

MEDO 2024./2025.

Drugo kolo

30.11.2024.

Loomen

Zadaci i rješenja

Juniori

Zadatak J-2.1. [10 bodova]

Izračunaj veličinu manjega kuta između satne i minutne kazaljke ure u 15 sati 33 minute i 24 sekunde.

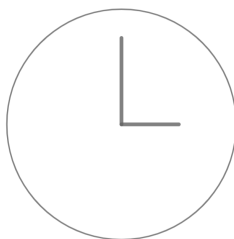
Rješenje.

Prisjetimo se da kutove mjerimo u stupnjevima i minutama, gdje je $1^\circ = 60'$ (jedan kutni stupanj ima 60 kutnih minuta). Odredimo najprije kolike kutove obriše velika (minutna) i mala (satna) kazaljka ure za jednu minutu odnosno jednu sekundu.

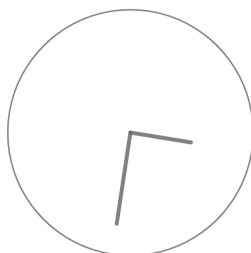
Velika kazaljka za jedan sat prođe cijeli krug, dakle za jedan sat obriše kut od 360° . Za jednu minutu prijeđe šezdesetinu tog puta, što znači da obriše kut od $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Konačno, u jednoj sekundi prijeđe šezdeseti dio tog puta, dakle obriše kut od $\frac{6^\circ}{60} = 0.1^\circ = 6'$.

Mala kazaljka za jedan sat prijeđe dvanaestinu punog kruga, što znači da obriše kut od $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Za jednu minutu prijeđe šezdesetinu tog puta, što znači da obriše kut od $\frac{30^\circ}{60} = 0.5^\circ = 30'$. Konačno, u jednoj sekundi prijeđe šezdeseti dio tog puta, dakle obriše kut od $\frac{30'}{60} = 0.5'$.

Vratimo se sada na naše pitanje. U točno 15:00:00, mala i velika kazaljka zatvaraju pravi kut (90°) i mala je ispred velike.



U iduće 33 minute velika kazaljka obriše kut od $33 \cdot 6^\circ = 198^\circ$, a mala kut od $33 \cdot 0.5^\circ = 16.5^\circ = 16^\circ 30'$. Nakon još 24 sekunde, velika obriše kut od $24 \cdot 6' = 144' = 2^\circ 24'$, a mala kut od $24 \cdot 0.5' = 12'$. Dakle, velika kazaljka od 15:00:00 do 15:33:24 ukupno prebriše kut od $198^\circ + 2^\circ 24' = 200^\circ 24'$, a mala kut od $16^\circ 30' + 12' = 16^\circ 42'$.



Stoga je u 15:33:24 velika kazaljka ispred male i kut između njih iznosi

$$200^{\circ}24' - (90^{\circ} + 16^{\circ}42') = 93^{\circ}42'.$$

Zadatak J-2.2. [20 bodova]

Mirko čita knjigu. Prvog dana pročitao je petinu knjige. Drugog dana pročitao je dvije sedmine ostatka knjige. Trećeg dana pročitao je 23 stranice. Četvrtog dana pročitao je trećinu ostatka knjige. Petog dana pročitao je polovicu preostalog dijela knjige, a šestog dana pročitao je knjigu do kraja.

Koliko najmanje stranica može imati Mirkova knjiga, ako znamo da je svakog dana pročitao prirodan broj stranica?

Rješenje.

Označimo broj stranica knjige s n ; iz uvjeta zadatka znamo da je n prirodan broj. Sada možemo izraziti broj stranica koje Mirko pročita svakog dana preko n . Prvog dana pročitao je $\frac{1}{5} \cdot n = \frac{n}{5}$ stranica; kako je svakog dana pročitao prirodan broj stranica, i ovo mora biti prirodan broj, stoga n mora biti djeljiv s 5.

Znamo da je drugog dana pročitao dvije sedmine **ostatka** knjige. Odredimo najprije koliki je taj ostatak: od ukupnog broja stranica oduzimamo stranice pročitane prvi dan, pa dobijemo $n - \frac{n}{5} = \frac{4n}{5}$. Dakle, drugog dana je pročitao još $\frac{2}{7} \cdot \frac{4n}{5} = \frac{8n}{35}$. Kako i ovaj broj mora biti prirodan, zaključujemo da je n djeljiv s 35, jer 8 nema zajedničkih faktora s 35. Nakon drugog dana preostane mu još $\frac{4n}{5} - \frac{8n}{35} = \frac{4n}{7}$ stranica.

Trećeg dana pročitao je daljnje 23 stranice, pa mu je ostalo još $\frac{4n}{7} - 23 = \frac{4n-161}{7}$ stranica. Četvrtog dana pročita još jednu trećinu preostalih stranica, pa mu ostane još dvije trećine ostatka, što iznosi $\frac{2}{3} \cdot \frac{4n-161}{7} = \frac{8n-322}{21}$. Petog dana pročita *polovicu* preostalog dijela (*isprike još jednom svima na pogrešci prilikom originalnog prijepisa zadatka*), pa mu ostane još $\frac{1}{2} \cdot \frac{8n-322}{21} = \frac{4n-161}{21}$ stranica, koje pročita šesti i zadnji dan.

Svi navedeni razlomci moraju biti prirodni brojevi. Stoga zaključujemo da n mora biti djeljiv s 35 te da $4n - 161$ mora biti djeljiv s 21. Također, mora vrijediti i $4n - 161 > 0$, tj. $n > 40$. Provjerom prvih nekoliko višekratnika broja 35 (35, 70, 105, 140, ...) dobijemo da je 140 najmanji broj koji zadovoljava sve uvjete. Stoga je najmanji mogući broj stranica Mirkove knjige solidnih 140.

Zadatak J-2.3. [30 bodova]

Odredi sve trojke znamenaka a , b i c (uz $a, c \neq 0$) takve da vrijedi jednakost:

$$\overline{abac} = a \cdot \overline{aa} \cdot \overline{c6}.$$

Rješenje.

S desne strane jednakosti imamo umnožak tri prirodna broja: a , $\overline{aa}$ i $\overline{c6}$; pogledajmo možemo li nešto zaključiti iz toga. Zadnji broj $\overline{c6}$ završava na znamenku 6, stoga je sigurno paran broj (broj je paran onda i samo onda kad završava na parnu znamenku). Kada u umnošku imamo paran broj, konačni umnožak mora također biti paran. Stoga je broj s desne strane jednakosti paran, pa takav mora biti i broj $\overline{abac}$ s lijeve strane. Njegova zadnja znamenka je c , pa zaključujemo da c mora biti paran. Kako zbog uvjeta zadatka ne može biti 0, ostaju nam 4 mogućnosti: $c = 2, 4, 6$ ili 8 .

Promotrimo najprije mogućnost $c = 2$; broj $\overline{c6}$ je tada jednak 26. Primijetimo da vrijedi $\overline{aa} = 10a + a = 11a$. Jednakost sada postaje:

$$\overline{aba2} = a \cdot 11a \cdot 26 = a^2 \cdot 11 \cdot 26.$$

Desna strana jednakosti sada ovisi samo o vrijednosti znamenke a . Sada bismo mogli promatrati sve mogućnosti za a i u svakom slučaju odrediti je li jednakost zadovoljena za neki izbor znamenke b ; no, već znamo zadnju znamenku broja s lijeve strana pa si možemo skratiti posao. Pogledajmo koliko može iznositi zadnja znamenka broja s desne strane. Znamo da je zadnja znamenka umnoška jednaka zadnjoj znamenki umnoška zadnjih znamenaka (jednostavnije rečeno, zadnja znamenka umnoška ovisi jedino o zadnjim znamenkama faktora). Uvrštavamo redom moguće vrijednosti za a (radi lakšeg zapisa koristimo modularnu aritmetiku s modulom 10, za pojašnjenje vidi [Edukativno rješenje 5. zadatka iz prošlog kola](#)):

a	$a^2 \pmod{10}$	$a^2 \cdot 11 \cdot 26 \pmod{10}$
1	1	6
2	4	4
3	9	4
4	6	6
5	5	0
6	6	6
7	9	4
8	4	4
9	1	6

Primjećujemo da u nijednom slučaju zadnja znamenka umnoška nije 2 (primijetite usput simetriju oko srednjeg umnoška; to nije slučajno, probajte shvatiti zašto; pojasnit ćemo na radionici). Stoga jednakost nije zadovoljena ni za jedan a , pa nema rješenja u slučaju $c = 2$.

