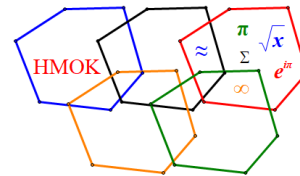


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 4. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Matematika

Eli je bilo dosadno pa je na računalu uzastopno zapisala riječ „matematika“ mnogo puta. Zatim je između svake dvije riječi upisala naizmjenice jedno pa dva slova X.

matematikaXmatematikaXXmatematikaXmatematikaXXmatematikaXma...

Na kojem se mjestu u tom nizu nalazi stoto slovo a ?

Rezultat: 381

Rješenje. Uočimo da se u zapisanom nizu ponavlja niz od 23 slova: matematikaXmatematikaXX.

U njemu se slovo a pojavljuje šest puta. Kako je $100 : 6 = 16$ i ostatak 4, odnosno $100 = 16 \cdot 6 + 4$, zaključujemo da se u 16 takvih kraćih nizova slovo a pojavljuje 96 puta. Za preostala četiri pojavljivanja slova a potrebno je zapisati još 13 slova (matematikaXma).

Dakle, redni broj stotog slova a je $16 \cdot 23 + 13 = 381$.

2. Simboli

U sljedećim jednakostima svaki od znakova $\odot$, $\boxtimes$ i $\triangle$ zamjenjuje jedan broj.

$$\odot + \triangle \cdot \odot = 884$$

$$\boxtimes + \triangle : \odot = 36$$

$$\triangle + \triangle + \triangle = 153$$

Kolika je vrijednost izraza $\triangle + \odot \cdot \boxtimes$?

Rezultat: 612

Rješenje.

Iz treće jednakosti zaključujemo da je $\triangle = 153 : 3 = 51$.

Stoga je prva jednakost $\odot + 51 \cdot \odot = 884$, što znači da je $52 \cdot \odot = 884$ pa je $\odot = 884 : 52 = 17$.

Umjesto $\boxtimes + \triangle : \odot = 36$ možemo pisati $\boxtimes + 51 : 17 = 36$ ili $\boxtimes + 3 = 36$ pa je $\boxtimes = 33$.

Tražena vrijednost izraza $\triangle + \odot \cdot \boxtimes$ je $51 + 17 \cdot 33 = 51 + 561 = 612$.

3. Palindrom

Broj je *palindrom* ako ima istu vrijednost kad ga čitamo slijeva udesno i zdesna ulijevo. Na primjer, broj 12321 je palindrom. Zbroj dvaju palindroma, od kojih je jedan četveroznamenkast, a drugi troznamenkast, iznosi 2025. Koji je taj troznamenkast palindrom?

Rezultat: 474

Rješenje. Neka je četveroznamenkast palindrom $\overline{abba}$, a troznamenkast palindrom $\overline{cdc}$ pri čemu su a, b, c i d znamenke. Promotrimo zapis zbrajanja tih brojeva.

$$\begin{array}{r} a \ b \ b \ a \\ + \quad c \ d \ c \\ \hline 2 \ 0 \ 2 \ 5 \end{array}$$

Promatrajući znamenke tisućica, može se zaključiti da znamenka a ne može biti veća od 2 jer je znamenka tisućica zbroja jednaka 2. Kad bi bilo $a = 2$, tada bi zbroj znamenaka stotica $b + c$ trebao biti 0, što je nemoguće jer $c \neq 0$. Dakle, $a = 1$ pa imamo

$$\begin{array}{r} 1 \ b \ b \ 1 \\ + \quad c \ d \ c \\ \hline 2 \ 0 \ 2 \ 5 \end{array}$$

Iz znamenaka jedinica zaključujemo da je $c = 4$,

$$\begin{array}{r} 1 \ b \ b \ 1 \\ + \quad 4 \ d \ 4 \\ \hline 2 \ 0 \ 2 \ 5 \end{array}$$

Dakle, zbroj znamenaka desetica je $b + d = 2$ ili $b + d = 12$.

Ako bi bilo $b + d = 2$, tada bi zbroj znamenaka stotica bio $b + 4 = 10$, tj. $b = 6$, što nije moguće.

Zaključujemo da je $b + d = 12$.

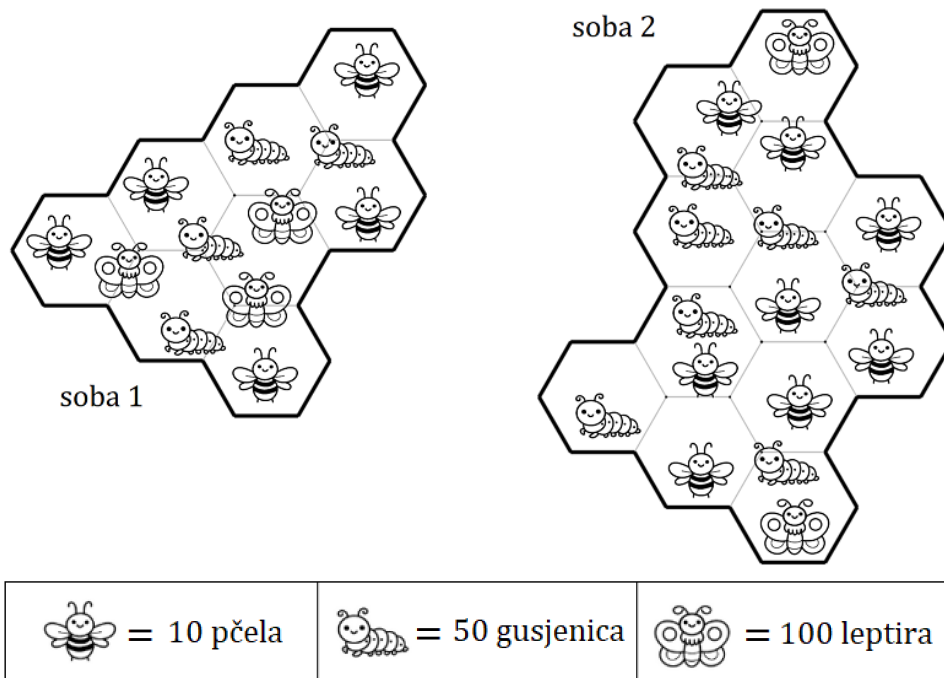
Konačno, iz znamenaka stotica zaključujemo da vrijedi $1 + b + 4 = 10$ jer $1 + b + 4 = 0$ nije moguće. Zato mora biti $b = 5$ pa je $d = 7$.

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 5 \ 1 \\ + \quad 4 \ 7 \ 4 \\ \hline 2 \ 0 \ 2 \ 5 \end{array}$$

Traženi troznamenkast palindrom je 474.

4. Kukci

Pčelica Maja je stigla u pansion Med i mlijeko. U pansionu su dvije sobe različitih veličina. U sobama su već smješteni drugi kukci: pčele, gusjenice i leptiri. Slike prikazuju veličine soba, a simboli unutar sobe označavaju broj pojedinih kukaca u svakoj sobi.



