

MEDO 2024./2025.

Četvrto kolo

8.2.2025.

Loomen

Zadaci i rješenja

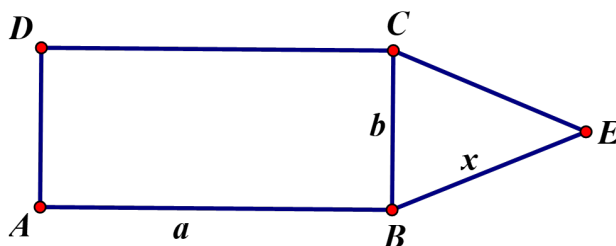
Juniori

Zadatak J-4.1. [10 bodova]

Duljine susjednih stranica pravokutnika razlikuju se za 2.8 cm, a njegov je opseg 17.6 cm. Nad kraćom stranicom pravokutnika kao osnovicom nacrtan je jednakokračni trokut čiji je opseg jednak opsegu pravokutnika. Odredi duljinu krakova tog trokuta.

Rješenje.

Označimo dulju stranicu pravokutnika s a , kraću s b , a krakove docrtanog jednakokračnog trokuta s x . Po uvjetu zadatka je $a = b + 2.8$ cm.



Opseg pravokutnika računamo po formuli $o = 2a + 2b$. Uvrstimo sada izraz iz uvjeta zadatka da dobijemo

$$o = 2 \cdot (b + 2.8) + 2b.$$

Budući da znamo koliki je opseg pravokutnika, možemo računati:

$$\begin{aligned} o &= 2 \cdot (b + 2.8) + 2b \\ 17.6 &= 2 \cdot (b + 2.8 + b) & / : 2 \\ 8.8 &= 2b + 2.8 \\ 6 &= 2b & / : 2 \\ 3 &= b \end{aligned}$$

Dakle, duljina kraće stranice pravokutnika jednaka je 3 cm. Sada možemo izračunati i duljinu dulje stranice a pomoću uvjeta zadatka:

$$a = b + 2.8 \text{ cm} = 3 \text{ cm} + 2.8 \text{ cm} = 5.8 \text{ cm}.$$

Sada ćemo izračunati opseg jednakokraničnog trokuta. Osnovica trokuta je dugačka 3 cm, a krakovi x cm pa imamo

$$\begin{aligned} o &= 3 + 2x \\ 17.6 &= 3 + 2x \\ 14.6 &= 2x & / : 2 \\ 7.3 &= x \end{aligned}$$

Zaključujemo da je krak trokuta duljine 7.3 cm.

Zadatak J-4.2. [20 bodova]

Dvanaest bi radnika izgradilo kuću za 28 dana. Nakon što je 4 dana radilo svih 12 radnika, trojica su dala otkaz i nisu više dolazila na posao. Nakon dodatnih 6 dana došla su 4 nova radnika koja su zajedno s preostalima završila posao. Za koliko će ukupno dana kuća biti izgrađena? Pretpostavljamo da svaki radnik svaki dan napravi jednaku količinu posla.

Rješenje.

Uočimo odmah da su broj radnika i broj dana potreban za obaviti neki dio posla obrnuto proporcionalne veličine; što je broj radnika veći, potreban broj dana je manji i obratno. Ako je dvanaestorici radnika potrebno 28 dana za izgradnju kuće, koliko je dana potrebno jednom radniku da sam izgradi takvu istu kuću? Broj radnika u tom je slučaju 12 puta manji, pa je broj potrebnih dana 12 puta veći, odnosno jednom radniku potrebno je $28 \cdot 12 = 336$ dana za obaviti posao (gradnja kuće). To znači da jedan radnik u jednom danu napravi $\frac{1}{336}$ dijela kuće.

Broj radnika i količina obavljenog posla su proporcionalne veličine pa tako ako jedan radnik u jednom danu obavi $\frac{1}{336}$ dijela posla, 12 radnika u jednom danu napraviti će $12 \cdot \frac{1}{336} = \frac{1}{28}$ dio posla. Tih 12 radnika će onda u 4 dana napraviti $4 \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{7}$ posla. Dakle, nakon što je 4 dana radilo 12 radnika, bit će napravljeno $\frac{1}{7}$ dijela posla.

Kako su trojica radnika prestala dolaziti na posao, sljedećih 6 dana na poslu je radilo 9 radnika pa računamo na isti način koliki dio posla su obavili u tom vremenu. Jedan radnik u jednom danu obavi $\frac{1}{336}$ dijela posla, 9 radnika u jednom danu stoga obavi $9 \cdot \frac{1}{336} = \frac{3}{112}$ dijela posla, a u 6 dana onda obave $6 \cdot \frac{3}{112} = \frac{9}{56}$ dijela posla.

Nakon prva 4 dana napravljeno je $\frac{1}{7}$ dijela posla, a nakon dodatnih 6 dana još $\frac{9}{56}$ pa je zato u prvih 10 dana obavljeno

$$\frac{1}{7} + \frac{9}{56} = \frac{8}{56} + \frac{9}{56} = \frac{17}{56}$$

dijela posla. Preostalo je $\frac{39}{56}$ dijela posla da bi kuća bila sazidana do kraja, a za to imamo još 4 nova radnika, odnosno ukupno 13 radnika. 13 radnika u jednom danu napravi $\frac{13}{336}$ dijela posla, pa rješavamo sljedeći problem:

$$\begin{aligned}\frac{13}{336} \cdot (\text{broj dana}) &= \frac{39}{56} \quad / \cdot 336 \\ 13 \cdot (\text{broj dana}) &= 39 \cdot 6 \\ 13 \cdot (\text{broj dana}) &= (13 \cdot 3) \cdot 6 \quad / : 13 \\ (\text{broj dana}) &= 18.\end{aligned}$$

Dakle, da bi 13 radnika završilo preostali dio posla potrebno im je još 18 dana. Ukupan broj dana potrebnih za izgraditi cijelu kuću je zato

$$4 + 6 + 18 = 28.$$

Zadatak J-4.3. [30 bodova]

Odredi najveći i najmanji prirodni broj n tako da $\frac{20n - 25}{n - 2025}$ bude prirodan broj.

Prvo rješenje.

Razlomak iz zadatka napišimo u obliku razlomka koji samo u nazivniku ima varijablu n :

$$\begin{aligned}\frac{20n - 25}{n - 2025} &= \frac{20n - 20 \cdot 2025 + 20 \cdot 2025 - 25}{n - 2025} \\ &= \frac{20(n - 2025) + 40500 - 25}{n - 2025} \\ &= \frac{20(\cancel{n - 2025})}{\cancel{n - 2025}} + \frac{40500 - 25}{n - 2025} \\ &= 20 + \frac{40475}{n - 2025}.\end{aligned}$$

Kako bi vrijednost dobivenog izraza bila prirodan broj, nazivnik $n - 2025$ mora biti djelitelj brojnika. Zato promotrimo rastav brojnika na proste faktore

$$40475 = 5 \cdot 5 \cdot 1619.$$

Sada vidimo da $n - 2025$ mora biti jedan od djelitelja broja 40475:

$$\pm 1, \pm 5, \pm 25, \pm 1619, \pm 8095, \pm 40475.$$

Najveći prirodni broj n koji zadovoljava uvjete zadatka je očito $n = 40475 + 2025 = 42500$.

Odredimo sada najmanji n . Kako je n prirodan (dakle pozitivan), najmanja moguća vrijednost od $n - 2025$ koja dijeli 40475 je -1619 . No, tada je početni razlomak jednak

$$\frac{20n - 25}{n - 2025} = 20 + \frac{40475}{-1619} = 20 + (-25) = -5,$$

što nije prirodan broj. Ako je pak nazivnik bilo koji od -25 , -5 , -1 , razlomak će biti još manji, dakle i dalje negativan. Zaključujemo da $n - 2025$ mora biti pozitivan djelitelj od 40475 kako bi cijeli razlomak bio prirodan broj. Najmanji n je zato $n = 1 + 2025 = 2026$.