Promatrajmo sada slučaj $c = 4$. Jednakost postaje:

$$\overline{aba4} = a^2 \cdot 11 \cdot 46.$$

Provedena analiza zadnje znamenke pokazuje da su jedine mogućnosti za a znamenke 2, 3, 7, 8. Uvrštavajući ove vrijednosti redom dobijemo umnoške 2024, 4554, 24794, 32384. Vidimo da jedino prvi umnožak ima traženi oblik $\overline{abac}$, pa je jedina tražena trojka u ovom slučaju $(a, b, c) = (2, 0, 4)$.

Preostaju slučajevi $c = 6$ i $c = 8$. Za slučaj $c = 8$ direktno iz provedene analize zadnje znamenke vidimo da nema rješenja. U slučaju $c = 6$ mogući izbori za a su 1, 4, 6 i 9; direktnom provjerom svih umnožaka u ovim slučajevima dobijemo da niti jedan nije oblika $\overline{abac}$ ($1^2 \cdot 11 \cdot 66 = 726$ je premalo, a već $4^2 \cdot 11 \cdot 66 = 11616$ je preveliko), što znači da nema daljnjih rješenja.

Zadatak J-2.4. [40 bodova]

Koliko ima peteroznamenastih brojeva koji sadrže blok znamenki „15” i djeljivi su s 15? (Primjerice, 31545 i 34155 su dva takva broja.)

Rješenje.

Dvije znamenke peteroznamenastog broja koji zadovoljava dane uvjete su 1 i 5; označimo preostale tri s A , B i C . Kako znamenke 1 i 5 moraju tvoriti jedan blok, svi brojevi moraju biti jednog od sljedećih oblika:

$$\overline{15ABC}, \overline{A15BC}, \overline{AB15C} \text{ ili } \overline{ABC15}.$$

Nadalje, svaki promatrani broj mora biti djeljiv s $15 = 3 \cdot 5$, dakle djeljiv je s 3 i 5. Zbog djeljivosti s 5, znamo da zadnja znamenka mora biti 0 ili 5. Stoga se prethodni oblici dalje dijele na:

$$\overline{15AB0}, \overline{15AB5}, \overline{A15B0}, \overline{A15B5}, \overline{AB150}, \overline{AB155} \text{ ili } \overline{ABC15}. \quad (\star)$$

Promotrimo prvi oblik $\overline{15AB0}$. Ovaj broj mora biti djeljiv s 3. Pravilo o djeljivosti s 3 nam tada kaže da zbroj znamenki ovog broja $1 + 5 + A + B + 0 = 6 + A + B$ mora biti djeljiv s 3. Pribrojnik 6 je

djeljiv s 3, pa takav mora biti i preostali zbroj $A + B$. No, ovo je isto kao da je dvoznamenkasti broj $\overline{AB}$ djeljiv s 3, s tim da A može biti i 0. Tada su svi mogući brojevi AB jednaki:

$$00, 03, 06, 09, 12, \dots, 96, 99.$$

Ovih kombinacija ima $\frac{99-0}{3} + 1 = 34$.

Za drugi oblik $\overline{15AB5}$, dobijemo da zbroj $1 + 5 + A + B + 5 = 11 + A + B$ mora biti djeljiv s 3. Sada vidimo da zbroj $A + B$ mora davati ostatak 1 pri dijeljenju s 3, što je ekvivalentno tome da broj $\overline{AB}$ daje ostatak 1. Stoga su sve moguće kombinacije za $\overline{AB}$ jednake:

$$01, 04, 07, 10, \dots, 94, 97.$$

Ovih kombinacija ima 33 (jedan manje nego u prethodnom slučaju).

Kod trećeg oblika $\overline{A15B0}$ ponovno dobijemo da broj $\overline{AB}$ mora biti djeljiv s 3, no znamenka A u ovom slučaju ne smije biti 0, jer bismo dobili četveroznamenkasti broj umjesto peteroznamenkastog. Stoga je broj kombinacija u ovom slučaju jednak $34 - 4 = 30$.

Kod četvrtog oblika $\overline{A15B5}$ zaključujemo analogno i dobijemo da je broj kombinacija ponovno jednak $33 - 3 = 30$. Za peti oblik $\overline{AB150}$ broj kombinacija je također 30, kao i za šesti oblik $\overline{AB155}$.

Preostaje još samo izbrojati broj kombinacija znamenaka za sedmi oblik $\overline{ABC15}$. Ovdje vidimo da troznamenkasti broj $\overline{ABC}$ mora biti djeljiv s 3 te $A \neq 0$. Stoga su sve moguće kombinacije:

$$102, 105, 108, 111, \dots, 996, 999,$$

kojih je ukupno $\frac{999-102}{3} + 1 = 300$.

Do sada smo izbrojali ukupno

$$34 + 33 + 30 + 30 + 30 + 30 + 300 = 487$$

brojeva koji zadovoljavaju dano svojstvo. Međutim, neke od njih smo brojali više od jednom! Stoga moramo otkriti koliko je takvih i oduzeti od ovog broja, jer svaki broj moramo brojati točno jednom.

Da bismo to učinili, moramo vidjeti koji brojevi se mogu prikazati na dva ili više oblika iz ($\star$). Počnimo s brojevima oblika $\overline{15AB0}$: oni ne mogu biti prikazani u obliku $\overline{15AB5}$ (razlikuju se u zadnjoj znamenici), u obliku $\overline{A15B0}$ (druga znamenka), u obliku $\overline{A15B5}$ (druga znamenka), u obliku $\overline{AB155}$ (zadnja znamenka), niti u obliku $\overline{ABC15}$ (zadnja znamenka). Vidimo dakle da se brojevi oblika $\overline{15AB0}$ mogu prikazati još jedino u obliku $\overline{AB150}$. Pitamo se koliko smo brojeva prebrojali „duplo”, jednom u svakoj od ove dvije skupine – to su upravo oni koji spadaju u obje skupine. Vidimo da je to jedino broj $\overline{15150}$, koji doista zadovoljava uvjete zadatka, dakle 1 broj smo brojali dva puta u ovom slučaju.

Nastavljamo s drugim oblikom $\overline{15AB5}$. Brojevi ovog oblika mogu biti i oblika $\overline{AB155}$ te oblika $\overline{ABC15}$. Prve dvije navedene skupine imaju samo $\overline{15155}$ kao zajednički broj, no on nije djeljiv s 3, pa ga nismo ni brojali. Brojevi koji istovremeno spadaju u skupinu oblika $\overline{15AB5}$ i $\overline{ABC15}$ su $\overline{15015}$, $\overline{15315}$, $\overline{15615}$ i $\overline{15915}$, što su 4 broja u ovom slučaju.

Brojevi oblika $\overline{A15B0}$ ne mogu biti niti jednog od drugih oblika. Brojevi oblika $\overline{A15B5}$ mogu biti i oblika $\overline{ABC15}$; u ovom slučaju, zajednički brojevi su $\overline{31515}$, $\overline{61515}$ i $\overline{91515}$, dakle 3 broja. Brojevi oblika $\overline{AB150}$ ne mogu biti niti jednog sljedećeg oblika, kao ni brojevi oblika $\overline{AB155}$.