Kako bi im bilo što ugodnije, kukci su se unutar svake sobe rasporedili tako da oko svakog kukca bude jednako slobodnog prostora. Pčelica Maja odlučuje otići u sobu u kojoj kukci imaju više slobodnog prostora za sebe. Koliko je kukaca u toj sobi prije dolaska pčelice Maje?

Rezultat: 630

Rješenje.

U prvoj sobi nalazi se $5 \cdot 10 = 50$ pčela, $4 \cdot 50 = 200$ gusjenica i $3 \cdot 100 = 300$ leptira, tj. ukupno $50 + 200 + 300 = 550$ kukaca.

U drugoj sobi nalazi se $8 \cdot 10 = 80$ pčela, $7 \cdot 50 = 350$ gusjenica i $2 \cdot 100 = 200$ leptira, tj. ukupno $80 + 350 + 200 = 630$ kukaca.

U prvoj sobi 550 kukaca smješteno je na površini od osam šesterokuta, a u drugoj sobi 630 kukaca raspoređeno je na površini od 12 šesterokuta.

Ako se ravnomjerno rasporede, u prvoj sobi bi na svakom šesterokutu bilo $550 : 8$ kukaca, a u drugoj sobi $630 : 12$ kukaca.

Kako je $550 : 8 = 68$ i ostatak 6 te $630 : 12 = 52$ i ostatak 6, manja je gužva u drugoj sobi.

Maja je odabrala sobu 2 u kojoj se već nalazilo 630 kukaca.

5. Puž i kornjača

Puž i kornjača krenuli su istovremeno jedno prema drugome. Puž se kreće stalno jednakom brzinom prelazeći 6 metara za 15 minuta. Kornjača se kreće stalno jednakom brzinom prelazeći za 5 minuta dvostruko veću udaljenost nego puž za 10 minuta. Nakon 9 minuta još uvijek se nisu susreli, a međusobno su udaljeni onoliko koliko iznosi trećina njihove početne udaljenosti. Koliko su decimetara puž i kornjača bili udaljeni na početku?

Rezultat: 270

Prvo rješenje. Puž u 15 minuta prijeđe 60 dm pa u 5 minuta prijeđe 20 dm, u jednoj minuti 4 dm, a u 10 minuta 40 dm. Kornjača u 5 minuta prijeđe dvostruko veću udaljenost od puža u 10 minuta, tj. 80 dm, a u jednoj minuti 16 dm. Nakon 9 minuta puž je prešao 36 dm, a kornjača 144 dm.

Ukupno su prešli 180 dm, što je dvije trećine njihove početne udaljenosti. Jedna trećina početne udaljenosti je 90 dm, pa je početna udaljenost 270 dm.

Puž i kornjača su na početku bili udaljeni 270 dm.

Drugo rješenje. Puž u 15 minuta prijeđe 6 m, u 5 minuta 2 m, a u 10 minuta 4 m. Kornjača u 5 minuta prijeđe dvostruko više od $2 \cdot 2 = 4$ m, tj. 8 m. Puž i kornjača ukupno u 5 minuta prijeđu $2 + 8 = 10$ m. U jednoj minuti oni prijeđu $10 : 5 = 2$ m. U 9 minuta prijeći će ukupno $9 \cdot 2 = 18$ m.

Nakon 9 minuta udaljeni su upola manje nego što je ukupni put koji su prešli, pa je preostala udaljenost 9 m. Ukupna udaljenost na početku bila je $18 + 9 = 27$ metara odnosno 270 dm.

Puž i kornjača su na početku bili udaljeni 270 dm.

6. Površina pravokutnika

U kvadratnoj mreži ucrtan je pravokutnik.

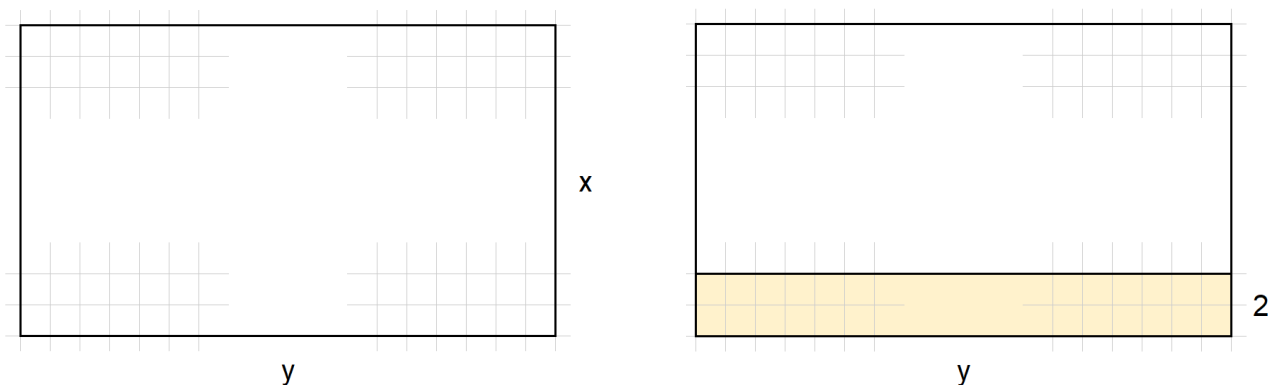
Ako se duljina kraće stranice tog pravokutnika umanjuje za 2, površina mu se smanji za 84.

Ako se duljina duže stranice danog pravokutnika uveća za 3, površina mu se poveća za 51.

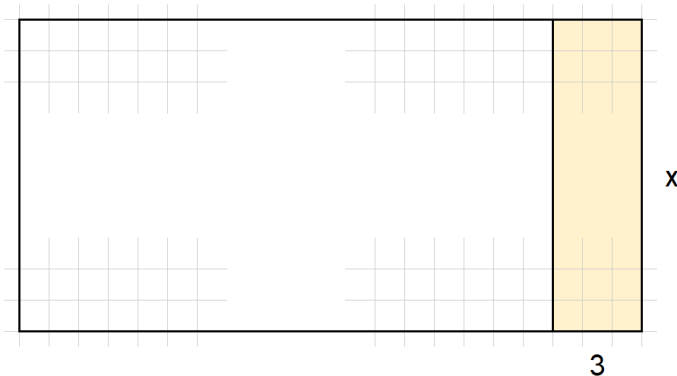
Kolika je površina ucrtanog pravokutnika?

Rezultat: 714

Rješenje. Neka su duljine susjednih stranica pravokutnika x i y , pri čemu je $x < y$.



Ako se duljina kraće stranice x umanjuje za 2, površina pravokutnika se smanji za 84 pa je $2 \cdot y = 84$ i $y = 42$.



Ako se duljina duže stranice y uveća za 3, površina mu se poveća za 51 pa je $3 \cdot x = 51$ i $x = 17$.