Drugo rješenje.

Označimo

$$A = \frac{20n - 25}{n - 2025}.$$

Za $n = 1$ razlomak A nije cijeli broj; za $2 \leq n \leq 2024$ je $A < 0$ jer je brojnik pozitivan, a nazivnik negativan, pa A pa ne može biti prirodan; za $n = 2025$ vrijednost razlomka nije definirana. Kako je za $n = 2026$ razlomak A prirodan broj, to je $n = 2026$ najmanji traženi prirodni broj.

Kao u prvom rješenju, zapišimo dani razlomak kao

$$A = \frac{20n - 20 \cdot 2025 + 20 \cdot 2025 - 25}{n - 2025} = 20 + \frac{40475}{n - 2025}.$$

Kako bi zadnji izraz bio prirodan broj, razlomak $\frac{40475}{n - 2025}$ mora biti cijeli broj, tj. njegov nazivnik $n - 2025$ mora dijeliti brojnik 40475. Jasno je da najveći n koji to zadovoljava iznosi $n = 40475 + 2025 = 42500$.

Zadatak J-4.4. [40 bodova]

Dvije žabe, Ana i Branka, naišle su na jezero na kojem se nalazi 2025 lopoča poredanih u niz. Odlučile su igrati sljedeću igru skakanja. Ana na početku igre stane na lopoč koji je na jednom kraju niza, a Branka na lopoč koji je na suprotnom kraju. Zatim naizmjenično skaču: prvo Ana, zatim Branka, i tako redom. Kada je na nju red, žaba skače sa trenutnog lopoča na jedan od susjednih lopoča na kojem već nije druga žaba. Žaba koja ne može izvesti skok na opisani način gubi igru.

Koja žaba ima pobjedničku strategiju?

Rješenje.

Ana ima pobjedničku strategiju. Pokažimo da Ana uvijek može skakati prema Branki sve dok ne stigne do predzadnjeg lopoča, nakon čega Branka više neće moći izvesti skok. Označimo s d broj lopoča između Ane i Branke u trenutku neposredno prije Aninog skoka. Promatrajmo kako se vrijednost od d mijenja nakon što obje žabe skoče. Ako skoče u istom smjeru d ostaje isti; ako skoče jedna prema drugoj d se smanji za 2; ako skoče jedna od druge d poraste za 2. U svakom slučaju d ostaje iste parnosti. Budući da je na početku igre $d = 2023$, broj lopoča između žaba prije Aninog skoka uvijek ostaje neparan. Dakle, situacija gdje Ana ne može skočiti prema Branki, odnosno gdje se Branka neposredno prije Aninog skoka nalazi na lopoču susjednom Aninom (dakle, $d = 0$), ne može nastupiti. Stoga, Ana može uvijek skakati prema Branki i osigurati svoju pobjedu.

Zadatak J-4.5. [50 bodova]

Odredi zadnjih šest znamenaka broja čiji kub završava sa 777 777.

Rješenje.

Neka je n prirodan broj čiji kub završava sa 777 777. Poznato je da na zadnju znamenku umnoška dva prirodna broja utječu samo zadnje znamenke brojeva koji se množe. Odredimo stoga najprije zadnju znamenku broja n , neka je to a . Dakle, zadnja znamenka broja n^3 će biti zadnja znamenka broja a^3 ; kako to mora biti znamenka 7, jedina mogućnost za a je 3 ($3^3 = 27$).

Promotrimo sada zadnje dvije znamenke kuba n^3 . Na njih utječu jedino zadnje dvije znamenke broja n . Znamo da n završava na 3, pa nazovimo predzadnju znamenku (znamenku desetice) broja n s b . Sada možemo isprobavati sve mogućnosti za b , kubirati dobiveni dvoznamenkasti broj $\overline{b3}$ i vidjeti kada je završetak tog kuba jednak 77. No, možemo se poslužiti i algebarskim izrazima, kako slijedi.

Trebamo dakle kubirati broj $\overline{b3} = 10b + 3$. Učinimo to „po definiciji”, tj. množenjem broja $10b + 3$ tri puta samog sa sobom (prisjetimo se da zagrade množimo tako da svaki član jedne zagrade množimo sa svakim članom druge zagrade):

$$\begin{aligned}(10b + 3)^3 &= (10b + 3) \cdot (10b + 3) \cdot (10b + 3) \\&= (100b^2 + 30b + 30b + 3^2) \cdot (10b + 3) = (100b^2 + 60b + 9) \cdot (10b + 3) \\&= 1000b^3 + 300b^2 + 600b^2 + 180b + 90b + 27 = 1000b^3 + 900b^2 + 270b + 27.\end{aligned}$$

(Do ovog rezultata mogli smo doći direktno preko formule za kub zbroja: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.) Vidimo da prva dva člana dobivenog zbroja ne utječu na zadnje dvije znamenke (jer će oni sigurno završavati sa dvije nule). Zadnje dvije znamenke određuju označeni brojevi, tj. zadnje dvije znamenke su određene vrijednošću izraza $70b + 27$. Vidimo da je zadnja znamenka ovog broja doista uvijek 7 te da nema „prijenosa” vrijednosti s mjesta jedinica na mjesto desetice, pa će predzadnja znamenka (znamenka desetice) biti upravo jednaka zadnjoj znamenci izraza $7b + 2$. Kako bi i ova znamenka bila jednaka 7, mora biti $b = 5$.

Nastavljamo dalje istim postupkom. Na zadnje tri znamenke kuba utječu zadnje tri znamenke broja n . Zadnje dvije znamenke su 53; označimo znamenku stotica sa c . Ponovno računamo:

$$(100c + 53)^3 = 100^3c^3 + 3 \cdot 100^2c^2 \cdot 53 + 3 \cdot 100c \cdot 53^2 + 53^3 = 100^3c^3 + 159 \cdot 100^2c^2 + 842700c + 148877.$$

Prva dva člana ponovno ne utječu na znamenku stotica. Znamenka stotica će biti zadnja znamenka izraza $7c + 8$. Kako i ova znamenka mora biti jednaka 7, slijedi da $7c$ mora završavati sa 9, što je jedino moguće za $c = 7$.

Označimo dalje znamenku tisućica broja n s d ; znamo da je četveroznamenkasti završetak broja n jednak $\overline{d753} = 1000d + 753$. Kubiranjem ovog broja dobijemo:

$$\begin{aligned}(1000d + 753)^3 &= 1000^3d^3 + 3 \cdot 1000^2d^2 \cdot 753 + 3 \cdot 1000d \cdot 753^2 + 753^3 \\&= 1000^3d^3 + 2259 \cdot 1000^2d^2 + 1701027000d + 426957777.\end{aligned}$$

Znamenka tisućica broja n^3 je stoga zadnja znamenka izraza $7d + 7$. Kako bi ova znamenka bila jednaka 7, mora biti $d = 0$.

Označimo sada znamenku desetstisućica s e . Analognim računom dobijemo

$$\begin{aligned}(10000e + 753)^3 &= 10000^3 e^3 + 3 \cdot 10000^2 e^2 \cdot 753 + 3 \cdot 10000e \cdot 753^2 + 753^3 \\ &= 10000^3 e^3 + 2259 \cdot 10000^2 e^2 + 17010270000e + 426957777.\end{aligned}$$

Analognim zaključivanjem dobijemo da izraz $7e + 5$ mora završavati na 7, iz čega slijedi $e = 6$.