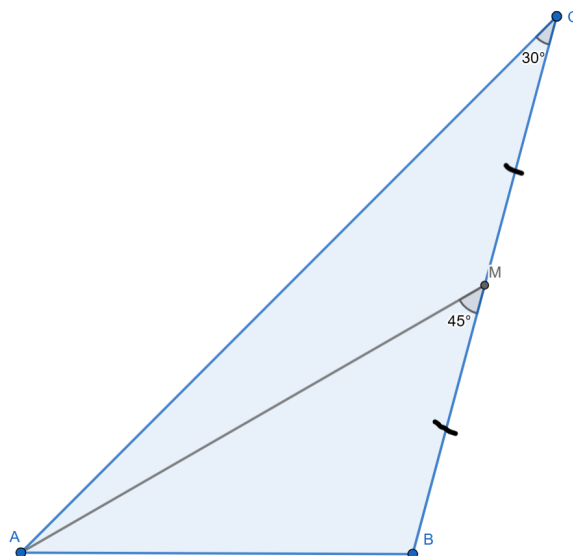
Konačno, možemo izračunati traženi broj, oduzimajući broj duplo prebrojanih kombinacija:

$$487 - 1 - 4 - 3 = 479.$$

Zadatak J-2.5. [50 bodova]

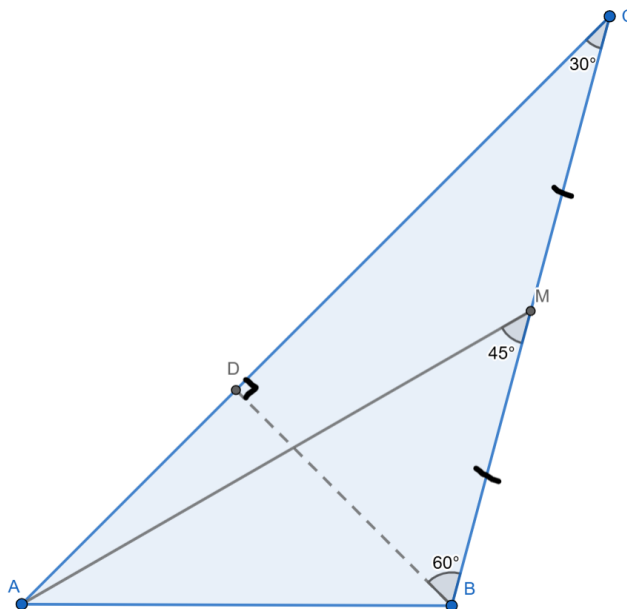
Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC . Ako je $\sphericalangle AMB = 45^\circ$ i $\sphericalangle ACM = 30^\circ$, koliko iznosi $\sphericalangle BAM$?

Rješenje.

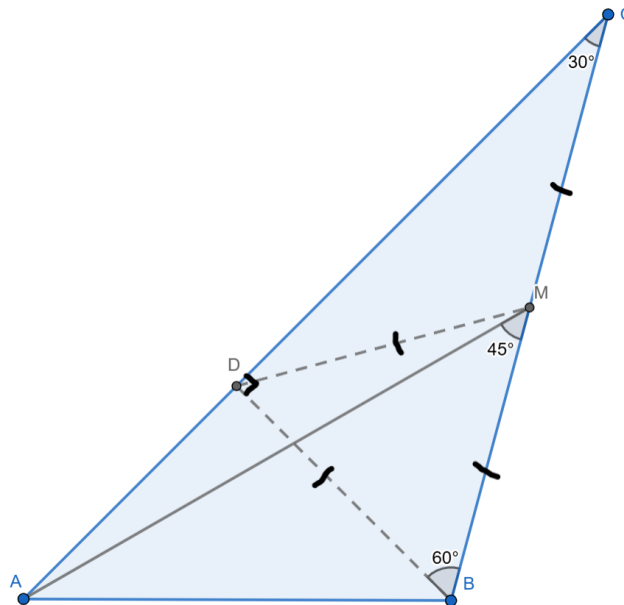


Sa slike vidimo da nam u ovoj geometrijskoj konfiguraciji nije dato mnogo podataka. Stoga ćemo morati ponovno docrtavati objekte kako bismo odredili traženu veličinu kuta. Razmislimo kako to možemo učiniti. Jedino što nam je poznato je postojanje kutova veličine 30° i 45° . Ovi kutovi nas mogu podsjetiti na dva poznata trokuta: polovina jednakokraničnog trokuta (s kutovima od 30° , 60° i pravim kutom) te jednakokračni pravokutni trokut (s dva kuta od 45° i pravim kutom). U svakom slučaju, potaknuti smo da tražimo kako uvesti pravi kut u našu sliku, jer bismo na taj način mogli stvoriti jedan od navedenih trokuta.

Povlačenje okomice iz točke B na težišnicu $\overline{AM}$ kako bismo dobili jednakokračni pravokutni trokut je jedan mogući način, ali ne čini se obećavajuć. Stoga krećemo drugim putem, možda i prirodnijim, i povlačimo okomicu iz točke B na stranicu $\overline{AC}$, tj. visinu trokuta ABC iz vrha B : time dobivamo polovinu jednakokraničnog trokuta BCD , gdje je D nožište visine iz točke B .



Kako je trokut BCD polovina jednakokraničnog trokuta, znamo da je stranica $\overline{BD}$ upola kraća od stranice $\overline{BC}$. No, tada vrijedi $|BD| = |BM|$, jer je $\overline{BM}$ upravo polovica stranice $\overline{BC}$. To nas potiče da docrtamo i dužinu $\overline{DM}$, jer time dobivamo jednakokranični trokut BMD (kao jednakokračni s jednim kutem od 60°).



Sada konačno možemo krenuti s određivanjem kutova. Zanima nas veličina kuta $\angle BAM$. Njega možemo dobiti kao razliku kutova $\angle BAD$ i $\angle MAD$. Kut $\angle MAD = \angle MAC$ lagano odredimo iz trokuta AMC : vanjski kut kod vrha M iznosi 45° , pa vrijedi $\angle MAC + \angle ACM = 45^\circ$, pa zbog $\angle ACM = 30^\circ$ dobijemo $\angle MAC = 15^\circ$.

Primijetimo sada da je trokut AMD jednakokrakan: vrijedi $\angle MAD = \angle DMA$, jer zbog $\angle DMB = 60^\circ$ dobijemo $\angle DMA = \angle DMB - \angle AMB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Stoga vrijedi $|AD| = |DM| = |BD|$, pa je i trokut ABD jednakokrakan. Kako je $\angle ADB$ pravi kut, odmah dobijemo $\angle BAD = 45^\circ$. Stoga konačno možemo dobiti veličinu traženog kuta $\angle BAM = \angle BAD - \angle MAD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

Zadatak J-2.6. [60 bodova]

Odredi sve prirodne brojeve n za koje se razlomak $\frac{7n+1}{4n+3}$ može skratiti prirodnim brojem većim od 1.

Prvo rješenje.

Ako se dani razlomak može skratiti prirodnim brojem većim od 1, nazovimo ga k , tada postoje prirodni brojevi a i b takvi da vrijedi $7n+1 = ka$ i $4n+3 = kb$. Promotrimo sada razliku ovih brojeva:

$$(7n+1) - (4n+3) = 3n-2 = ka - kb = k(a-b).$$

Sada vidimo da vrijedi $k \mid 3n-2$. Općenito će vrijediti da ako $k \mid x$ i $k \mid y$, tada i $k \mid (x-y)$. Nastavimo stoga dalje s postupkom. Oduzimanjem $3n-2$ od izraza $4n+3$ dobijemo da k dijeli i $n+5$. Konačno, oduzimanjem $n+5$ tri puta od $3n-2$, dobijemo da k dijeli i

$$(3n-2) - 3 \cdot (n+5) = -17.$$

Jedini pozitivni djelitelji od -17 su 1 i 17. Kako smo uzeli $k > 1$, ostaje mogućnost $k = 17$.