Površina zadanog pravokutnika je $17 \cdot 42 = 714$.

7. Kvadratna tablica

U tablicu s 45 redaka i 45 stupaca Sergej je upisao sve prirodne brojeve od 1 do 2025. Broj 1 je upisao u središte tablice, a zatim je upisivao brojeve redom u smjeru kazaljke na satu, kao što je prikazano na slici. Kolika je razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku odozgo tako popunjene tablice?

21	22	23	...	
20	7	8	9	10
19	6	1	2	11
18	5	4	3	12
17	16	15	14	13

Rezultat: 173

Prvo rješenje.

Zbog redoslijeda popunjavanja tablice, u drugom retku najveći se broj nalazi u prvom polju, a najmanji broj u drugom polju. Brojevi između ta dva broja upisani su u označena polja (vidi sliku).

U tim su poljima $44 + 43 + 44 + 43 = 174$ uzastopna broja. Najveći broj je za 173 veći od najmanjeg.

Napomena:

Na slici se vidi koji su brojevi u tim poljima, ali u ovom rješenju nam te vrijednosti nisu potrebne.

1981	1982			...			2024	2025
1980	1807	1808		...			1849	1850
1979	1806	↖				↗		1851
			7	8	9			
...			6	1	2			...
			5	4	3			
		↘				↙		
1938								1892
1937	1936			...			1894	1893

Drugo rješenje.

U gornjem retku tablice zapisano je posljednjih 45 brojeva, tj. svi brojevi od $2025 - 44 = 1981$ do 2025. Najveći broj u drugom retku od vrha je broj u prvom polju, tj. broj koji se nalazi ispod broja 1981, a to je broj 1980.

S prvih $43 \cdot 43 = 1849$ brojeva, Sergej je popunio sva polja tablice osim onih na rubu. Zatim upisuje broj 1850 u posljednje polje drugog retka. Od drugog do predzadnjeg polja u drugom retku nalaze se brojevi od $43 \cdot 43 - 42 = 1849 - 42 = 1807$ do $43 \cdot 43 = 1849$.

Dakle, u drugom retku napisani su redom brojevi

1980 1807 1808 1809 ... 1849 1850.

Najmanji broj u drugom retku tablice je broj 1807, a najveći broj 1980.

Razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku tablice je $1980 - 1807 = 173$.

8. Akvarij

U akvariju se nalaze samo ribice narančaste, zelene, plave i crne boje. Ako 93 ribice nisu narančaste boje, 101 ribica nije zelene boje, 69 ribica nije plave boje, a 88 ribica nije crne boje, koliko je ukupno ribica u akvariju?

Rezultat: 117

Rješenje. Neka su N, Z, P i C , redom, broj narančastih, zelenih, plavih i crnih ribica.

N	Z	P	C
-----	-----	-----	-----

Neka je U ukupan broj ribica u akvariju. Vrijedi $N + Z + P + C = U$.

Uvjete zadatka možemo prikazati slikama

N	93
Z	101
P	69
C	88

te vidimo da vrijedi

$$(N + 93) + (Z + 101) + (P + 69) + (C + 88) = 4 \cdot U$$

$$(N + Z + P + C) + (93 + 101 + 69 + 88) = 4 \cdot U$$

$$U + 351 = 4 \cdot U$$

Zaključujemo da je ukupan broj ribica u tri takva akvariju 351. Konačno, $U = 351 : 3 = 117$.

Ukupan broj ribica u akvariju je 117.

9. Manji od 500

Koliko ima troznamenastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ?

Rezultat: 883

Prvo rješenje. Odredit ćemo najprije broj troznamenastih brojeva kojima umnožak znamenaka nije manji od 500. Trebamo odrediti tri znamenke čiji je umnožak 500 ili veći.

Ako je jedna od znamenaka 6 ili manja, najveći mogući umnožak je $9 \cdot 9 \cdot 6 = 486 < 500$. Zato su jedine moguće znamenke 7, 8 i 9.

Ako se koriste dvije znamenke 7, najveći mogući umnožak je $7 \cdot 7 \cdot 9 = 441 < 500$.

Također, $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448 < 500$.

Ostali umnošci su veći od 500:

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 > 500$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 > 500$$

Očito su i umnošci $7 \cdot 9 \cdot 9$, $8 \cdot 8 \cdot 9$, $8 \cdot 9 \cdot 9$, $9 \cdot 9 \cdot 9$ veći od 500.

Kombinacije znamenaka čiji je umnožak veći od 500 su

7, 8, 9,	8, 8, 8,	7, 9, 9	8, 8, 9,	8, 9, 9,	9, 9, 9
6	1	3	3	3	1

to jest, ukupno 17.

Taj broj treba oduzeti od broja svih troznamenastih brojeva: $900 - 17 = 883$.

Troznamenastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima 883.

Drugo rješenje. Neka je $\overline{abc}$ troznamenasti broj. Prema uvjetu zadatku mora biti $a \cdot b \cdot c < 500$. Kako je najveća moguća vrijednost znamenke 9, umnožak $b \cdot c$ može biti najviše 81.

Ako je a bilo koja znamenka od 1 do 6, umnožak znamenaka može biti najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Stoga svi brojevi od 100 do 699 zadovoljavaju uvjet zadaka. Takvih je brojeva 600.

a	b	c	broj brojeva
$a = 7$, tada je $7 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 72$.	od 0 do 7	od 0 do 9	80
	8	od 0 do 8	9
	9	od 0 do 7	8
$a = 8$, tada je $8 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 63$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 8	9
	8	od 0 do 7	8
$a = 9$, tada je $9 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 56$.	9	od 0 do 6	7
	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 7	8
	8	od 0 do 6	7
	9	od 0 do 6	7

Troznamenastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima ukupno

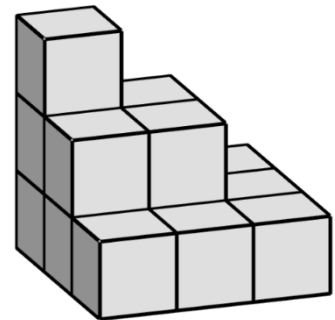
$$600 + 97 + 94 + 92 = 883.$$

Napomena. Ovakvo razmatranje možemo početi i od znamenke jedinica. Ako je c bilo koja znamenka od 0 do 6, umnožak znamenaka bit će najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Ako je $c = 7$ postoji ukupno 87 brojeva s umnoškom znamenaka manjim od 500. Za $c = 8$ takvih je brojeva 84, a za $c = 9$ ima ih 82. Ukupno je takvih brojeva $7 \cdot 90 + 87 + 84 + 82 = 883$.

10. Kockice

Tijelo izgrađeno od velikog broja jednakih kockica čije strane imaju površinu 1 sastoji se od 15 slojeva. U najnižem sloju nalazi se 225 kockica raspoređenih u 15 redaka i 15 stupaca. U sloju iznad njega kockice su raspoređene u 14 redaka i 14 stupaca.