Konačno, odredimo i znamenku stotisućica f broja n . Ponovno kubiramo:

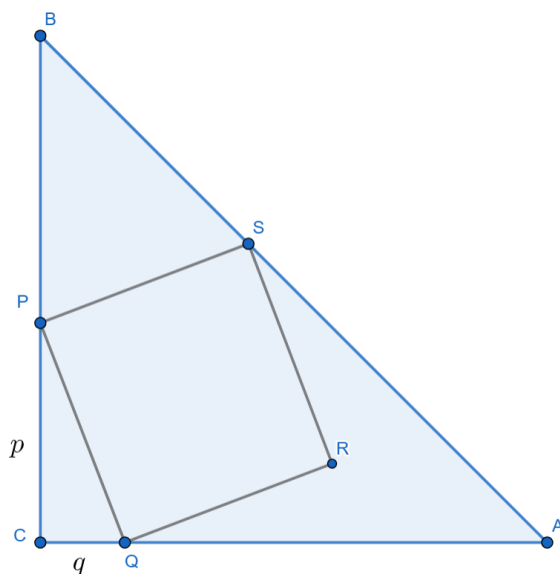
$$\begin{aligned}(100000f + 60753)^3 &= 100000^3 f^3 + 3 \cdot 100000f^2 \cdot 60753 + 3 \cdot 100000f \cdot 60753^2 + 60753^3 \\ &= 100000^3 f^3 + 182259 \cdot 100000f^2 + 1107278102700000f + 224234888577777.\end{aligned}$$

Izraz $7f + 5$ mora završavati sa 7, što je jedino moguće za $f = 6$. Zaključujemo da je šesteroznamenasti završetak broja n jednak $\overline{660753}$.

Zadatak J-4.6. [60 bodova]

U jednakokračni pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat $PQRS$ tako da se točke P , Q i S nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka R je unutar trokuta. Odredi omjer $|CP| : |CQ|$ ako je poznato da površina kvadrata $PQRS$ iznosi $\frac{2}{5}$ površine trokuta ABC .

Rješenje.

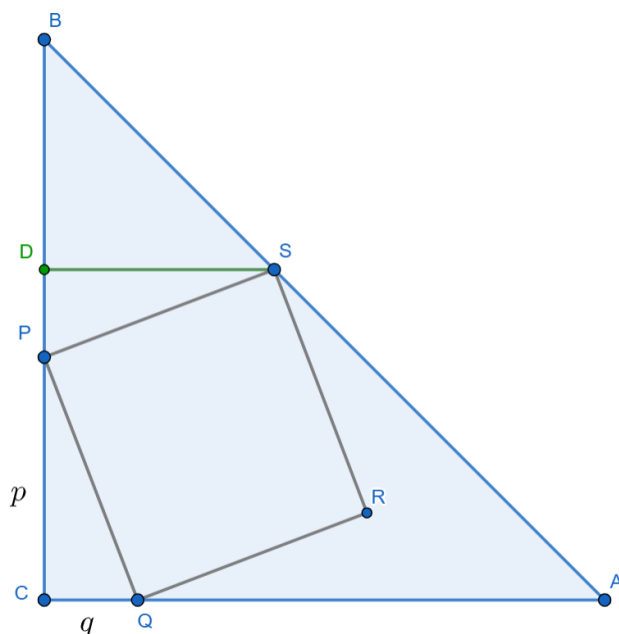


Označimo $|AC| = |BC| = a$, $|CP| = p$ i $|CQ| = q$. Po Pitagorinom poučku primjenjenom na pravokutni trokut QPC dobijemo da je duljina stranice kvadrata $PQRS$ jednaka $\sqrt{p^2 + q^2}$. Stoga površina kvadrata $PQRS$ iznosi $p^2 + q^2$. Površina jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC iznosi $\frac{a^2}{2}$, pa iz danog omjera površina kvadrata $PQRS$ i trokuta ABC dobijemo $\frac{p^2 + q^2}{a^2} = \frac{1}{5}$.

Trebamo sada pronaći još jednu vezu između a , p i q . U tu svrhu, povucimo okomicu iz točke S na stranicu $\overline{BC}$ i označimo nožište sa D . Uočimo sada da su pravokutni trokuti CQP i DPS sukladni po SKS poučku. Doista, hipotenuze PQ i SP su im jednake duljine kao stranice istog kvadrata te vrijedi

$$\sphericalangle SPD = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle CPQ = 90^\circ - \sphericalangle CPQ = \sphericalangle PQC.$$

Slijedi da je $|PD| = q$ i $|DS| = p$.



Trokut BDS je jednakokračan pravokutni, pa vrijedi i $|BD| = |DS| = q$. Sada po stranici $\overline{BC}$ vidimo da vrijedi $a = 2p + q$. Uvrstimo to u ranije dobivenu jednakost:

$$\begin{aligned}\frac{p^2 + q^2}{(2p + q)^2} &= \frac{1}{5} \\ 5(p^2 + q^2) &= (2p + q)^2 \\ 5p^2 + 5q^2 &= 4p^2 + 4pq + q^2 \\ p^2 - 4pq + 4q^2 &= 0 \\ (p - 2q)^2 &= 0\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da mora biti $p - 2q = 0$, tj. $p : q = 2 : 1$.

Zadatak J-4.7. [70 bodova]

U raspravi o matematičkom problemu oko okruglog stola sjedi n osoba. Nakon ručka svi oni sjedaju oko istoga stola, ali ne nužno na istim mjestima.

Mora li postojati par osoba takav da između njih nakon ručka sjedi jednak broj osoba kao i prije ručka, ako je

- a) $n = 7$?
- b) $n = 8$?

Broj osoba koji sjedi između dvije osobe u krugu može se brojati u bilo kojem smjeru.

Rješenje.

Neka su pozicije osoba prije ručka u krugu redom $1, 2, \dots, n - 1, n$ (npr. 2 i n sjede pored 1). Primijetimo da je broj osoba koji sjedi između dvije osobe na pozicijama i i j za jedan manji od njihove „udaljenosti”, tj. razlike između brojeva i i j . Kako možemo brojati u dva smjera po krugu, udaljenost između osoba i i j ima dvije vrijednosti: $(i - j) \bmod n$ i $(j - i) \bmod n$, gdje s $x \bmod n$ označavamo nenegativni ostatak pri dijeljenju cijelog broja x sa n . Primijetimo da uvijek vrijedi $(i - j) \bmod n + (j - i) \bmod n = n$.

Označimo s $\pi(k)$ poziciju na kojoj osoba s pozicije k prije ručka sjedi nakon ručka. Sada će između osoba s pozicijama i i j prije ručka sjediti jednak broj ljudi prije i nakon ručka ako i samo ako je neki od brojeva $(i - j) \bmod n$ i $(j - i) \bmod n$ jednak nekom od brojeva $(\pi(i) - \pi(j)) \bmod n$ i $(\pi(j) - \pi(i)) \bmod n$.

a) Ako je $n = 7$, možemo staviti da vrijedi $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5), \pi(6), \pi(7)) = (2, 4, 6, 1, 3, 5, 7)$. Tada imamo:

- za $(i - j) \bmod 7, (j - i) \bmod 7 \in \{1, 6\}$ je $(\pi(i) - \pi(j)) \bmod 7, (\pi(j) - \pi(i)) \bmod 7 \in \{2, 5\}$
- za $(i - j) \bmod 7, (j - i) \bmod 7 \in \{2, 5\}$ je $(\pi(i) - \pi(j)) \bmod 7, (\pi(j) - \pi(i)) \bmod 7 \in \{3, 4\}$
- za $(i - j) \bmod 7, (j - i) \bmod 7 \in \{3, 4\}$ je $(\pi(i) - \pi(j)) \bmod 7, (\pi(j) - \pi(i)) \bmod 7 \in \{1, 6\}$

Iz ovoga vidimo da smo za $n = 7$ našli raspored sjedenja nakon ručka za koji vrijedi da ne postoji par osoba takav da između njih nakon ručka sjedi jednak broj osoba kao i prije ručka.

b) Ako je $n = 8$, dokažimo da moraju postojati $i, j \in \{1, 2, \dots, 8\}, i \neq j$, takvi da je $(\pi(i) - i) \bmod 8 = (\pi(j) - j) \bmod 8$. Iz toga će slijediti da vrijedi tražena tvrdnja za osobe koje prije ručka sjede na pozicijama i i j .