Sada znamo da mora vrijediti $17 \mid n+5$, što znači da vrijedi $n = 17m - 5$, za neki prirodni broj m . Uvrštavanjem u početne jednakosti dobijemo da vrijedi:

$$\begin{aligned} 7 \cdot (17m - 5) + 1 &= 7 \cdot 17m - 34 = 17 \cdot (7m - 2) \\ 4 \cdot (17m - 5) + 3 &= 4 \cdot 17m - 17 = 17 \cdot (4m - 1), \end{aligned}$$

dakle, 17 doista skraćuje početni razlomak $\frac{7n+1}{4n+3}$ za bilo koji $n = 17m - 5$, gdje je m proizvoljan prirodni broj. Kako je ovo jedina mogućnost, ovo su svi brojevi koji zadovoljavaju traženo svojstvo.

Drugo rješenje.

Promatramo najveći zajednički djelitelj brojnika i nazivnika $D := \text{NZD}(7n + 1, 4n + 3)$. U zadatku se zapravo traži da odredimo sve n za koje vrijedi $D > 1$, jer se tada dani razlomak može skratiti s D .

Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja provodimo uzastopno koristeći jednakost $\text{NZD}(a, b) = \text{NZD}(a - b, b)$, gdje su a i b proizvoljni prirodni brojevi (nije važan redoslijed brojeva, jer vrijedi $\text{NZD}(a, b) = \text{NZD}(b, a)$). Primjenjujući to na naše brojeve, dobijamo:

$$\begin{aligned}\text{NZD}(7n + 1, 4n + 3) &= \text{NZD}(3n - 2, 4n + 3) = \text{NZD}(3n - 2, n + 5) \\ &= \text{NZD}(2n - 7, n + 5) = \text{NZD}(n - 12, n + 5) = \text{NZD}(-17, n + 5).\end{aligned}$$

Dobili smo da D dijeli -17 , pa mora biti $D = 1$ ili $D = 17$; tražimo $D > 1$, pa ostaje jedino mogućnost $D = 17$. Sada analogno kao u prvom rješenju dobijemo da n može biti bilo koji prirodni broj oblika $17m - 5$.

Zadatak J-2.7. [70 bodova]

Neka su a, b, c i d pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeći sustav jednačbi:

$$\begin{cases} a^2 + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2} \\ b^2 + \frac{4}{c^2} = 8 \\ c^2 + \frac{16}{d^2} = 2 \\ d^2 + \frac{4}{a^2} = 32. \end{cases}$$

Odredi vrijednost umnoška $abcd$.

Prvo rješenje.

Množenjem svih jednačbi dobijemo

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 + \frac{4}{c^2}\right) \left(c^2 + \frac{16}{d^2}\right) \left(d^2 + \frac{4}{a^2}\right) = 2^8.$$

Po AG nejednakosti vrijedi $a^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b}$, gdje se jednakost postiže ako i samo ako je $a = \frac{1}{b}$. Analogno vrijedi i $b^2 + \frac{4}{c^2} \geq 4 \cdot \frac{b}{c}$ (jednakost ako i samo ako $b = \frac{2}{c}$), $c^2 + \frac{16}{d^2} \geq 8 \cdot \frac{c}{d}$ (jednakost ako i samo ako $c = \frac{4}{d}$) i $d^2 + \frac{4}{a^2} \geq 4 \cdot \frac{d}{a}$ (jednakost ako i samo ako $d = \frac{2}{a}$). Množenjem navedenih nejednakosti dobijemo

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 + \frac{4}{c^2}\right) \left(c^2 + \frac{16}{d^2}\right) \left(d^2 + \frac{4}{a^2}\right) \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot 4 \cdot \frac{b}{c} \cdot 8 \cdot \frac{c}{d} \cdot 4 \cdot \frac{d}{a} = 2^8.$$

Usporedbom s prethodno dobivenom jednakosti, vidimo da se u ovoj nejednakosti zapravo postiže jednakost. To je moguće jedino ako se jednakost postiže u svim navedenim nejednakostima, dakle mora vrijediti $a = \frac{1}{b}$, $b = \frac{2}{c}$, $c = \frac{4}{d}$ i $d = \frac{2}{a}$. Množenjem svih ovih jednakosti dobijamo $abcd = \frac{16}{abcd}$, odakle je $(abcd)^2 = 16$. Kako su svi a, b, c i d pozitivni, zaključujemo da vrijedi $abcd = 4$.

Drugo rješenje.

Uvođenjem supstitucija $a = \frac{x}{2}$, $b = 2y$, $c = z$ i $d = 4t$, polazni sustav postaje:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{2} \\ 4y^2 + \frac{4}{z^2} = 8 \\ z^2 + \frac{16}{16t^2} = 2 \\ 16t^2 + \frac{4 \cdot 4}{x^2} = 32. \end{cases}$$

Množenjem prve jednadžbe s 4, druge s $\frac{1}{4}$ i četvrte s $\frac{1}{16}$ dobivamo ekvivalentni sustav:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = 2, \\ y^2 + \frac{1}{z^2} = 2, \\ z^2 + \frac{1}{t^2} = 2, \\ t^2 + \frac{1}{x^2} = 2. \end{cases}$$

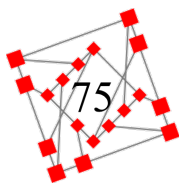
Sada zbrajanjem svih jednadžbi dobijemo

$$x^2 + \frac{1}{y^2} + y^2 + \frac{1}{z^2} + z^2 + \frac{1}{t^2} + t^2 + \frac{1}{x^2} = 8.$$

Za svaki pozitivni realni broj u po AG nejednakosti vrijedi $u + \frac{1}{u} \geq 2$, uz jednakost ako i samo ako je $u = 1$. Zbrajanjem nejednakosti $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$, $y^2 + \frac{1}{y^2} \geq 2$, $z^2 + \frac{1}{z^2} \geq 2$ i $t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 2$ dobijamo

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + z^2 + \frac{1}{z^2} + t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 8.$$

No, znamo da se u ovoj nejednakosti zapravo postiže jednakost. Stoga se u svim navedenim nejednakostima također postiže jednakost, tj. vrijedi $x^2 = y^2 = z^2 = t^2 = 1$. Kako su svi brojevi pozitivni, mora biti $x = y = z = t = 1$. Konačno izračunamo $abcd = \frac{x}{2} \cdot 2y \cdot z \cdot 4t = 4xyzt = 4$.



MEDO 2024./2025.

Drugo kolo

30.11.2024.

Loomen

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-2.1. [10 bodova]

Mirko čita knjigu. Prvog dana pročitao je petinu knjige. Drugog dana pročitao je dvije sedmine ostatka knjige. Trećeg dana pročitao je 23 stranice. Četvrtog dana pročitao je trećinu ostatka knjige. Petog dana pročitao je polovicu preostalog dijela knjige, a šestog dana pročitao je knjigu do kraja.

Koliko najmanje stranica može imati Mirkova knjiga, ako znamo da je svakog dana pročitao prirodan broj stranica?

Rješenje.

Označimo broj stranica knjige s n ; iz uvjeta zadatka znamo da je n prirodan broj. Sada možemo izraziti broj stranica koje Mirko pročita svakog dana preko n . Prvog dana pročitao je $\frac{1}{5} \cdot n = \frac{n}{5}$ stranica; kako je svakog dana pročitao prirodan broj stranica, i ovo mora biti prirodan broj, stoga n mora biti djeljiv s 5.

Znamo da je drugog dana pročitao dvije sedmine **ostatka** knjige. Odredimo najprije koliki je taj ostatak: od ukupnog broja stranica oduzimamo stranice pročitane prvi dan, pa dobijemo $n - \frac{n}{5} = \frac{4n}{5}$. Dakle, drugog dana je pročitao još $\frac{2}{7} \cdot \frac{4n}{5} = \frac{8n}{35}$. Kako i ovaj broj mora biti prirodan, zaključujemo da je n djeljiv s 35, jer 8 nema zajedničkih faktora s 35. Nakon drugog dana preostane mu još $\frac{4n}{5} - \frac{8n}{35} = \frac{4n}{7}$ stranica.