U svakom je sljedećem sloju broj redaka i broj stupaca za jedan manji. U najvišem sloju nalazi se jedna kockica. Na slici su prikazana samo gornja tri sloja tog tijela. Kolika je ukupna površina svih strana tog tijela?



Rezultat: 930

Rješenje.

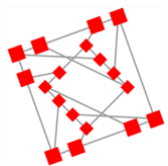
Dno tog tijela je strana čija je površina jednaka $15 \cdot 15 = 225$.

Površina svake bočne strane je jednaka i iznosi $1 + 2 + \dots + 15 = 120$,

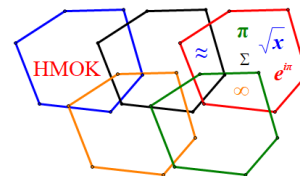
a površina svih četiriju bočnih strana $4 \cdot 120 = 480$

Površina svih preostalih (gornjih) strana jednaka je površini dna, dakle 225.

Ukupna površina svih strana tog tijela je $225 + 480 + 225 = 930$.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 4. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. Kvadrat zbroja znamenaka

Marina će 2025. godine navršiti onoliko godina koliki je zbroj znamenaka godine njezina rođenja. Odredi kvadrat zbroja znamenaka godine njezina rođenja, znajući da je rezultat troznamenkasti broj.

Rezultat: 729

Prvo rješenje. Zbroj znamenaka godine rođenja ne može biti veći od $9 + 9 + 9 + 9 = 36$, pa je Marina rođena u 20. ili 21. stoljeću.

Ako je rođena u 20. stoljeću, godina njezina rođenja je oblika $\overline{19ab}$ gdje je a znamenka desetice, a b znamenka jedinice tog broja.

Po uvjetu zadatka je $2025 - \overline{19ab} = 1 + 9 + a + b$, pa je $2025 - (1900 + 10a + b) = 10 + a + b$, iz čega slijedi $115 = 11a + 2b$.

Za $a \leq 8$ dobivamo da $2b > 20$ što nije moguće jer je b znamenka.

Za $a = 9$ dobivamo $b = 8$ pa je godina Marininog rođenja 1998.

Promotrimo drugi slučaj, da je Marina rođena u 21. stoljeću. Tada je godina njezina rođenja oblika $\overline{20ab}$ gdje je a znamenka desetice, a b znamenka jedinice. Uočimo da a može biti samo 0, 1 ili 2. Uvjet postaje $2025 - \overline{20ab} = 2 + 0 + a + b$ pa je $25 - (10a + b) = 2 + a + b$, odnosno $23 = 11a + 2b$.

Za $a = 0$ i $a = 2$ nema rješenja, a za $a = 1$ dobije se $b=6$. Da je Marina rođena 2016. godine, ove godine bi navršila 9 godina, a zbroj znamenaka broja 2016 je upravo 9. Međutim, to nije rješenje jer je kvadrat broja 81 dvoznamenkasti broj.

Dakle, Marina je rođena 1998. godine, a kvadrat zbroja znamenaka godine njezina rođenja je $(1 + 9 + 9 + 8)^2 = 27^2 = 729$.

Drugo rješenje.

Prikažimo tablicom rast broja Marininih godina i zbroj znamenaka godine rođenja od 2025. unatrag.

GODINA ROĐENJA	ZBROJ ZNAMENAKA	BROJ GODINA
2024.	8	1
2023.	7	2
2022.	6	3
2021.	5	4

2020.	4	5
2019.	12	6
2018.	11	7
2017.	10	8
2016.	9	9

Ako je Marina rođena 2016. sada ima 9 godina, a zbroj znamenaka godine njezina rođenja iznosi 9. Kvadrat tog broja je $9 \cdot 9 = 81$. To nije troznamenkast broj, pa ne zadovoljava uvjet zadatka.

GODINA ROĐENJA	ZBROJ ZNAMENAKA	BROJ GODINA
2015.	8	10
2014.	7	11
2013.	6	12
2012.	5	13
2011.	4	14
2010.	3	15
2009.	11	16

Primjećujemo da će se dalje do 2000. godine zbroj znamenaka smanjivati, a broj godina rasti, pa nastavljamo s 1999. godinom.

GODINA ROĐENJA	ZBROJ ZNAMENAKA	BROJ GODINA
1999.	28	26
1998.	27	27
1997.	26	28

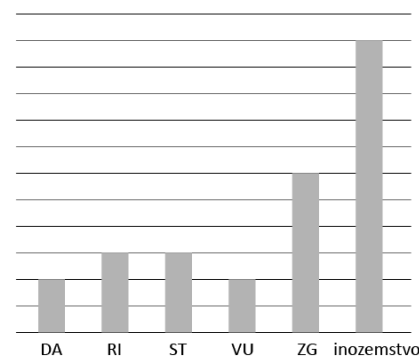
Ako je Marina rođena 1998. sada ima 27 godina, a zbroj znamenaka godine njezina rođenja iznosi 27.

Nastavimo li računati dalje uočavamo da broj godina života i dalje raste, a zbroj znamenaka ne može biti veći od $1 + 9 + 9 + 9 = 28$, pa druga rješenja ne postoje jer bi Marina imala više od 28 godina da je rođena prije 1997. godine.

Kvadrat broja 27 je troznamenkasti broj 729, što je traženo rješenje.

2. Autokamp

U autokampu se nalaze automobili iz pet hrvatskih gradova (Daruvara, Rijeke, Splita, Vukovara i Zagreba) te iz inozemstva. Udio automobila u kampu prema registarskim oznakama prikazan je dijagramom. Ako je prosječan broj automobila iz spomenutih pet hrvatskih gradova u autokampu 35.2, koliko je u autokampu inozemnih automobila?



Rezultat: 121

Rješenje.

Neka je broj x polovina broja automobila iz Daruvara i Vukovara. Tada je broj automobila iz Daruvara i Vukovara $2x$, broj automobila iz Rijeke i Splita $3x$, a broj automobila iz Zagreba $6x$. Broj inozemnih automobila je $11x$.

Prosječan broj automobila iz spomenutih pet hrvatskih gradova je

$$35.2 = \frac{2x + 3x + 3x + 2x + 6x}{5}$$

pa je $16x = 35.2 \cdot 5 = 176$, $x = 176 : 16 = 11$.

Broj inozemnih automobila je $11x = 11 \cdot 11 = 121$.