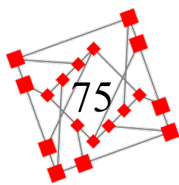
Pretpostavimo suprotno, tj. da takvi i i j ne postoje. To bi značilo da su svi brojevi $(\pi(1) - 1) \bmod 8, (\pi(2) - 2) \bmod 8, \dots, (\pi(8) - 8) \bmod 8$ međusobno različiti. Tada za njihovu sumu vrijedi:

$$\sum_{i=1}^8 (\pi(i) - i) \bmod 8 = (0 + 1 + 2 + \dots + 7) \bmod 8 = 28 \bmod 8 = 4.$$

No, s druge strane je

$$\sum_{i=1}^8 (\pi(i) - i) \bmod 8 = \left(\sum_{i=1}^8 \pi(i) - \sum_{i=1}^8 i \right) \bmod 8 = 0,$$

što je kontradikcija.



MEDO 2024./2025.

Četvrto kolo

8.2.2025.

Loomen

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-4.1. [10 bodova]

Riješi nejednadžbu

$$\frac{2x+1}{x-2} \geq a$$

u skupu realnih brojeva u ovisnosti o realnom parametru a .

Rješenje.

Kako bi razlomak s lijeve strane bio definiran, ne smije biti $x - 2 = 0$; dakle, uvjet na bilo koje rješenje je $x \neq 2$. Danu nejednadžbu bismo uz ovaj uvjet mogli pomnožiti s $x - 2$ da se „riješimo” nazivnika; međutim, tada bismo trebali dijeliti rješenje na slučajeve ovisno o predznaku izraza $x - 2$, jer množenjem nejednadžbe s negativnim brojem se mijenja smjer nejednakosti.

Pojednostavimo stoga najprije razlomak s lijeve strane:

$$\frac{2x+1}{x-2} = \frac{2(x-2)+4+1}{x-2} = \frac{2\cancel{(x-2)}+5}{\cancel{x-2}} = 2 + \frac{5}{x-2}.$$

Nejednadžba sada postaje

$$\frac{5}{x-2} \geq a - 2.$$

Predznak desne strane nejednakosti ovisi samo o vrijednosti realnog parametra a , a predznak lijeve samo o vrijednosti nazivnika $x - 2$. Ako je $a - 2 > 0$, tada mora biti i $\frac{5}{x-2} > 0$, tj. $x - 2 > 0$. Slijedi da možemo množiti nejednakost s $x - 2$ i dijeliti ju s $a - 2 \neq 0$ bez promjene smjera nejednakosti. Dobijemo da je $x \leq \frac{5}{a-2} + 2$, pa rješenje dane nejednadžbe u slučaju $a > 2$ glasi $x \in \left(2, \frac{5}{a-2} + 2\right]$.

Ako je pak $a < 2$, desna strana je negativna, pa svi x za koje je vrijednost lijeve strane pozitivna zadovoljavaju nejednakost; to vrijedi za sve $x > 2$. Ako je $x - 2 < 0$, množenje nejednakosti s $x - 2$ te dijeljenje s $a - 2 \neq 0$ tada dva puta promijeni smjer nejednakosti, što znači da ponovno dođemo do $x \leq \frac{5}{a-2} + 2$. Rješenje nejednadžbe u slučaju $a < 2$ konačno glasi $x \in \left(-\infty, \frac{5}{a-2} + 2\right] \cup \langle 2, \infty \rangle$.

Preostalo je još analizirati slučaj $a - 2 = 0$. Tada je rješenje nejednadžbe svaki x za koji je $x - 2 > 0$. Dakle, za $a = 2$ su sva rješenja nejednadžbe $x \in \langle 2, \infty \rangle$.

Zadatak S-4.2. [20 bodova]

Odredi zadnjih šest znamenaka broja čiji kub završava sa 777 777.

Rješenje.

Neka je n prirodan broj čiji kub završava sa 777 777. Poznato je da na zadnju znamenku umnoška dva prirodna broja utječu samo zadnje znamenke brojeva koji se množe. Odredimo stoga najprije zadnju znamenku broja n , neka je to a . Dakle, zadnja znamenka broja n^3 će biti zadnja znamenka broja a^3 ; kako to mora biti znamenka 7, jedina mogućnost za a je 3 ($3^3 = 27$).

Promotrimo sada zadnje dvije znamenke kuba n^3 . Na njih utječu jedino zadnje dvije znamenke broja n . Znamo da n završava na 3, pa nazovimo predzadnju znamenku (znamenku desetica) broja n s b . Sada možemo isprobavati sve mogućnosti za b , kubirati dobiveni dvoznamenkasti broj $\overline{b3}$ i vidjeti kada je završetak tog kuba jednak 77. No, možemo se poslužiti i algebarskim izrazima, kako slijedi.

Trebamo dakle kubirati broj $\overline{b3} = 10b + 3$. Učinimo to „po definiciji”, tj. množenjem broja $10b + 3$ tri puta samog sa sobom (prisjetimo se da zagrade množimo tako da svaki član jedne zagrade množimo sa svakim članom druge zagrade):

$$\begin{aligned}(10b + 3)^3 &= (10b + 3) \cdot (10b + 3) \cdot (10b + 3) \\ &= (100b^2 + 30b + 30b + 3^2) \cdot (10b + 3) = (100b^2 + 60b + 9) \cdot (10b + 3) \\ &= 1000b^3 + 300b^2 + 600b^2 + 180b + 90b + 27 = 1000b^3 + 900b^2 + 270b + 27.\end{aligned}$$

(Do ovog rezultata mogli smo doći direktno preko formule za *kub zbroja*: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.) Vidimo da prva dva člana dobivenog zbroja ne utječu na zadnje dvije znamenke (jer će oni sigurno završavati sa dvije nule). Zadnje dvije znamenke određuju označeni brojevi, tj. zadnje dvije znamenke su određene vrijednošću izraza $70b + 27$. Vidimo da je zadnja znamenka ovog broja doista uvijek 7 te da nema „prijenosa” vrijednosti s mjesta jedinica na mjesto desetica, pa će predzadnja znamenka (znamenka desetica) biti upravo jednaka zadnjoj znamenci izraza $7b + 2$. Kako bi i ova znamenka bila jednaka 7, mora biti $b = 5$.

Nastavljamo dalje istim postupkom. Na zadnje tri znamenke kuba utječu zadnje tri znamenke broja n . Zadnje dvije znamenke su 53; označimo znamenku stotica sa c . Ponovno računamo:

$$(100c + 53)^3 = 100^3c^3 + 3 \cdot 100^2c^2 \cdot 53 + 3 \cdot 100c \cdot 53^2 + 53^3 = 100^3c^3 + 159 \cdot 100^2c^2 + 842700c + 148877.$$

Prva dva člana ponovno ne utječu na znamenku stotica. Znamenka stotica će biti zadnja znamenka izraza $7c + 8$. Kako i ova znamenka mora biti jednaka 7, slijedi da $7c$ mora završavati sa 9, što je jedino moguće za $c = 7$.

Označimo dalje znamenku tisućica broja n s d ; znamo da je četveroznamenkasti završetak broja n jednak $\overline{d753} = 1000d + 753$. Kubiranjem ovog broja dobijemo:

$$\begin{aligned}(1000d + 753)^3 &= 1000^3d^3 + 3 \cdot 1000^2d^2 \cdot 753 + 3 \cdot 1000d \cdot 753^2 + 753^3 \\ &= 1000^3d^3 + 2259 \cdot 1000^2d^2 + 1701027000d + 426957777.\end{aligned}$$

Znamenka tisućica broja n^3 je stoga zadnja znamenka izraza $7d + 7$. Kako bi ova znamenka bila jednaka 7, mora biti $d = 0$.