Trećeg dana pročitao je daljnje 23 stranice, pa mu je ostalo još $\frac{4n}{7} - 23 = \frac{4n-161}{7}$ stranica. Četvrtog dana pročita još jednu trećinu preostalih stranica, pa mu ostane još dvije trećine ostatka, što iznosi $\frac{2}{3} \cdot \frac{4n-161}{7} = \frac{8n-332}{21}$. Petog dana pročita *polovicu* preostalog dijela (*isprike još jednom svima na pogrešci prilikom originalnog prijepisa zadatka*), pa mu ostane još $\frac{1}{2} \cdot \frac{8n-332}{21} = \frac{4n-161}{21}$ stranica, koje pročita šesti i zadnji dan.

Svi navedeni razlomci moraju biti prirodni brojevi. Stoga zaključujemo da n mora biti djeljiv s 35 te da $4n - 161$ mora biti djeljiv s 21. Također, mora vrijediti i $4n - 161 > 0$, tj. $n > 40$. Provjerom prvih nekoliko višekratnika broja 35 (35, 70, 105, 140, ...) dobijemo da je 140 najmanji broj koji zadovoljava sve uvjete. Stoga je najmanji mogući broj stranica Mirkove knjige solidnih 140.

Zadatak S-2.2. [20 bodova]

Odredi sve trojke znamenaka a , b i c (uz $a, c \neq 0$) takve da vrijedi jednakost:

$$\overline{abac} = a \cdot \overline{aa} \cdot \overline{c6}.$$

Prvo rješenje.

S desne strane jednakosti imamo umnožak tri prirodna broja: a , $\overline{aa}$ i $\overline{c6}$; pogledajmo možemo li nešto zaključiti iz toga. Zadnji broj $\overline{c6}$ završava na znamenku 6, stoga je sigurno paran broj (broj je paran

onda i samo onda kad završava na parnu znamenku). Kada u umnošku imamo paran broj, konačni umnožak mora također biti paran. Stoga je broj s desne strane jednakosti paran, pa takav mora biti i broj $\overline{abac}$ s lijeve strane. Njegova zadnja znamenka je c , pa zaključujemo da c mora biti paran. Kako zbog uvjeta zadatka ne može biti 0, ostaju nam 4 mogućnosti: $c = 2, 4, 6$ ili 8 .

Promotrimo najprije mogućnost $c = 2$; broj $\overline{c6}$ je tada jednak 26. Primijetimo da vrijedi $\overline{aa} = 10a + a = 11a$. Jednakost sada postaje:

$$\overline{aba2} = a \cdot 11a \cdot 26 = a^2 \cdot 11 \cdot 26.$$

Desna strana jednakosti sada ovisi samo o vrijednosti znamenke a . Sada bismo mogli promatrati sve mogućnosti za a i u svakom slučaju odrediti je li jednakost zadovoljena za neki izbor znamenke b ; no, već znamo zadnju znamenku broja s lijeve strane pa si možemo skratiti posao. Pogledajmo koliko može iznositi zadnja znamenka broja s desne strane. Znamo da je zadnja znamenka umnoška jednaka zadnjoj znamenki umnoška zadnjih znamenaka (jednostavnije rečeno, zadnja znamenka umnoška ovisi jedino o zadnjim znamenkama faktora). Uvrštavamo redom moguće vrijednosti za a (radi lakšeg zapisa koristimo modularnu aritmetiku s modulom 10, za pojašnjenje vidi [Edukativno rješenje 5. zadatka iz prošlog kola](#)):

a	$a^2 \pmod{10}$	$a^2 \cdot 11 \cdot 26 \pmod{10}$
1	1	6
2	4	4
3	9	4
4	6	6
5	5	0
6	6	6
7	9	4
8	4	4
9	1	6

Primjećujemo da u nijednom slučaju zadnja znamenka umnoška nije 2 (primijetite usput simetriju oko srednjeg umnoška; to nije slučajno, probajte shvatiti zašto; pojasnit ćemo na radionici). Stoga jednakost nije zadovoljena ni za jedan a , pa nema rješenja u slučaju $c = 2$.

Promatrajmo sada slučaj $c = 4$. Jednakost postaje:

$$\overline{aba4} = a^2 \cdot 11 \cdot 46.$$

Provedena analiza zadnje znamenke pokazuje da su jedine mogućnosti za a znamenke 2, 3, 7, 8. Uvrštavajući ove vrijednosti redom dobijemo umnoške 2024, 4554, 24794, 32384. Vidimo da jedino prvi umnožak ima traženi oblik $\overline{abac}$, pa je jedina tražena trojka u ovom slučaju $(a, b, c) = (2, 0, 4)$.

Preostaju slučajevi $c = 6$ i $c = 8$. Za slučaj $c = 8$ direktno iz provedene analize zadnje znamenke vidimo da nema rješenja. U slučaju $c = 6$ mogući izbori za a su 1, 4, 6 i 9; direktnom provjerom svih umnožaka u ovim slučajevima dobijemo da niti jedan nije oblika $\overline{abac}$ ($1^2 \cdot 11 \cdot 66 = 726$ je premalo, a već $4^2 \cdot 11 \cdot 66 = 11616$ je preveliko), što znači da nema daljnjih rješenja.

Drugo rješenje.

Mod 2 kaže da je c paran kao zadnja znamenka s desne strane. Gledajmo mod 4:

$$2a + c \equiv 1010a + 100b + c = \overline{abac} = a \cdot \overline{aa} \cdot \overline{c6} = 11a^2 \cdot 10c + 6 \equiv -a^2 \cdot (2c + 2) \equiv -2a^2 \pmod{4},$$

odakle je $c \equiv 2a(a + 1) \pmod{4}$, pa je nužno $4 \mid c$. Dakle, $c = 4$ ili 8 .

Ograničimo znamenku a . Sigurno je $b \leq 9$, $4 \leq c \leq 8$, pa je

$$1010a + 900 + 8 \geq 1010a + 100b + c = \overline{abac} = a \cdot \overline{aa} \cdot \overline{c6} = 11a^2 \cdot \overline{c6} \geq 11a^2 \cdot 46.$$

Dobivamo uvjet

$$506a^2 - 1010a - 908 \leq 0,$$

odakle je nužno $a \leq 2$. Dakle, imamo 4 mogućnosti za a, c : $a = 1, 2, c = 4, 8$. Provjerimo sve mogućnosti

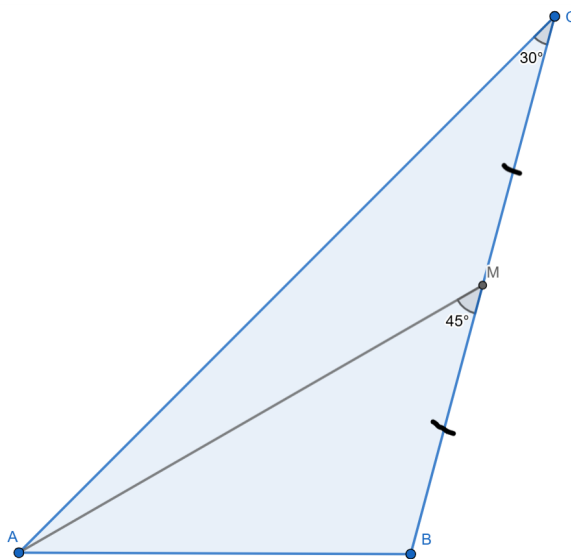
$$1 \cdot 11 \cdot 46 = 506, 2 \cdot 22 \cdot 46 = 2024, 1 \cdot 11 \cdot 86 = 946, 2 \cdot 22 \cdot 86 = 3784$$

te dobivamo jedino rješenje za $a = 2, b = 0, c = 4$.