3. Površina pravokutnika

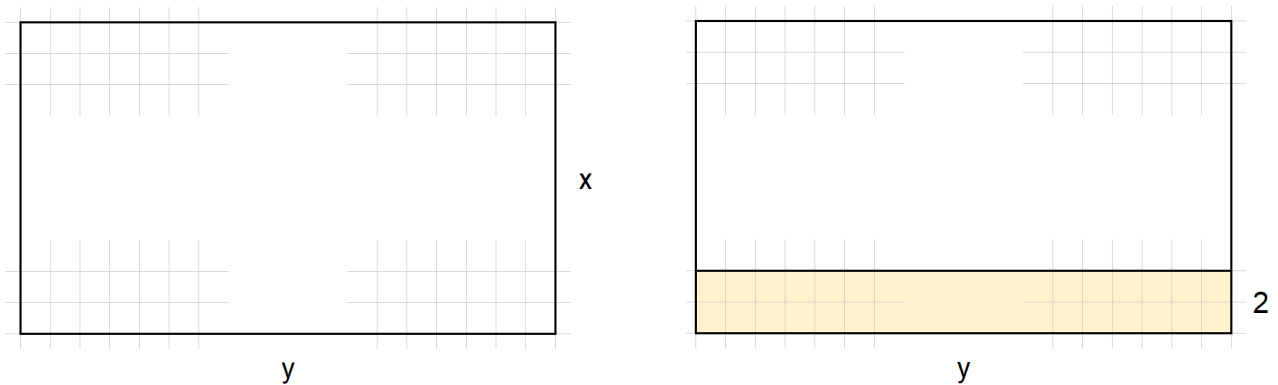
O nekom je pravokutniku poznato sljedeće:

- Ako se duljina kraće stranice pravokutnika umanjuje za 2, površina će se smanjiti za 84.
- Ako se duljina duže stranice pravokutnika uveća za 3, površina će se povećati za 51.

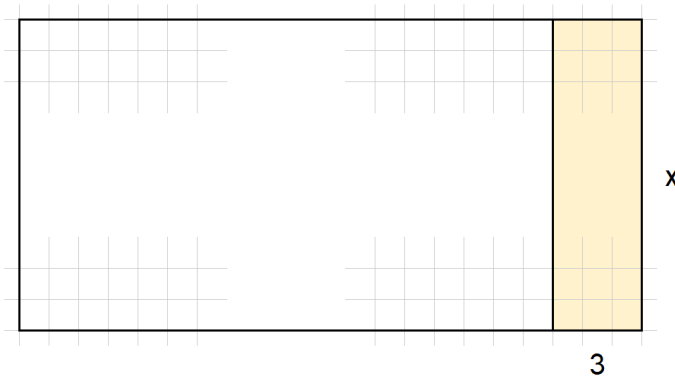
Kolika je površina tog pravokutnika?

Rezultat: 714

Prvo rješenje. Neka su duljine susjednih stranica pravokutnika x i y , pri čemu je $x < y$.



Ako se duljina kraće stranice x umanjuje za 2, površina pravokutnika se smanji za 84 pa je $2 \cdot y = 84$ i $y = 42$.



Ako se duljina duže stranice y uveća za 3, površina mu se povećava za 51 pa je $3 \cdot x = 51$ i $x = 17$.

Površina zadanog pravokutnika je $17 \cdot 42 = 714$.

Drugo rješenje.

Neka su duljine stranica pravokutnika x i y . Njegova je površina $x \cdot y$.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$$(x - 2) \cdot y = x \cdot y - 84$$

$$x \cdot (y + 3) = x \cdot y + 51$$

Primjenom svojstava distributivnosti množenja prema zbrajanju i oduzimanju dobije se:

$$x \cdot y - 2y = x \cdot y - 84$$

$$x \cdot y + 3x = x \cdot y + 51$$

iz čega slijedi

$$2y = 84, \quad y = 42,$$

$$3x = 51, \quad x = 17.$$

Površina zadanog pravokutnika je $17 \cdot 42 = 714$.

4. Kvadratna tablica

U kvadratnu tablicu Sergej je upisao prirodne brojeve od 1 do 2025, svaki broj točno jednom. Broj 1 je upisao u središte tablice, a zatim je upisivao brojeve redom u smjeru kazaljke na satu, kao što je prikazano na slici. Kolika je razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku odozgo tako popunjene tablice?

21	22	23	...	
20	7	8	9	10
19	6	1	2	11
18	5	4	3	12
17	16	15	14	13

Rezultat: 173

Prvo rješenje. Kako je $2025 = 45^2$, popunjena tablica ima 45 stupaca i 45 redaka.

Zbog redoslijeda popunjavanja tablice, u drugom retku najveći se broj nalazi u prvom polju, a najmanji broj u drugom polju. Brojevi između ta dva broja upisani su u označena polja (vidi sliku).

U tim su poljima $44 + 43 + 44 + 43 = 174$ uzastopna broja. Najveći broj je za 173 veći od najmanjeg.

Napomena:

Na slici se vidi koji su brojevi u tim poljima, ali u ovom rješenju nam te vrijednosti nisu potrebne.

1981	1982			...			2024	2025
1980	1807	1808		...			1849	1850
1979	1806	↖				↗		1851
			7	8	9			
...			6	1	2			...
			5	4	3			
		↘				↙		
1938								1892
1937	1936			...			1894	1893

Drugo rješenje.

Kako je $2025 = 45^2$, popunjena tablica ima 45 stupaca i 45 redaka.

U gornjem retku tablice zapisano je posljednjih 45 brojeva, tj. svi brojevi od $2025 - 44 = 1981$ do 2025. Najveći broj u drugom retku od vrha je broj u prvom polju, tj. broj koji se nalazi ispod broja 1981, a to je broj 1980.

S prvih $43 \cdot 43 = 1849$ brojeva, Sergej je popunio sva polja tablice osim onih na rubu. Zatim upisuje broj 1850 u posljednje polje drugog retka. Od drugog do predzadnjeg polja u drugom retku nalaze se brojevi od $43 \cdot 43 - 42 = 1849 - 42 = 1807$ do $43 \cdot 43 = 1849$.

Dakle, u drugom retku napisani su redom brojevi

1980 1807 1808 1809 ... 1849 1850.

Najmanji broj u drugom retku tablice je broj 1807, a najveći broj 1980.

Razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku tablice je $1980 - 1807 = 173$.

5. Ema, Flora i Gita

Prijateljice Ema, Flora i Gita zamislile su po jedan prirodan broj. Sve znamenke Eminog i Florinog broja čine skup $\{1, 4, 6, 7, 8, 9\}$, a jedine zajedničke znamenke su 6 i 8. Sve znamenke Eminog i Gitinog broja čine skup $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$, a jedine zajedničke znamenke su 6 i 9. Jedina zajednička znamenka Florinog i Gitinog broja je znamenka 6.

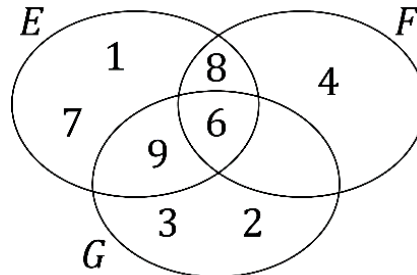
Koji je najmanji mogući broj koji je jedna od prijateljica mogla zamisliti?