Označimo sada znamenku desettisućica s e . Analognim računom dobijemo

$$\begin{aligned}(10000e + 753)^3 &= 10000^3e^3 + 3 \cdot 10000^2e^2 \cdot 753 + 3 \cdot 10000e \cdot 753^2 + 753^3 \\ &= 10000^3e^3 + 2259 \cdot 10000^2e^2 + 17010270000e + 426957777.\end{aligned}$$

Analognim zaključivanjem dobijemo da izraz $7e + 5$ mora završavati na 7, iz čega slijedi $e = 6$.

Konačno, odredimo i znamenku stotisućica f broja n . Ponovno kubiramo:

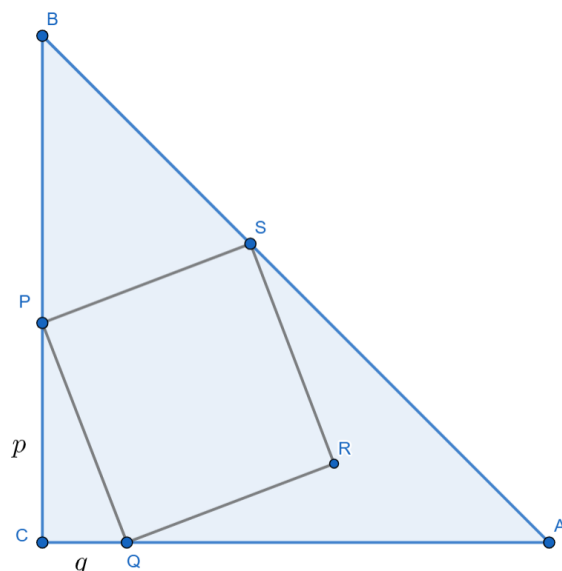
$$\begin{aligned}(100000f + 60753)^3 &= 100000^3f^3 + 3 \cdot 100000f^2 \cdot 60753 + 3 \cdot 100000f \cdot 60753^2 + 60753^3 \\ &= 100000^3f^3 + 182259 \cdot 100000f^2 + 110727810270000f + 224234888577777.\end{aligned}$$

Izraz $7f + 5$ mora završavati sa 7, što je jedino moguće za $f = 6$. Zaključujemo da je šesteroznamenkasti završetak broja n jednak $\overline{660753}$.

Zadatak S-4.3. [30 bodova]

U jednakokračni pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat $PQRS$ tako da se točke P , Q i S nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka R je unutar trokuta. Odredi omjer $|CP| : |CQ|$ ako je poznato da površina kvadrata $PQRS$ iznosi $\frac{2}{5}$ površine trokuta ABC .

Rješenje.

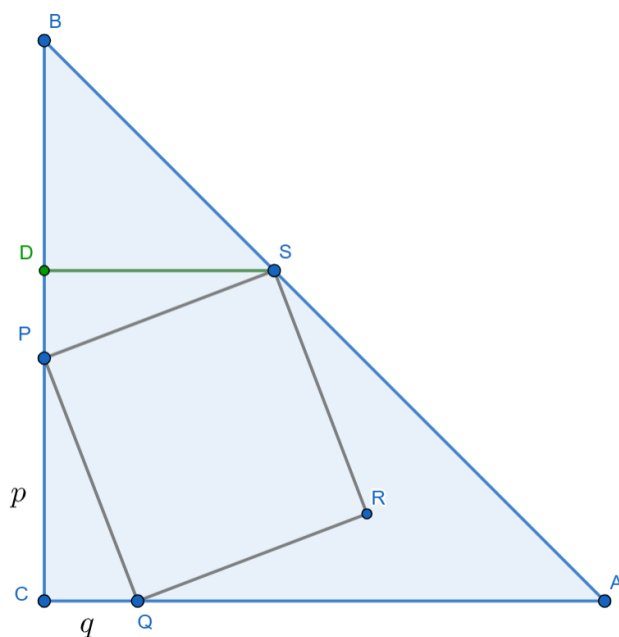


Označimo $|AC| = |BC| = a$, $|CP| = p$ i $|CQ| = q$. Po Pitagorinom poučku primjenjenom na pravokutni trokut QPC dobijemo da je duljina stranica kvadrata $PQRS$ jednaka $\sqrt{p^2 + q^2}$. Stoga površina kvadrata $PQRS$ iznosi $p^2 + q^2$. Površina jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC iznosi $\frac{a^2}{2}$, pa iz danog omjera površine kvadrata $PQRS$ i trokuta ABC dobijemo $\frac{p^2 + q^2}{a^2} = \frac{1}{5}$.

Trebamo sada pronaći još jednu vezu između a , p i q . U tu svrhu, povucimo okomicu iz točke S na stranicu $\overline{BC}$ i označimo nožište sa D . Uočimo sada da su pravokutni trokuti CQP i DPS sukladni po SKS poučku. Doista, hipotenuze PQ i SP su im jednake duljine kao stranice istog kvadrata te vrijedi

$$\sphericalangle SPD = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle CPQ = 90^\circ - \sphericalangle CPQ = \sphericalangle PQC.$$

Slijedi da je $|PD| = q$ i $|DS| = p$.



Trokut BDS je jednakokračan pravokutni, pa vrijedi i $|BD| = |DS| = q$. Sada po stranici $\overline{BC}$ vidimo

da vrijedi $a = 2p + q$. Uvrstimo to u ranije dobivenu jednakost:

$$\begin{aligned}\frac{p^2 + q^2}{(2p + q)^2} &= \frac{1}{5} \\ 5(p^2 + q^2) &= (2p + q)^2 \\ 5p^2 + 5q^2 &= 4p^2 + 4pq + q^2 \\ p^2 - 4pq + 4q^2 &= 0 \\ (p - 2q)^2 &= 0\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da mora biti $p - 2q = 0$, tj. $p : q = 2 : 1$.

Zadatak S-4.4. [40 bodova]

Ana i Branko igraju sljedeću igru, koju zovu *toplo-hladno*. Ana započinje igru tako da zamisli neki dvoznamenkasti broj. Nakon toga Branko pokušava pogoditi Anin broj nizom upita. Ana Branku odgovara s:

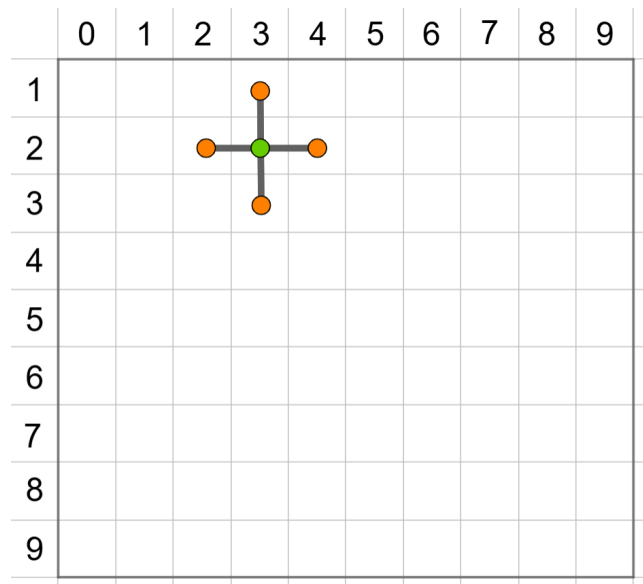
- „točno” ako je pogodio broj koji je Ana zamislila;
- „toplo” ako je pogodio jednu znamenku Aninog broja i to na pravom mjestu, a preostala znamenka Brankovog broja se razlikuje za jedan od preostale znamenke Aninog broja;
- „hladno”, inače.