Zadatak S-2.3. [30 bodova]

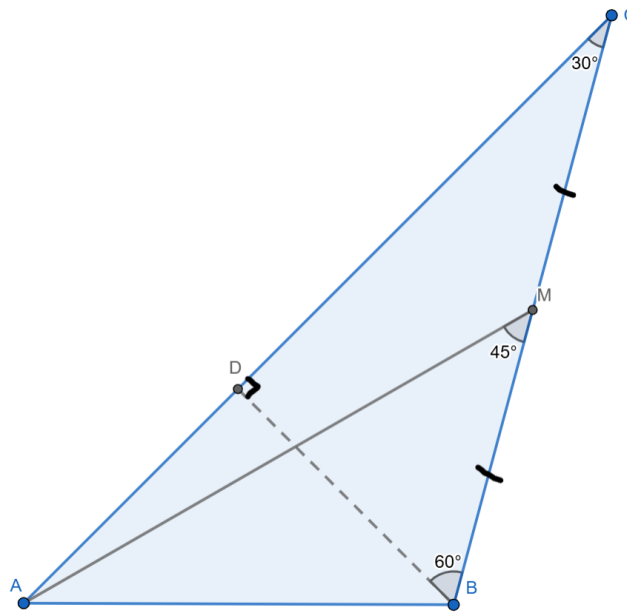
Neka je M polovište stranice BC trokuta ABC . Ako je $\angle AMB = 45^\circ$ i $\angle ACM = 30^\circ$, koliko iznosi $\angle BAM$?

Rješenje.

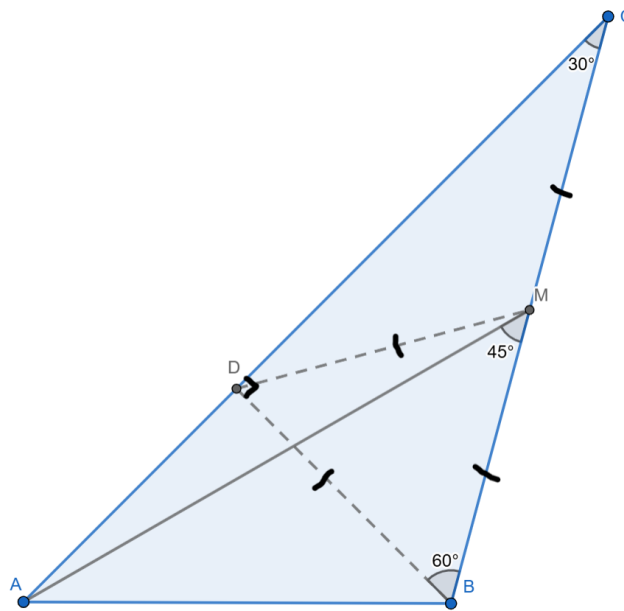


Sa slike vidimo da nam u ovoj geometrijskoj konfiguraciji nije dano mnogo podataka. Stoga ćemo morati ponovno docrtavati objekte kako bismo odredili traženu veličinu kuta. Razmislimo kako to možemo učiniti. Jedino što nam je poznato je postojanje kutova veličine 30° i 45° . Ovi kutovi nas mogu podsjetiti na dva poznata trokuta: polovina jednakostraničnog trokuta (s kutovima od 30° , 60° i pravim kutom) te jednakokračni pravokutni trokut (s dva kuta od 45° i pravim kutom). U svakom slučaju, potaknuti smo da tražimo kako uvesti pravi kut u našu sliku, jer bismo na taj način mogli stvoriti jedan od navedenih trokuta.

Povlačenje okomice iz točke B na težišnicu $\overline{AM}$ kako bismo dobili jednakokračni pravokutni trokut je jedan mogući način, ali ne čini se obećavajuć. Stoga krećemo drugim putem, možda i prirodnijim, i povlačimo okomicu iz točke B na stranicu $\overline{AC}$, tj. visinu trokuta ABC iz vrha B : time dobivamo polovinu jednakostraničnog trokuta BCD , gdje je D nožište visine iz točke B .



Kako je trokut BCD polovina jednakostraničnog trokuta, znamo da je stranica $\overline{BD}$ upola kraća od stranice $\overline{BC}$. No, tada vrijedi $|BD| = |BM|$, jer je $\overline{BM}$ upravo polovica stranice $\overline{BC}$. To nas potiče da docrtamo i dužinu $\overline{DM}$, jer time dobivamo jednakostranični trokut BMD (kao jednakokračni s jednim kutem od 60°).



Sada konačno možemo krenuti s određivanjem kutova. Zanima nas veličina kuta $\sphericalangle BAM$. Njega možemo dobiti kao razliku kutova $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle MAD$. Kut $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MAC$ lagano odredimo iz trokuta AMC : vanjski kut kod vrha M iznosi 45° , pa vrijedi $\sphericalangle MAC + \sphericalangle ACM = 45^\circ$, pa zbog $\sphericalangle ACM = 30^\circ$ dobijemo $\sphericalangle MAC = 15^\circ$.

Primijetimo sada da je trokut AMD jednakokračan: vrijedi $\sphericalangle MAD = \sphericalangle DMA$, jer zbog $\sphericalangle DMB = 60^\circ$ dobijemo $\sphericalangle DMA = \sphericalangle DMB - \sphericalangle AMB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Stoga vrijedi $|AD| = |DM| = |BD|$, pa je i trokut ABD jednakokračan. Kako je $\sphericalangle ADB$ pravi kut, odmah dobijemo $\sphericalangle BAD = 45^\circ$. Stoga konačno možemo dobiti veličinu traženog kuta $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAD - \sphericalangle MAD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

Zadatak S-2.4. [40 bodova]

Neka su a , b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $ab + bc + ca = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4 \left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \right).$$

Rješenje.

Dva su ključna pitanja koja si trebamo postaviti kada krenemo rješavati ovaj zadatak. Prvo je: „kako možemo iskoristiti uvjet zadatka”, a drugo: „kako se možemo riješiti 'jedinica' u nazivnicima na desnoj strani nejednakosti”. Kada malo bolje razmislimo o ovim pitanjima, možemo vidjeti da se odgovor na prvo nalazi u drugom, i obrnuto.

'Jedinica' u nazivniku se rješavamo upravo tako da ih zamijenimo izrazima $ab + bc + ca$ iz uvjeta. Time ćemo promatranu nejednakost učiniti **homogenom** – što znači da su svi članovi izraza na obje strane nejednakosti jednake potencije.

Zaista, svaki od razlomaka na lijevoj strani u brojniku ima izraz nulte potencije, dok je u nazivniku izraz potencije 1. Time je potencija svakog od pribrojnika na lijevoj strani jednaka -1 . S druge strane, svaki od razlomaka na desnoj strani ima izraz potencije 1 u brojniku, dok su svi pribrojnici u nazivniku potencije 2. Time je i potencija svakog od pribrojnika na desnoj strani jednaka -1 .

Homogenost je svojstvo koje često želimo pokušati postići pri rješavanju zadataka s nejednakostima, jer nam ono omogućava lakšu i uspješniju primjenu nekih poznatih nejednakosti, poput **aritmetičko-geometrijske (AG)** nejednakosti. Ako je ovo pojam s kojim se dosad niste susreli, nešto više o ovoj i nekim drugim nejednakostima možete naučiti kroz MNM-ovo predavanje [uvod u nejednakosti](#).

Vratimo se sada na zadatak. Korištenjem uvjeta na spomenuti način i sređivanjem izraza na obje strane, dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq 4 \left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \right) \iff \\ \frac{bc+ca+ab}{abc} &\geq 4 \left(\frac{a}{ab+bc+ca+a^2} + \frac{b}{ab+bc+ca+b^2} + \frac{c}{ab+bc+ca+c^2} \right) \iff \\ \frac{1}{abc} &\geq 4 \left(\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+a)(b+c)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \right) \iff \\ \frac{1}{abc} &\geq 4 \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \iff \\ \frac{1}{abc} &\geq 4 \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \iff \\ \frac{1}{abc} &\geq \frac{8}{(a+b)(b+c)(c+a)} \iff \\ (a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8abc. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost do koje smo došli je poznata nejednakost čiju istinitost možemo dokazati na više načina. Navodimo dva načina pomoću AG nejednakosti:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc,$$

ili

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &= a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc \\ &\geq \sqrt[6]{a^2b \cdot ab^2 \cdot b^2c \cdot bc^2 \cdot c^2a \cdot ca^2} + 2abc \\ &= 6abc + 2abc = 8abc. \end{aligned}$$

Zadatak S-2.5. [50 bodova]

Za prirodan broj n s $P(n)$ označimo broj njegovih *različitih* prostih djelitelja. Odredi najveću vrijednost koju $P(n)$ može postići ako je n prirodan broj čiji dekadski zapis sadrži najviše dvije različite znamenke, a ukupno najviše 6 znamenki.

