 1: Iz svakog prirodnog broja $n < 289$ možemo doći do jednoznamenastog broja u najviše 2 koraka.

Dokaz.

Ako je zbroj znamenki broja n manji od 19 tada u prvom koraku možemo zbrojiti sve znamenke od

n i dobit ćemo broj $n' \leq 18$. U drugom koraku ponovo možemo zbrojiti sve znamenke od n' i time dobivamo jednoznamenasti broj.

Promotrimo preostali slučaj kada je zbroj znamenki od n veći ili jednak 19. Budući da je $n < 289$ jedini mogući takav broj je upravo $n = 199$. U tom slučaju također možemo u 2 koraka doći do jednoznamenastog broja sljedećim koracima

$$199 \longrightarrow 1 + 99 = 100 \longrightarrow 1 + 0 + 0 = 1.$$

□

Tvrdnja 2: Neka je n prirodan broj sa zbrojem znamenki $s \geq 100$. Tada u jednom koraku možemo doći do broja oblika $a0 \dots 0bc$ pri čemu je $a \leq 2$ i $bc \leq 80$.

Dokaz.

Neka je $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ i označimo s $A = \max \left\{ \sum_{2 \leq 2l \leq k} a_{2l}, \sum_{1 \leq 2l-1 \leq k} a_{2l-1} \right\}$ veći od zbrojeva znamenki parnih indeksa (bez zadnje znamenke) i znamenki neparnih indeksa.

Kako je zbroj znamenki od n jednak s redom imamo

$$s = a_0 + a_1 + \dots + a_k = a_0 + \sum_{2 \leq 2l \leq k} a_{2l} + \sum_{2 \leq 2l \leq k} a_{2l} \leq 9 + 2A,$$

iz čega slijedi da je $A \geq \frac{s-9}{2}$.

Pretpostavimo da se maksimum za A postiže za neparne indekse i promotrimo sljedeći korak:

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow \overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \dots + \overline{a_k a_{k-1}} \quad \text{ako je } k \text{ neparan,} \\ n &\longrightarrow \overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \dots + \overline{a_{k-1} a_{k-2}} + a_k \quad \text{ako je } k \text{ paran.} \end{aligned}$$

U oba slučaja imamo da novi zbroj iznosi

$$10 \sum_{1 \leq 2l-1 \leq k} a_{2l-1} + \sum_{2 \leq 2l \leq k} a_{2l} = 9 \sum_{1 \leq 2l-1 \leq k} a_{2l-1} + \sum_{1 \leq l \leq k} a_l = 9A + s.$$

Analogno, ako se maksimum za A postiže za parne znamenke onda promotrimo korak

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow a_0 \overline{a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3} + \dots + \overline{a_k a_{k-1}} \quad \text{ako je } k \text{ paran,} \\ n &\longrightarrow a_0 + \overline{a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3} + \dots + \overline{a_{k-1} a_{k-2}} + a_k \quad \text{ako je } k \text{ neparan} \end{aligned}$$

te ponovo u oba slučaja kao konačan zbroj dobijemo $9A + s$.

Promotrimo kako se promijeni konačni zbroj u prethodnom koraku ako umjesto grupiranja susjednih znamenki a_{i+1} i a_i u broj $\overline{a_{i+1} a_i}$ između njih stavimo znak plus i dobijemo $a_{i+1} + a_i$. Tada se konačni zbrojevi razlikuju za

$$\overline{a_{i+1} a_i} - (a_{i+1} + a_i) = 9a_{i+1} \leq 81.$$

Dakle, ovakvom modifikacijom prethodnog koraka će se konačni zbroj smanjiti najviše za 81.

