

MEDO 2024./2025.

Četvrto kolo

8.2.2025.

Zadaci

Loomen

Juniori

Zadatak J-4.1. [10 bodova]

Duljine susjednih stranica pravokutnika razlikuju se za 2.8 cm, a njegov je opseg 17.6 cm. Nad kraćom stranicom pravokutnika kao osnovicom nacrtan je jednakokračni trokut čiji je opseg jednak opsegu pravokutnika. Odredi duljinu krakova tog trokuta.

Zadatak J-4.2. [20 bodova]

Dvanaest bi radnika izgradilo kuću za 28 dana. Nakon što je 4 dana radilo svih 12 radnika, trojica su dala otkaz i nisu više dolazila na posao. Nakon dodatnih 6 dana došla su 4 nova radnika koja su zajedno s preostalima završila posao. Za koliko će ukupno dana kuća biti izgrađena? Pretpostavljamo da svaki radnik svaki dan napravi jednaku količinu posla.

Zadatak J-4.3. [30 bodova]

Odredi najveći i najmanji prirodni broj n tako da $\frac{20n - 25}{n - 2025}$ bude prirodan broj.

Zadatak J-4.4. [40 bodova]

Dvije žabe, Ana i Branka, naišle su na jezero na kojem se nalazi 2025 lopoča poredanih u niz. Odlučile su igrati sljedeću igru skakanja. Ana na početku igre stane na lopoč koji je na jednom kraju niza, a Branka na lopoč koji je na suprotnom kraju. Zatim naizmjenično skaču: prvo Ana, zatim Branka, i tako redom. Kada je na nju red, žaba skače sa trenutnog lopoča na jedan od susjednih lopoča na kojem već nije druga žaba. Žaba koja ne može izvesti skok na opisani način gubi igru.

Koja žaba ima pobjedničku strategiju?

Zadatak J-4.5. [50 bodova]

Odredi zadnjih šest znamenaka broja čiji kub završava sa 777 777.

Zadatak J-4.6. [60 bodova]

U jednakokračni pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat $PQRS$ tako da se točke P , Q i S nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka R je unutar trokuta. Odredi omjer $|CP| : |CQ|$ ako je poznato da površina kvadrata $PQRS$ iznosi $\frac{2}{5}$ površine trokuta ABC .

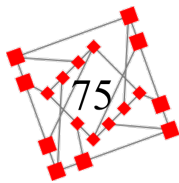
Zadatak J-4.7. [70 bodova]

U raspravi o matematičkom problemu oko okruglog stola sjedi n osoba. Nakon ručka svi oni sjedaju oko istoga stola, ali ne nužno na istim mjestima.

Mora li postojati par osoba takav da između njih nakon ručka sjedi jednak broj osoba kao i prije ručka, ako je

- a) $n = 7$?
- b) $n = 8$?

Broj osoba koji sjedi između dvije osobe u krugu može se brojati u bilo kojem smjeru.



MEDO 2024./2025.

Četvrto kolo

8.2.2025.

Zadaci

Loomen

Seniori

Zadatak S-4.1. [10 bodova]

Riješi nejednadžbu

$$\frac{2x+1}{x-2} \geq a$$

u skupu realnih brojeva u ovisnosti o realnom parametru a .

Zadatak S-4.2. [20 bodova]

Odredi zadnjih šest znamenaka broja čiji kub završava sa 777 777.

Zadatak S-4.3. [30 bodova]

U jednakokračni pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat $PQRS$ tako da se točke P , Q i S nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka R je unutar trokuta. Odredi omjer $|CP| : |CQ|$ ako je poznato da površina kvadrata $PQRS$ iznosi $\frac{2}{5}$ površine trokuta ABC .

Zadatak S-4.4. [40 bodova]

Ana i Branko igraju sljedeću igru, koju zovu *toplo-hladno*. Ana započinje igru tako da zamisli neki dvoznamenasti broj. Nakon toga Branko pokušava pogoditi Anin broj nizom upita. Ana Branku odgovara s:

- „točno” ako je pogodio broj koji je Ana zamislila;
- „toplo” ako je pogodio jednu znamenku Aninog broja i to na pravom mjestu, a preostala znamenka Brankovog broja se razlikuje za jedan od preostale znamenke Aninog broja;
- „hladno”, inače.

a) Dokaži da ne postoji strategija koja Branku osigurava da pogodi Anin broj s najviše 18 upita.

b) Odredi strategiju kojom Branko može pogoditi Anin broj s najviše 24 upita.

c) Postoji li strategija kojom Branko može pogoditi Anin broj s najviše 22 upita?

Zadatak S-4.5. [50 bodova]

Neka je n prirodan broj i S_n zbroj prvih n prostih brojeva. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji prirodni broj a takav da je $S_n \leq a^2 \leq S_{n+1}$.

Zadatak S-4.6. [60 bodova]

Dan je šiljastokutan trokut ABC i unutar njega točka P . Pravac BP siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D , a pravac CP siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E . Pravci DE i AP sijeku se u točki F . Neka je K nožište okomice iz točke F na stranicu $\overline{BC}$. Dokaži da je pravac KF simetrala kuta $\angle DKE$.

Zadatak S-4.7. [70 bodova]

Odredi sve prirodne brojeve n i proste brojeve p za koje $p^n + 1$ dijeli $n^p + 1$.