Rješenje.

Označimo traženu najveću vrijednost s M . Pokušajmo najprije ograničiti s gornje strane vrijednost od M . U tu svrhu, računamo umnoške prvih nekoliko prostih brojeva:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 510510$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 9699690.$$

Iz ovoga vidimo da je najmanji broj n za kojeg vrijedi $P(n) = 8$ jednak 9699690. Kako ovaj broj ima više od 6 znamenki, zaključujemo da mora vrijediti $M \leq 7$.

Odmah vidimo i da $M \geq 6$, jer dobiveni broj 30030 zadovoljava uvjete zadatka i očigledno vrijedi $P(30030) = 6$. Stoga preostaje ispitati može li biti $M = 7$. Dokazat ćemo da ovo nije moguće.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji prirodni broj n koji zadovoljava uvjete zadatka (ima najviše dvije različite znamenke i ukupno najviše 6 znamenki) za kojeg vrijedi $P(n) = 7$. Pretpostavimo dodatno da je broj n najmanji s tim svojstvom. Pitamo se od kojih 7 prostih faktora se može sastojati n . Pokažimo najprije da on mora imati faktore 2, 3 i 5; u suprotnom, iznosio bi barem $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 1939938 > 10^6$, što je kontradikcija.

Sada zaključujemo da je n djeljiv s 10, pa mu je zadnja znamenka 0. Sada znamo jednu od moguće dvije znamenke broja n ; označimo drugu znamenku s A . Pogledajmo koje su moguće vrijednosti za A . Dokažimo najprije da A ne može biti 9. Ako je $A = 9$, broj n se sastoji samo od znamenaka 9 i 0. Tada je djeljiv s 3 te dijeljenjem dobijemo broj koji se sastoji od znamenaka 3 i 0. No, i ovaj broj je djeljiv s 3 te ima jednaki broj prostih faktora kao i n . Kako je novi broj manji od n , dolazimo do kontradikcije s izborom broja n kao najmanjeg za kojeg vrijedi željeno svojstvo. Analogno dokazujemo da A ne može biti 8, promatrajući djeljivost s 2.

Dakle, vrijedi $A \leq 7$. Stoga je najveći mogući broj n jednak 777770. Sada možemo dokazati da n mora biti djeljiv i s 11, analogno kao i prije: u suprotnom, trebao bi iznositi najmanje $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 881790 > 777770$, što je kontradikcija.

Zbog djeljivosti s 11, zaključujemo da je broj pojavljivanja znamenke A paran. Promatrajmo sada opet djeljivost s 3. Ako A nije djeljiv s 3, tada broj pojavljivanja znamenke A mora biti djeljiv i s 3. Kako smo zaključili da se A mora pojavljivati parno mnogo puta, najmanja mogućnost je 6 pojavljivanja znamenke A ; međutim, tada bi broj imao barem 7 znamenaka, jer znamo da zadnja znamenka mora biti 0. Stoga zaključujemo da $3 \mid A$. Analogno kao i prije, zaključujemo da $A \neq 6$, jer bi tada mogli podijeliti broj n s 2 i ponovno dobiti broj s istim brojem različitih prostih faktora. Stoga mora biti $A = 3$.

Konačno, to nam daje dovoljno dobru ogradu, jer sada je najveći mogući broj 333330, što je manje od umnoška prvih 7 prostih brojeva $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 510510$, čime dolazimo do završne kontradikcije.

Zadatak S-2.6. [60 bodova]

Imamo 2024 bijele i 2024 crvene kartice. Na svakoj kartici napisan je prirodan broj između 1 i 2024 (uključivo). Dokaži da je moguće odabrati nekoliko bijelih kartica (više od nula, može i sve) i nekoliko crvenih kartica (više od nula, može i sve) tako da je zbroj svih brojeva na odabranim bijelim karticama jednak zbroju svih brojeva na odabranim crvenim karticama.

Prvo rješenje.

Broj koji piše na kartici ćemo zvati *oznakom* kartice; neka su to $b_1, b_2, \dots, b_{2024}$ za bijele kartice te $c_1, c_2, \dots, c_{2024}$ za crvene kartice (bilo kojim redom). Definirajmo i sume $B_i := \sum_{k=1}^i b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_i$ te $C_j := \sum_{k=1}^j c_k = c_1 + c_2 + \dots + c_j$ za sve $1 \leq i, j \leq 2024$ i dodatno $B_0 = C_0 = 0$.

Konstruirajmo sada 2025×2025 tablicu (matricu) koja u polju (i, j) ima upisan broj $B_i + C_j$, za sve $0 \leq i, j \leq 2024$. Dokazat ćemo da ova tablica sadrži dva polja s istom vrijednošću. Tada će zadatak biti riješen, zbog sljedećega: neka su to polja (x, y) i (z, w) , uz $x < z$ (vidimo da nije moguće $x = z$); tada vrijedi $B_x + C_y = B_z + C_w$, iz čega slijedi $B_z - B_x = C_y - C_w$. Zbog $x < z$ vrijedi $B_x < B_z$, pa su obje strane pozitivne. No, tada s lijeve strane imamo upravo zbroj nekoliko oznaka na bijelim karticama, a s desne zbroj nekoliko oznaka na crvenim karticama, što je trebalo pokazati.

Definirajmo skupove S_k za svaki $0 \leq k \leq 2024$ kao skup svih polja tablice (i, j) takvih da vrijedi $\max(2024 - i, j) = k$ (na slici su skupovi polja S_0, S_1 i S_2 redom obojani crvenom, zelenom i plavom bojom). Jasno je da su svi skupovi S_k međusobno disjunktni.

	0	1	2	...	2023	2024
0	0	C_1	C_2	...	C_{2023}	C_{2024}
1	B_1	$B_1 + C_1$	$B_1 + C_2$	...	$B_1 + C_{2023}$	$B_1 + C_{2024}$
2	B_2	$B_2 + C_1$	$B_2 + C_2$	...	$B_2 + C_{2023}$	$B_2 + C_{2024}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2022	B_{2022}	$B_{2022} + C_1$	$B_{2022} + C_2$	...	$B_{2022} + C_{2023}$	$B_{2022} + C_{2024}$
2023	B_{2023}	$B_{2023} + C_1$	$B_{2023} + C_2$	...	$B_{2023} + C_{2023}$	$B_{2023} + C_{2024}$
2024	B_{2024}	$B_{2024} + C_1$	$B_{2024} + C_2$	...	$B_{2024} + C_{2023}$	$B_{2024} + C_{2024}$

Primijetimo sada da u svakom S_k mora postojati polje s oznakom iz intervala $[B_{2024}, B_{2024} + 2024]$. Naime, u svakom S_k polje s najmanjom oznakom je $(2024 - k, 0)$ s vrijednošću $B_{2024-k} < B_{2024}$, a polje s najvećom oznakom je $(2024, k)$ s vrijednošću $B_{2024} + C_k > B_{2024}$. Uzastopne vrijednosti među poljima u istom S_k se povećavaju za najviše 2024, pa zaključujemo da će vrijednost nekog polja sigurno upasti u navedeni interval.