Rezultat: 468

Prvo rješenje.

Neka je E skup znamenaka Eminog broja, F skup znamenaka Florinog broja, te G skup znamenaka Gitinovog broja. Prikažimo Vennovim dijagramom elemente tih skupova.

U sva tri skupa nalazi se znamenka 6, u presjeku skupova E i F je još i znamenka 8, a u presjeku skupova E i G je i znamenka 9.



Znamenke 1 i 7 nalaze se u uniji skupova E i F i u uniji skupova E i G , ali nisu u presjeku skupova F i G . Stoga zaključujemo da su te znamenke u skupu E .

Dalje zaključujemo da je znamenka 4 u skupu F (a nije u E niti G), te da su znamenke 2 i 3 u skupu G (ali ne u skupovima E ni F).

Florin broj ima tri znamenke, Gitin četiri, a Emin pet znamenaka. Najmanji mogući broj mogla je zamisliti Flora, a to je broj 468.

Drugo rješenje.

Skupove navedene u zadatku zvat ćemo „prvi skup“ (skup znamenaka Eminog i Florinog broja) i „drugi skup“ (skup znamenaka Eminog i Gitinovog broja).

U tablici ćemo označiti koje su znamenke u pojedinim brojevima. Sva tri broja imaju znamenku 6.

U Florinom broju je još i znamenka 8, u Gitinom znamenka 9, a u Eminom obje znamenke i 8 i 9.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ema							●		●	●
Flora							●		●	
Gita							●			●

Znamenke 2 i 3 nisu u prvom skupu, a jesu u drugom skupu. To znači da nisu u Eminom broju, pa moraju biti u Gitinom broju.

Znamenka 4 je u prvom skupu, ali nije u drugom skupu. To znači da nije u Eminom broju, pa se nalazi u Florinom broju.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ema							●		●	●
Flora					●		●		●	
Gita			●	●			●			●

Znamenke 1 i 7 nalaze se u prvom i drugom skupu, a Florin i Gitin broj nemaju zajedničkih znamenaka. To znači da te znamenke moraju biti u Eminom broju te nisu ni u Florinom, ni u Gitinom.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ema		●					●	●	●	●
Flora					●		●		●	
Gita			●	●			●			●

Znamenke 0 i 5 nisu ni u jednom od brojeva.

Sada vidimo da Emin broj ima pet znamenaka (1, 6, 7, 8 i 9), Florin broj tri znamenke (4, 6 i 8), a Gitin broj četiri znamenke (2, 3, 6 i 8). Najmanji broj je Florin,

Kako tražimo najmanji mogući broj, to je broj 468.

1

6. Pedeseti redak

2 3

4 5 6

7 8 9 10

11 12 13 14 15

...

Prirodni brojevi zapisani su redom i to tako da je u prvom retku zapisan jedan broj, u drugom retku dva broja te u svakom sljedećem retku po jedan broj više nego u prethodnom retku.

Koliki je umnožak znamenki zbroja svih brojeva u pedesetom retku?

Rezultat: 600

Rješenje. Uočimo da je broj brojeva u svakom retku jednak rednom broju retka te da je posljednji broj u svakom retku zbroj svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih broju retka.

U prvom retku je broj 1.

Drugi redak ima dva broja, a posljednji je broj $1 + 2 = 3$.

Treći redak ima tri broja, a posljednji je broj $1 + 2 + 3 = 6$.

Četvrti redak ima četiri broja, a posljednji je broj $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

...

Četrdeset deveti redak ima 49 brojeva, a posljednji je broj $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 49$.

Taj zbroj odredit ćemo na sljedeći način:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49$$

$$\underline{49 + 48 + 47 + \dots + 1}$$

$$50 + 50 + 50 + \dots + 50$$

Vrijedi $2A = 50 \cdot 49$, odnosno $A = 25 \cdot 49 = 1225$.

Pedeseti redak započinje brojem 1226, a završava s $1225 + 50 = 1275$, pa je zbroj svih pedeset brojeva u pedesetom retku $B = 1226 + 1227 + \dots + 1275$.

Taj zbroj određujemo na sličan način:

$$1226 + 1227 + \dots + 1275$$

$$\underline{1275 + 1274 + \dots + 1226}$$

$$2501 + 2501 + \dots + 2501$$

Vrijedi $2B = 50 \cdot 2501$, odnosno $B = 25 \cdot 2501 = 62525$.

Umnožak znamenki zbroja svih brojeva u pedesetom retku iznosi $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 600$.

7. Manji od 500

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ?

Rezultat: 883

Prvo rješenje.

Odredit ćemo najprije broj troznamenkastih brojeva kojima umnožak znamenaka nije manji od 500. Trebamo odrediti tri znamenke čiji je umnožak 500 ili veći.

Ako je jedna od znamenaka 6 ili manja, najveći mogući umnožak je $9 \cdot 9 \cdot 6 = 486 < 500$. Zato su jedine moguće znamenke 7, 8 i 9.

Ako se koriste dvije znamenke 7, najveći mogući umnožak je $7 \cdot 7 \cdot 9 = 441 < 500$.

Također, $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448 < 500$.

Ostali umnošci su veći od 500:

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 > 500$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 > 500$$

Očito su i umnošci $7 \cdot 9 \cdot 9$, $8 \cdot 8 \cdot 9$, $8 \cdot 9 \cdot 9$, $9 \cdot 9 \cdot 9$ veći od 500.

Kombinacije znamenaka čiji je umnožak veći od 500 su

7, 8, 9, 8, 8, 8, 7, 9, 9 8, 8, 9, 8, 9, 9, 9, 9, 9

Lako provjerimo da takvih brojeva ima ukupno $6 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 = 17$.

Taj broj treba oduzeti od broja svih troznamenkastih brojeva: $900 - 17 = 883$.

Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima 883.

Drugo rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj. Prema uvjetu zadatku mora biti $a \cdot b \cdot c < 500$. Kako je najveća moguća vrijednost znamenke 9, umnožak $b \cdot c$ može biti najviše 81.

Ako je a bilo koja znamenka od 1 do 6, umnožak znamenaka može biti najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Stoga svi brojevi od 100 do 699 zadovoljavaju uvjet zadaka. Takvih je brojeva 600.

a	b	c	broj brojeva
$a = 7$, tada je $7 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 72$.	od 0 do 7	od 0 do 9	80
	8	od 0 do 8	9
	9	od 0 do 7	8
$a = 8$, tada je $8 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 63$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 8	9
	8	od 0 do 7	8
$a = 9$, tada je $9 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 56$.	9	od 0 do 6	7
	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 7	8
	8	od 0 do 6	7
	9	od 0 do 6	7

Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima ukupno

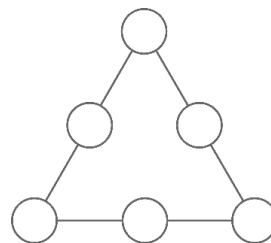
$$600 + 97 + 94 + 92 = 883.$$

Napomena.