Ovu modifikaciju možemo raditi na bilo kojem paru grupiranih znamenki iz prvog koraka. Time dobivamo sljedeći niz mogućih zbrojeva nakon gore opisanog prvog koraka s eventualnim modifikacijama $9A + s = s_l \geq s_{l-1} \geq \dots \geq s_2 \geq s_1 = s$ gdje $s_l = 9A + s$ odgovara originalnom zbroju nakon prvog koraka bez modifikacija, s_{l-1} odgovara konačnom zbroju nakon jedne modifikacije neke grupe $\overline{a_{i+1} a_i}$ koja se javlja u s_l , itd., s_2 odgovara konačnom zbroju neke grupe $\overline{a_{i+1} a_i}$ koja se javlja u s_3 te $s_1 = s$ odgovara konačnom zbroju nakon što smo proveli sve moguće modifikacije (u tom slučaju je taj zbroj upravo zbroj svih znamenki od n). Nadalje, kako s_i dobivamo jednom modifikacijom prethodnog konačnog zbroja s_{i+1} vrijedi da je $s_{i+1} - s_i \leq 81$ za sve $i = 1, 2, \dots, l-1$.

Za prirodan broj N označimo s $I_N = [10^N, 2 \cdot 10^N)$ i $J_N = [2 \cdot 10^N, 10^{N+1})$.

Budući da je $s_1 = s \geq 100$ imamo da je $s_1 \in I_N$ ili $s_1 \in J_N$ za neki $N \geq 2$.

Nadalje, korištenjem $A \geq \frac{s-9}{2}$ i $s \geq 100$ imamo da je

$$s_l = 9A + s \geq 9 \cdot \frac{s-9}{2} + s = \frac{11s-81}{2} > 5s = 5s_1.$$

Iz gornje nejednakosti slijedi da brojevi s_1 i s_l ne mogu istovremeno oba biti u I_N ili J_N . To znači da će u nizu $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \dots \leq s_l$ postojati neki indeks j tako da s_1 i s_j nisu istovremeno oba u I_N ili J_N te neka je j najmanji takav indeks.

Ovisno je li $s_1 \in I_N$ ili $s_1 \in J_N$ zbog minimalnosti indeks j i nejednakosti $s_j - s_{j-1} \leq 81$ imamo da je tada

$$s_j \in [2 \cdot 10^N, 2 \cdot 10^N + 81] \quad \text{ili} \quad s_j \in [10^{N+1}, 10^{N+1} + 81].$$

Time imamo da će zbroj s_j koji odgovara konačnom zbroju nakon modificiranog prvog koraka biti upravo oblika $s_j = \overline{a0\dots 0bc}$ pri čemu je $a \leq 2$ i $\overline{bc} \leq 80$. $\square$

Konačno, tvrdnja $M = 3$ slijedi primjenom Tvrdnje 1 i Tvrdnje 2. Promotrimo sljedeća dva slučaja:

Ako je zbroj znamenki početnog broja n manji od 100 tada u prvom koraku možemo zbrojiti sve znamenke od n . Time dobivamo novi broj $n' < 100$. Iz Tvrdnje 1 znamo da iz broja n' u najviše 2 koraka možemo doći do jednoznamenkastog broja. Dakle, zajedno s prvim korakom u kojem smo iz n došli do n' , dobivamo da u najviše 3 koraka iz n možemo doći do jednoznamenkastog broja.

S druge strane, ako je zbroj znamenki od n barem 100 primjenom Tvrdnje 2 u prvom koraku iz n možemo doći do broja oblika $\overline{a0\dots 0bc}$ pri čemu je $a \leq 2$ i $\overline{bc} \leq 80$. U idućem koraku zbrojimo sve znamenke od $\overline{a0\dots 0bc}$ i dobijemo broj $n' = a + b + c \leq 2 + 7 + 9 = 18$. Napokon, kako je $n' \leq 18$ zbrajanjem svih znamenki od n' dolazimo do jednoznamenkastog broja. Time smo u 3 koraka iz početnog broja n došli do jednoznamenkastog broja.

Za one koji žele znati (još) više: [članak](#) o problemu iz ovog zadatka u općenitoj bazi brojevnog sustava.