Sada smo gotovi, jer skupova S_k ima ukupno 2025, a vrijednosti iz intervala $[B_{2024}, B_{2024} + 2024]$ ima 2024, pa po Dirichletovom principu možemo zaključiti da će postojati neka dva polja iz različitih skupova S_k s istom vrijednošću.

Drugo rješenje.

Označimo oznake na karticama i sume kao u prvom rješenju. BSO pretpostavimo da vrijedi $B_{2024} \leq C_{2024}$. Definirajmo funkciju $f: \{1, 2, \dots, 2024\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2024\}$ tako da je $f(k)$ najmanji indeks za kojeg vrijedi $B_k \leq C_{f(k)}$.

Ako se negdje postiže jednakost, gotovi smo. U suprotnom, ponovno zbog „diskretne neprekidnosti”, vrijedi:

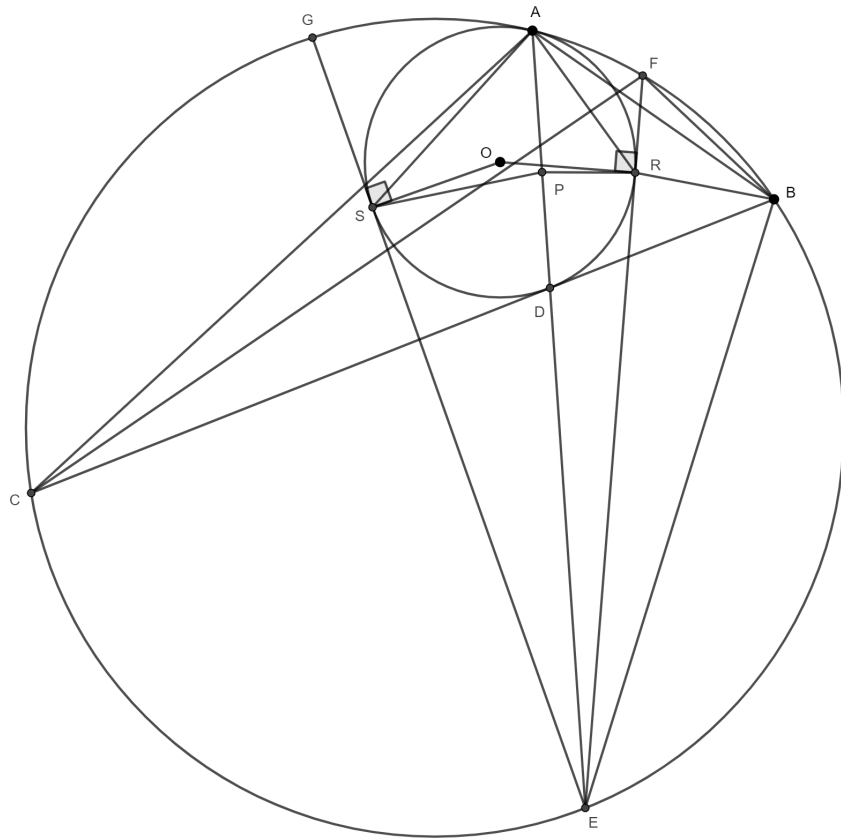
$$0 < C_{f(k)} - B_k \leq 2023.$$

Stoga razlika $C_{f(k)} - B_k$ može poprimiti jednu od 2023 vrijednosti, za svaki $1 \leq k \leq 2024$. Po Dirichletovom principu onda zaključujemo da postoje dva indeksa k i k' za koje je ova vrijednost jednaka, iz čega ponovno na isti način slijedi tražena tvrdnja.

Zadatak S-2.7. [70 bodova]

Kružnica k dodiruje kružnicu ℓ iznutra u točki A . Tetiva $\overline{BC}$ kružnice ℓ dodiruje kružnicu k u točki D . Pravac AD ponovno siječe kružnicu ℓ u točki E . Tangente iz točke E na kružnicu k sijeku kružnicu ℓ u točkama F i G . Neka su P, R i S redom središta upisanih kružnica trokuta BAC, BFC i BGC . Odredi $\sphericalangle ARP + \sphericalangle PSA$.

Rješenje.



Dokažimo najprije sljedeću lemu koja vrijedi u danoj konfiguraciji.

Lema: Točka E je polovište luka $\widehat{BC}$ bez točke A .

Dokaz leme: Promotrimo homotetiju h s centrom u točki A koja točku E šalje u točku D . Neka su B' i C' redom sjecišta pravaca AB i AC s kružnicom k . Iz definicije homotetije h slijedi da se pri toj homotetiji točka B slika u točku B' te točka C u točku C' . Nadalje, iz svojstva homotetije također znamo da je pravac $B'C'$ paralelan s BC . Uočimo da je time pravac BC tangenta na opisanu kružnicu trokuta $AB'C'$ koja je paralelna sa stranicom $B'C'$. Iz toga slijedi da je diralište D te tangente i opisane kružnice zapravo polovište luka $\widehat{B'C'}$ bez točke A . Dakle, AD je simetrala kuta $\angle B'AC'$, tj. E je polovište luka $\widehat{BC}$ bez točke A .

Iz prethodne leme posebno imamo da se točka P nalazi na pravcu AE .

Pokažimo, nadalje, da su središta R i S redom točke dirališta tangenata EF i EG s kružnicom k . Označimo s R' diralište tangente EF i kružnice k . Iz prethodne leme znamo da je E polovište luka $\widehat{BC}$ bez točke A . Iz toga slijedi da je EF simetrala kuta $\angle CFB$ pa je zato točka R na pravcu EF . Kako je R središte upisane kružnice trokuta BFC i E polovište luka $\widehat{BC}$ bez točke A redom imamo

$$\begin{aligned}\angle RBE &= \angle RBC + \angle CBE = \frac{\angle FBC}{2} + \angle CFE \\ &= \frac{\angle FBC}{2} + \frac{\angle CFB}{2}, \\ \angle ERB &= \angle RFB + \angle FBR = \frac{\angle FBC}{2} + \frac{\angle CFB}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, $\angle RBE = \angle ERB$ iz čega slijedi $|ER| = |EB|$.

S druge strane, primjenom potencije točke E na kružnicu k dobivamo $|ER'|^2 = |ED| \cdot |EA|$. Također vrijedi da je EB tangenta na opisanu kružnicu trokuta BAD jer je $\sphericalangle DBE = \frac{\sphericalangle CAB}{2} = \sphericalangle DAB$. Primjenom potencije točke E na opisanu kružnicu trokuta BAD slijedi $|EB|^2 = |ED| \cdot |EA|$. Iz prethodnih jednakosti imamo $|ER'| = |EB| = |ER|$. Konačno, kako se obje točke R i R' nalaze na dužini $\overline{EF}$ zaključujemo da mora vrijediti $R = R'$, tj. R je diralište tangente EF i kružnice k . Analogno se pokaže da je S diralište tangente EG i kružnice k .

Uočimo da istim računom kao i za točke R i S imamo $|EP| = |EA|$ iz čega slijedi da je $|EP| = |ER| = |ES|$.

Označimo s O središte kružnice k . Korištenjem prethodno dokazanih tvrdnji o točkama P , R i S redom računamo:

$$\begin{aligned}
 \sphericalangle ARP + \sphericalangle PSA &= (180^\circ - \sphericalangle PAR - \sphericalangle RPA) + (180^\circ - \sphericalangle SAP - \sphericalangle APS) \\
 &= (360^\circ - \sphericalangle RPA - \sphericalangle APS) - (\sphericalangle PAR + \sphericalangle SAP) \\
 &= \sphericalangle SPR - \sphericalangle SAR = \sphericalangle EPR + \sphericalangle SPE - \sphericalangle SAR \\
 &= 90^\circ - \frac{\sphericalangle REP}{2} + 90^\circ - \frac{\sphericalangle PES}{2} - \frac{\sphericalangle SOR}{2} \\
 &= 180^\circ - \frac{\sphericalangle RES + \sphericalangle SOR}{2} = 180^\circ - 90^\circ \\
 &= 90^\circ.
 \end{aligned}$$