Ovakvo razmatranje možemo početi i od znamenke jedinica. Ako je c bilo koja znamenka od 0 do 6, umnožak znamenaka bit će najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$, pa svi takvi brojevi zadovoljavaju dani uvjet. Ako je $c = 7$ postoji ukupno 87 brojeva s umnoškom znamenaka manjim od 500. Za $c = 8$ takvih je brojeva 84, a za $c = 9$ ima ih 82. Ukupno je takvih brojeva $7 \cdot 90 + 87 + 84 + 82 = 883$.

8. Raspoređeni brojevi

U svaki od kružića na slici treba upisati po jedan od brojeva 1, 2, 3, 4, 5 i 6 tako da zbroj triju brojeva na svakoj stranici trokuta bude isti. Za svaki takav raspored pomnožena su tri broja u vrhovima trokuta. Koliki je zbroj svih međusobno različitih umnožaka koji se mogu dobiti na taj način?



Rezultat: 189

Rješenje. Odredimo najprije najveći i najmanji zbroj brojeva na svakoj stranici u rasporedu koji zadovoljava navedeni uvjet. S obzirom na to da se broj 6 pojavljuje na nekoj od stranica, zbroj brojeva na stranici ne može bit manji od $1 + 2 + 6 = 9$ (to je najmanji mogući zbroj s pribrojnikom 6). Slično, zbroj na stranici ne može biti veći od $1 + 5 + 6 = 12$ (to je najveći mogući zbroj s pribrojnikom 1).

Odredimo sve moguće kombinacije triju različitih brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ čiji je zbroj 9, 10, 11 ili 12.

Zbroj 9 možemo dobiti na sljedeće načine: $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$.

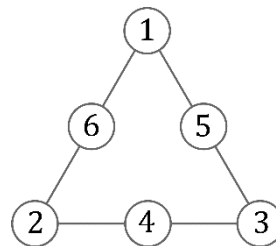
Zbroj 10 možemo dobiti na sljedeće načine: $10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$.

Zbroj 11 možemo dobiti na sljedeće načine: $11 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5$.

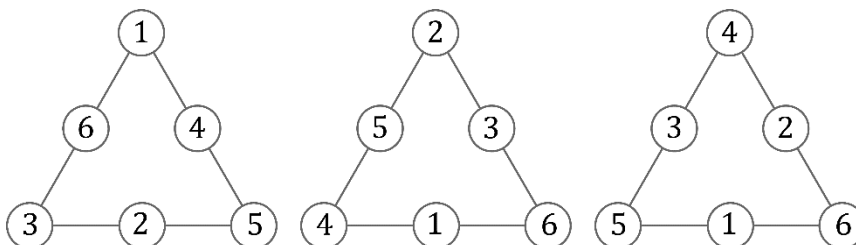
Zbroj 12 možemo dobiti na sljedeće načine: $12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5$.

Lako je vidjeti da su to sve mogućnosti.

Želimo li brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6 rasporediti u kružiće tako da zbroj triju brojeva na svakoj stranici bude 9, u vrhove moramo staviti brojeve 1, 2 i 3, a na stranice brojeve 4, 5 i 6, i to broj 4 između 2 i 3, broj 5 između 1 i 3, a broj 6 između 1 i 2.



Na sličan način raspoređujemo brojeve i u ostalim slučajevima.



Umnožak brojeva u vrhovima trokuta u prvom slučaju iznosi $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, u drugom $1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$, u trećem $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, a u četvrtom slučaju $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

Zbroj sva četiri moguća umnoška je $6 + 15 + 48 + 120 = 189$.

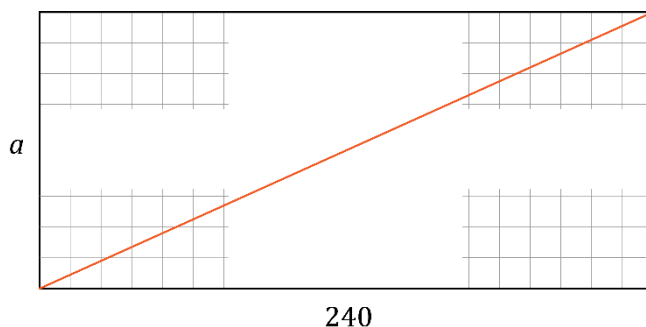
9. Na dijagonalu

Pravokutnik $ABCD$ je podijeljen na jedinične kvadrate. Njegova dijagonala $\overline{BD}$ ne prolazi ni jednim od vrhova tih kvadrata, osim točkama B i D . Na dijagonali, između točaka B i D , točno je 345 sjecišta sa stranicama tih jediničnih kvadrata. Ako duljina jedne stranice pravokutnika $ABCD$ iznosi 240, koliki je njegov opseg?

Rezultat: 694

Rješenje.

Duljinu nepoznate stranice pravokutnika označimo slovom a . Pravokutna mreža koja dijeli pravokutnik na jedinične kvadratiće sastoji se od $a - 1$ vodoravnih i 239 uspravnih dužina.



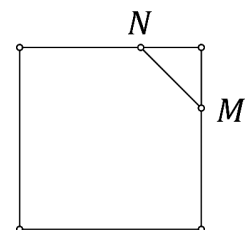
Dijagonala sigurno siječe svaku od tih dužina, pa je na njoj $a - 1$ sjecište s vodoravnim dužinama i 239 sjecišta s uspravnim dužinama. Kako dijagonala ne prolazi vrhovima jedinične mreže, te su točke međusobno različite, a prema uvjetu zadatka ukupno ih je 345.

Broj sjecišta s uspravnim dužinama je $345 - 239 = 106$, odakle zaključujemo da je $a = 107$.

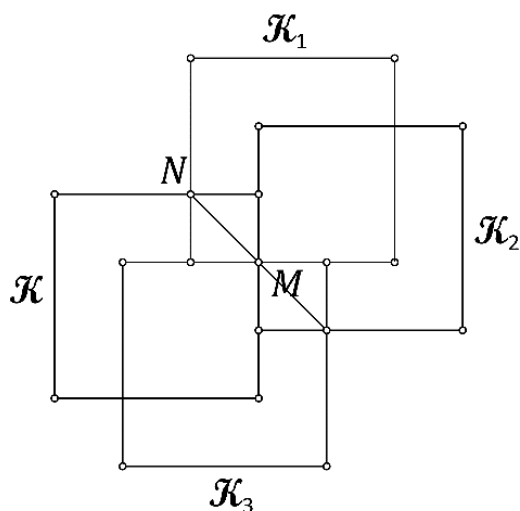
Opseg pravokutnika je $2 \cdot (240 + 107) = 694$.