- a) Dokaži da ne postoji strategija koja Branku osigurava da pogodi Anin broj s najviše 18 upita.
- b) Odredi strategiju kojom Branko može pogoditi Anin broj s najviše 24 upita.
- c) Postoji li strategija kojom Branko može pogoditi Anin broj s najviše 22 upita?

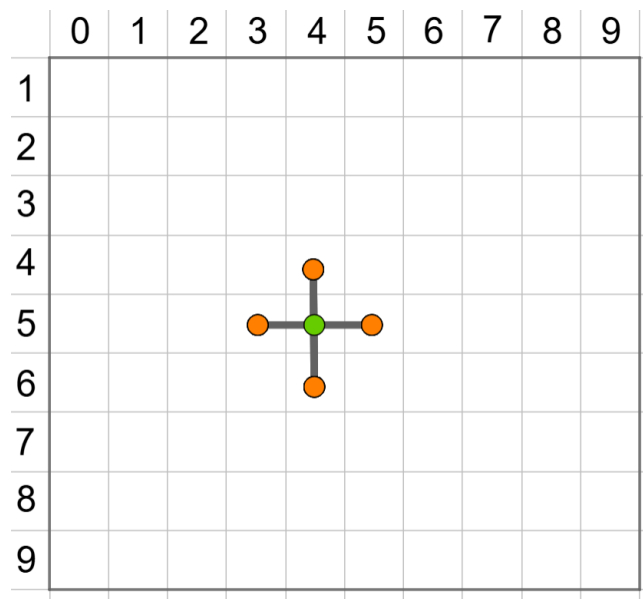
Rješenje.

a) Pretpostavimo suprotno, tj. da Branko ima strategiju kojom sa sigurnošću određuje Anin broj u ne više od 18 pokušaja. Ako na Brankov upit $\overline{ab}$ Ana kaže „hladno” Branko može zaključiti nešto o najviše 5 brojeva. Naime u slučaju da $a \notin \{1, 9\}$ i $b \notin \{0, 9\}$ to da $\overline{a(b-1)}$, $\overline{a(b+1)}$, $\overline{(a-1)b}$, $\overline{(a+1)b}$ i $\overline{ab}$ nisu Anin broj. Ako $a \in \{1, 9\}$ i $b \in \{0, 9\}$ eliminirati može manje od 5 brojeva. Dakle bez obzira na Brankovu strategiju, moguće je da na prvih 17 upita dobije odgovor „hladno”. Kako svakim pitanjem Branko „provjerava” najviše 5 brojeva, nakon 17 upita ostaje barem $90 - 17 \cdot 5 = 5$ brojeva za koje nema nikakvu informaciju. Tada s jednim preostalim pitanjem sigurno ne može dovoljno suziti izbor među preostalim brojevima, odnosno takva strategija ne može postojati.

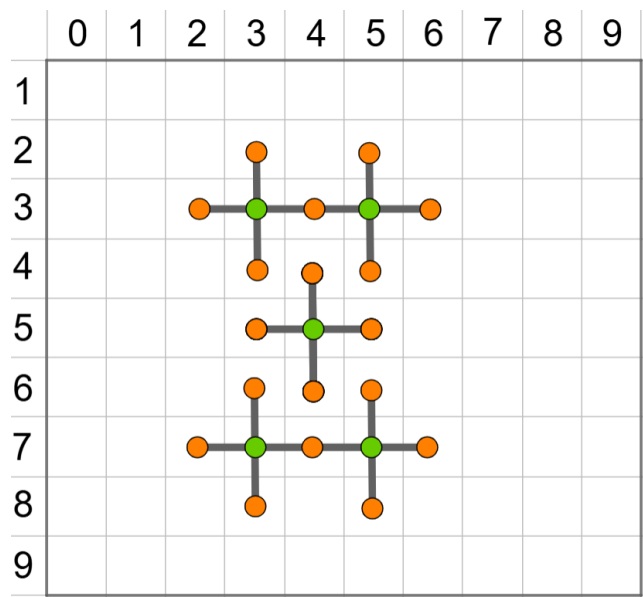
b) Posložimo sve dvoznamenkaste brojeve u 9×10 tablicu u kojoj red određuje prvu znamenku, a stupac drugu znamenku broja. Brankovi upiti se tada mogu shvatiti kao prekrivanje polja ove tablice likovima: svaki lik prekriva broj za koji Branko pita i njegove susjede, tj. polja s kojima dijeli stranicu. Primjerice, reprezentacija upita za broj 23 je lik „plus” koji prekriva polja 23 (odgovor „točno”) te polja 13, 22, 24 i 33 (odgovor „toplo”):



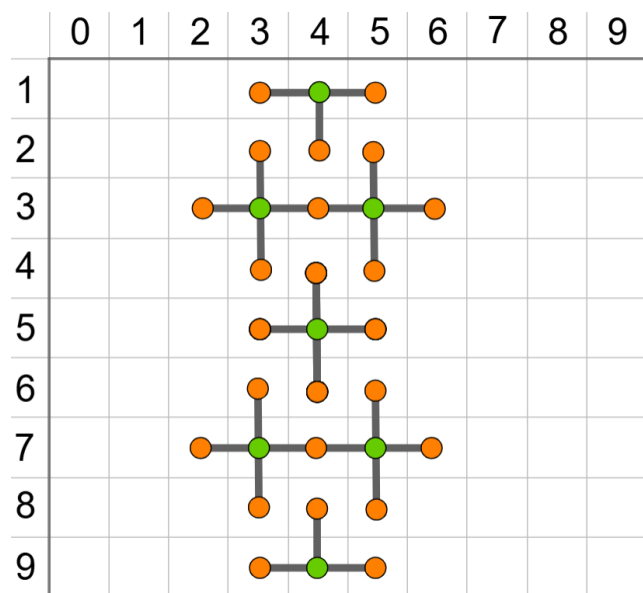
Ako sada uspijemo prekriti sva polja ove tablice s najviše 24 lika koji predstavljaju Brankove upite, tada ćemo doći do tražene strategije. Krenimo od sredine tablice, primjerice od polja 54, jer tada jednim upitom sigurno prekrijemo maksimalnih 5 polja.



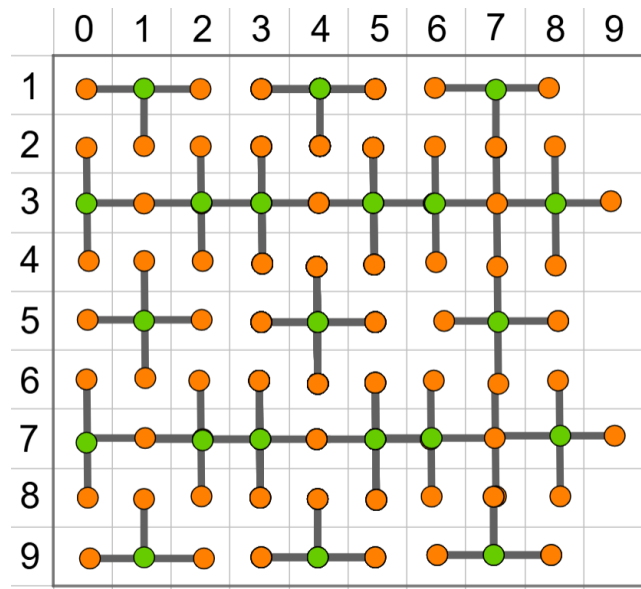
Nastavimo s popunjavanjem sredine, i to tako da s novim upitima prekrijemo što više nepokrivenih polja:



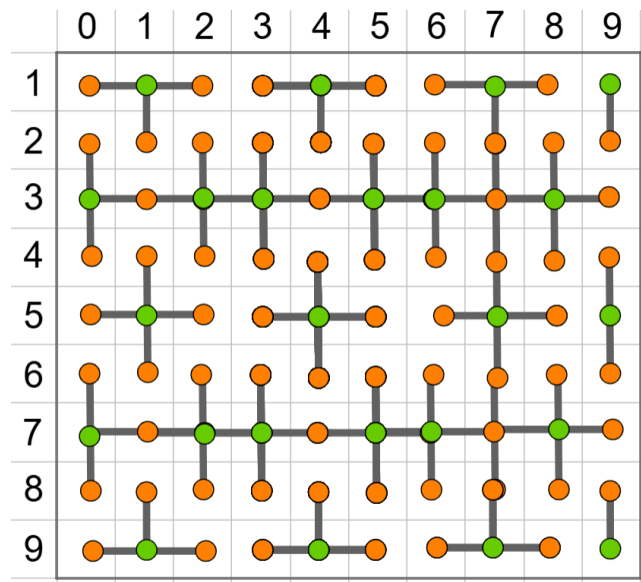
Dovršimo sada prekrivanje tri središnja stupca upitima za brojeve 14 i 94:



Do sada smo iskoristili 7 upita. Sada primijetimo da prethodna tri stupca, kao i sljedeća tri, možemo prekriti na analogan način, tj. možemo „kopirati” prekrivanje tri središnja stupca. Time dobijemo prekrivanje velikog dijela tablice koristeći $3 \cdot 7 = 21$ upit:



Preostala tri upita rasporedimo na brojeve 19, 59 i 99:



Sada je Brankova strategija sljedeća. Najprije pita za 21 „zeleni” broj koji su u središtima likova u prvih devet stupaca. Ako je na neko od ovih upita odgovor „točno”, očito mu je dovoljno manje od 24 pokušaja; ako je na neki odgovor „toplo”, treba mu još najviše tri dodatna upita da sazna Anin broj, dakle sve skupa najviše 24 upita. Ako je pak na sve upite odgovor „hladno”, zna da je broj negdje u zadnjem stupcu. Njegov 22. upit je tada broj 59: ako je odgovor „točno”, gotov je, a ako je odgovor „toplo”, treba mu još najviše jedan upit da sazna Anin broj. Ako je odgovor „hladno” i na ovaj upit, tada pita za broj 19 kao svoj 23. upit: ako Ana odgovori „točno”, gotov je, a ako odgovori „toplo”, sigurno zna da je Anin broj 29. Konačno, ako Ana odgovori s „hladno” i na ovaj upit, njegov posljednji 24. upit je broj 99 – ili je to Anin broj ili njegov susjed 89.

c) Predstaviti ćemo strategiju s kojom Branko u 22 pokušaja određuje Anin broj. Prekrit ćemo našu tablicu dvoznamenkastih brojeva s 22 lika: 9 pluseva, 9 krnjih-pluseva, 2 linije i 2 točke (primijetimo da broj 50 ostane nepokriven):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		—	—		•		—	—		
2				—	—			—	—	
3	—	—			—	—			—	—
4	—		—	—			—	—		—
5				—	—			—	—	
6	—	—				—	—		—	—
7	—		—	—				—	—	
8	—	—			—	—			—	—
9		—	—		•		—	—		

Brankova strategija je sljedeća: prvo pita za brojeve u centrima pluseva; ako su svi odgovori „hladno”, tada prelazi na brojeve u središtima krnjih pluseva. Ako su odgovori i dalje „hladno”, pokušava s centrima linija, i na kraju s točkama. Ako je ostao na „hladno”, Anin broj je 50.

Ako Ana odgovori s „točno” u nekom koraku, Branko je u zadanom broju koraka odredio Anin broj.

Preostaje objasniti slučaj kada Ana odgovori s „toplo”. Ako je to nakon upita za središnji broj nekog plusa, tada Branko sužava izbor na 4 broja i korištenjem 3 dodatna upita može odrediti Anin broj. Konkretno, nakon što pita za 3 kandidata će ili dobiti jedan „točno” ili će zaključiti da je 4. broj onaj kojeg ja Ana zamislila. Kako je po strategiji zadnji plus na redu u 9. pitanju Branko ima još 3 dodatna pitanja na raspolaganju.

Analogno razmišljanje rješava i slučaj krnjih pluseva, gdje su Branku potrebna 2 dodatna pitanja nakon prvog „toplo” za određivanje Aninog broja. Kako je po strategiji zadnji krnji plus 18. po redu Branko također ima vremena. Konačno, ukoliko prvo „toplo” nastupi u 19. ili 20. pitanju, odnosno nakon upita za središte linija, Branko na analogan način jednim dodatnim pitanjem saznaje točan broj. Dakle, opisanom strategijom može u najviše 22 pitanja odrediti Anin broj.

Zadatak S-4.5. [50 bodova]

Neka je n prirodan broj i S_n zbroj prvih n prostih brojeva. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji prirodni broj a takav da je $S_n \leq a^2 \leq S_{n+1}$.

Rješenje.

Označimo s p_n n -ti prosti broj. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji prirodni broj N tako da između S_N i S_{N+1} ne postoji kvadrat prirodnog broja te neka je N najmanji takav prirodan broj. Očito je $N \geq 2$ jer između $S_1 = 2$ i $S_2 = 5$ imamo kvadrat $2^2 = 4$.

Nadalje, kako je $N \geq 2$ najmanji takav da između S_N i S_{N+1} ne postoji potpuni kvadrat slijedi da između S_{N-1} i S_N postoji kvadrat prirodnog broja. Neka je k najveći prirodan broj takav da je $S_{N-1} \leq k^2 \leq S_N$.

Budući da između S_N i S_{N+1} ne postoji potpuni kvadrat slijedi da je $(k+1)^2 > S_{N+1}$.

Imamo da je $2k+1 = (k+1)^2 - k^2 > S_{N+1} - S_N = p_{N+1} \geq p_N + 2$, odnosno $k > \frac{p_N + 1}{2}$.

S druge strane za $N \geq 5$ vrijedi $k^2 \leq S_N = p_1 + p_2 + \dots + p_N \leq 1 + 3 + 5 + \dots + p_N = \frac{(p_N + 1)^2}{4}$, tj.

$k \leq \frac{p_N + 1}{2}$ što je kontradikcija s prijašnjom nejednakosti $k > \frac{p_N + 1}{2}$.

Direktnom provjerom svih $N \leq 4$ vidimo da između S_N i S_{N+1} uvijek postoji potpuni kvadrat.

Dakle, prirodan broj N iz početne pretpostavke ne postoji. Time smo dokazali da između S_n i S_{n+1} postoji potpuni kvadrat za svaki prirodan broj n .

Zadatak S-4.6. [60 bodova]

Dan je šiljastokutan trokut ABC i unutar njega točka P . Pravac BP siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D , a pravac CP siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E . Pravci DE i AP sijeku se u točki F . Neka je K nožište okomice iz točke F na stranicu $\overline{BC}$. Dokaži da je pravac KF simetrala kuta $\sphericalangle DKE$.

Prvo rješenje.

Neka su A' , D' i E' redom nožišta okomica iz A , D i E na BC te neka je točka T presjek pravaca AP i BC .

Označimo s $\lambda = \frac{|BE|}{|BA|}$ i $\mu = \frac{|CD|}{|CA|}$.

Iz sličnosti trokuta $BE'E$ i $BA'A$ slijedi da je $|EE'| = \lambda|AA'|$. Analogno je i $|DD'| = \mu|AA'|$. Prema tome imamo da je $\frac{|EE'|}{|DD'|} = \frac{\lambda}{\mu}$.

Primjenom Menelajevog teorema na trokut ABC i pravac AP slijedi

$$\frac{|BT|}{|TC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|} \cdot \frac{|AE|}{|EB|} = 1,$$

iz čega dobijemo $\frac{|BT|}{|TC|} = \frac{1 - \mu}{1 - \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu}$.

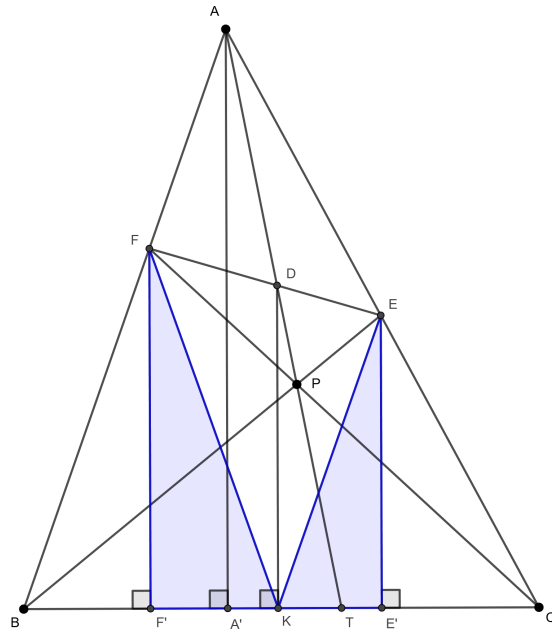
Primjenom Menelajevog teorema na trokut BCD i pravac AP dobijemo $\frac{|DP|}{|PB|} = (1 - \lambda) \cdot \frac{\mu}{\lambda}$.

Konačno, primjenom Menelajevog teorema na trokut BDE i pravac AP imamo $\frac{|EF|}{|FD|} = \frac{\lambda}{\mu}$.

Budući da su E' , K i D' nožišta okomica iz E , F i D na BC slijedi da je

$$\frac{|E'K|}{|KD'|} = \frac{|EF|}{|FD|} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Po teoremu SKS o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti $E'KE$ i $D'KD$ slični. Time je $\sphericalangle EKE' = \sphericalangle D'KD$ iz čega slijedi da je KF simetrala kuta $\sphericalangle DKE$ što je i trebalo dokazati.



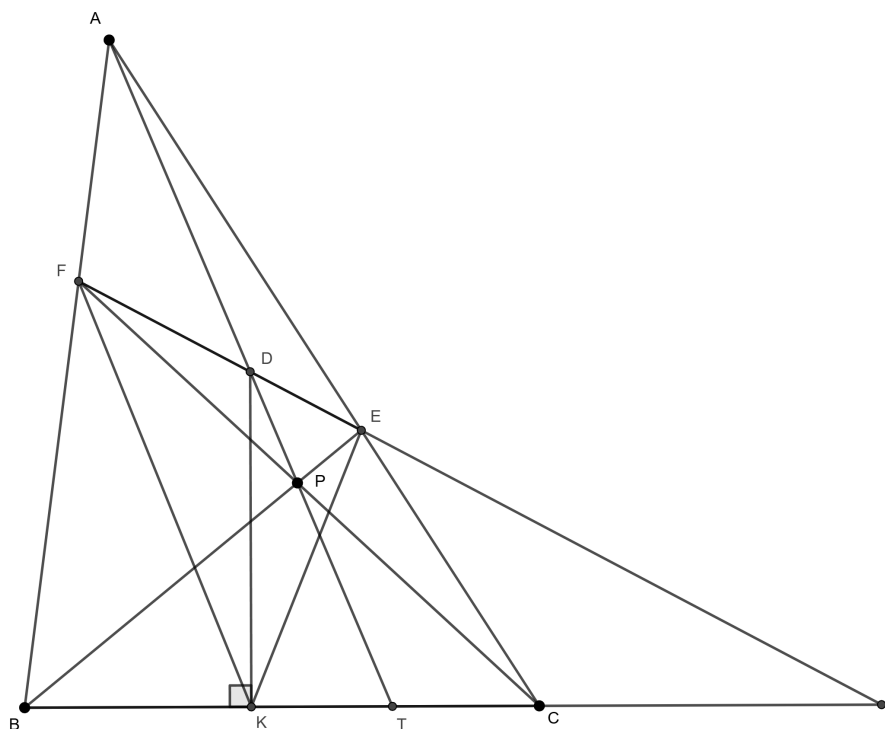
Drugo rješenje.

Označimo s L presjek pravaca DE i BC .

Prema *pencil lemi o dvoomjerima* zaključujemo da su tada točke D , E , F i L harmonijske.

Nadalje, kako je $\angle FKL = 90^\circ$ slijedi da se točka K nalazi na Apolonijevoj kružnici određenoj točkama D i E i omjerom $\frac{|DF|}{|EF|}$.

Zbog toga je $\frac{|KD|}{|KE|} = \frac{|DF|}{|EF|}$ iz čega slijedi da je KF simetrala kuta $\angle DKE$.



Zadatak S-4.7. [70 bodova]

Odredi sve prirodne brojeve n i proste brojeve p za koje $p^n + 1$ dijeli $n^p + 1$.

Rješenje.

Tražimo parove (n, p) takve da vrijedi $p^n + 1 \mid n^p + 1$.

Ako je $p = 2$, slijedi $2^n + 1 \leq n^2 + 1$, odnosno $2^n \leq n^2$, a to vrijedi samo za $n = 2, 3, 4$. Lako se provjeri da su samo $(2, 2)$ i $(4, 2)$ rješenja.

Neka je $p \geq 3$ neparan. Tada je $p^n + 1$ paran pa i $n^p + 1$ mora biti paran. Dakle, n je neparan pa $(p + 1) \mid p^n + 1 \mid n^p + 1$.

Neka je $q \neq 2$ neki prosti djeliteľ od $p + 1$. Imamo $n^p \equiv -1 \pmod{q}$, odnosno $n^{2p} \equiv 1 \pmod{q}$. Slijedi da je $\text{ord}_q(n) \in \{1, 2, p, 2p\}$. Zbog $n^p \equiv -1 \pmod{q}$ slijedi da je $\text{ord}_q(n) \in 2, 2p$.

Ako bi bilo $\text{ord}_q(n) = 2p$, po malom Fermatovu teoremu bi vrijedilo $2p \mid q - 1$, pa je $2p \leq q - 1 \leq p$, što je kontradikcija.

Dakle, $\text{ord}_q(n) = 2$, pa je $n \equiv -1 \pmod{q}$, odnosno $q \mid n + 1$. Uočimo da je $v_q(n^p + 1) = v_q(n + 1) + v_q(p) = v_q(n + 1)$ po lemi o podizanju eksponenta i kako je $p \neq q$. Kako je $v_q(p + 1) \leq v_q(n^p + 1)$, slijedi $v_q(p + 1) \leq v_q(n + 1)$.

Uočimo da $2 \mid p + 1$. Uočimo da je $v_2(n^p + 1) = v_2((n + 1)(n^{p-1} - n^{p-2} + \dots - n + 1)) = v_2(n + 1)$ jer je p neparan. Dakle, $v_2(p + 1) \leq v_2(n^p + 1) \leq v_2(n^p + 1) = v_2(n + 1)$.

Ukupno, imamo $p + 1 \mid n + 1$, odnosno $p \leq n$. Uočimo da je (p, p) rješenje, pa gledamo slučaj $n > p \geq 3$.

Neka je $a > b \geq 3$. Pokažimo da je tada $b^a > a^b$. Za $a = b + k$ želimo dokazati:

$b^{b+k} > (b + k)^b$, što je ekvivalentno s $b^k > (1 + \frac{k}{b})^b$, što je istina jer je $b \geq 3$, a izraz na desnoj strani rastom b raste prema $e^k < 3^k \leq b^k$.

Dakle, možemo zaključiti $p^n > n^p$, što je kontradikcija s početnim uvjetom. Zato su sva rješenja $(4, 2)$

i (p, p) , gdje je p prost.