10. Kvadrat i njegove slike

Neka je $\mathcal{K}$ kvadrat površine 8100 i neka su M i N točke na njegovim stranicama koje su od jednog od vrhova kvadrata udaljene za jednu trećinu duljine stranice kvadrata. Kvadrat $\mathcal{K}$ preslikan je osnom simetrijom s obzirom na pravac MN u kvadrat $\mathcal{K}_1$. Kvadrati $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}_1$ preslikani su potom centralnom simetrijom s obzirom na točku M u kvadrate $\mathcal{K}_2$ i $\mathcal{K}_3$.



Unija tih četiriju kvadrata je mnogokut. Koliki je njegov opseg?



Rezultat: 720

Rješenje.

Kako je $8100 = 90 \cdot 90$, duljina stranice danog kvadrata je 90.

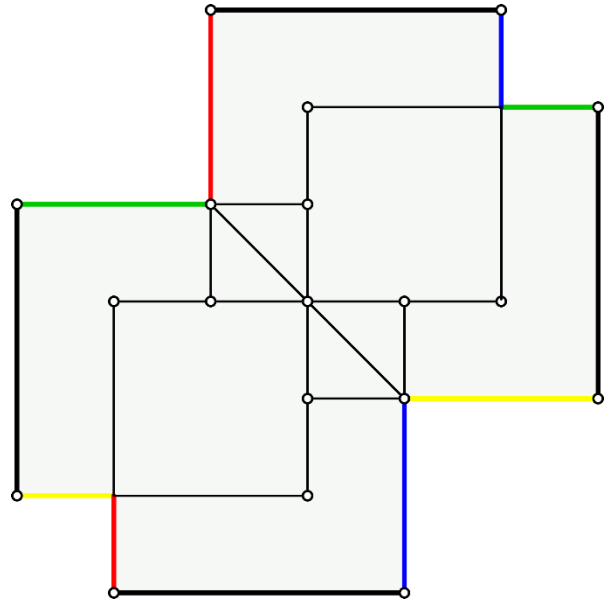
Crtež prikazuje kvadrate $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ i $\mathcal{K}_3$ dobivene opisanim preslikavanjima.

Četiri stranice mnogokuta istaknute crnom bojom imaju duljinu jednaku duljini stranice kvadrata $\mathcal{K}$.

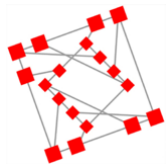
Duljina kraće dužine obojane crvenom bojom jednaka je $1/3$ duljine stranice kvadrata $\mathcal{K}$, a duljina dulje dužine obojane crvenom bojom jednaka je $2/3$ duljine stranice kvadrata $\mathcal{K}$. Zbroj duljina dužina obojanih crvenom bojom jednak je duljini stranice kvadrata $\mathcal{K}$.

Isto vrijedi i za dužine obojane plavom, zelenom i žutom bojom.

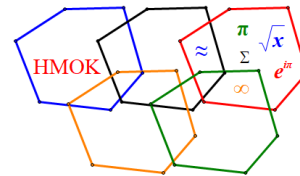
Stoga je opseg mnogokuta jednak $8 \cdot 90 = 720$.



Napomena: Sve dužine koje čine opseg mnogokuta možemo izračunati jer u sredini mnogokuta vidimo dva kvadrata stranice duljine 30. Redom krenuvši od stranice na dnu mnogokuta duljine stranica su 90, 60, 60, 90, 30, 30, 90, 60, 60, 90, 30, 30. Njihov zbroj je 720.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 4. listopada 2025.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Bazen

Bazen dubine 2 metra ima oblik kvadra. Cijev s toplom vodom napuni polovinu bazena za 10 minuta, a cijev s hladnom vodom za isto vrijeme napuni bazen do visine od 50 cm. Koliko je sekundi potrebno da se prazan bazen napuni do visine 1.25 m ako se cijev s hladnom vodom otvori u trenutku kada je cijev s toplom vodom napunila bazen do visine 75 cm?

Rezultat: 650

Rješenje. Cijev s toplom vodom napuni polovinu bazena za 10 min što znači da za 10 min napuni 1 m visine, odnosno, 10 cm za 1 min. Za 75 cm potrebno je 7.5 min.

Cijev s hladnom vodom napuni bazen do visine od 50 cm za 10 min, odnosno, 5 cm za 1 min.

Obje cijevi zajedno napune 15 cm za 1 min, pa 50 cm napune za $50:15 = \frac{10}{3}$ min.

Vrijedi $7.5 \text{ min} = 450 \text{ s}$, te $\frac{10}{3} \text{ min} = 200 \text{ s}$.

Bazen se napuni do visine 1.25 m za 650 s.

2. Stupovi

Luka je odlučio ograditi svoj pravokutni vrt s 36 stupova. Po jedan će stup postaviti u svaki vrh pravokutnika, a preostale stupove tako da su svaka dva susjedna stupa na stranicama pravokutnika jednako udaljena. Ukupan broj stupova na duljoj stranici tri je puta veći od ukupnog broja stupova na kraćoj stranici pravokutnika. Koliko iznosi površina vrta u kvadratnim metrima ako su svaka dva susjedna stupa udaljena 3 metra?

Rezultat: 504

Prvo rješenje. Neka je x broj stupova na kraćoj stranici pravokutnika.

Onda je $3x$ broj stupova na duljoj stranici.

Zbroj stupova na sve četiri stranice je $x + x + 3x + 3x = 8x$, ali kako bismo dobili ukupan broj stupova, od tog broja moramo oduzeti 4 jer smo stupove u kutovima brojali dvaput.

Znači, $8x - 4 = 36$, pa je $x = 5$.

Kraća stranica ima 5 stupova između kojih su 4 razmaka, pa je duljina $4 \cdot 3 = 12$ m.

Dulja stranica ima 15 stupova između kojih je 14 razmaka, pa je duljina $14 \cdot 3 = 42$ m.

Površina vrta iznosi $12 \cdot 42 = 504 \text{ m}^2$.

Drugo rješenje.

Neka je na kraćoj stranici broj stupova $x + 2$, a na duljoj stranici $y + 2$.

Tada vrijedi $3(x + 2) = y + 2$, odnosno $3x + 4 = y$.

Ukupno su u vrhovima pravokutnika 4 stupa, na obje kraće stranice se nalazi još po x stupova, a na obje dulje stranice se nalazi još po y stupova. Ukupan broj stupova iznosi $2x + 2y + 4 = 36$.

Dijeljenjem s 2 te oduzimanjem, dobivamo jednadžbu $x + y = 16$.

Uvrštavanjem $y = 3x + 4$ u $x + y = 16$ dobivamo $x + 3x + 4 = 16$.

Slijedi $4x = 12$, odnosno $x = 3$. Uvrštavanjem u $x + y = 16$ dobivamo $y = 13$.

Kraća stranica ima 5 stupova između kojih su 4 razmaka, pa je duljina $4 \cdot 3 = 12$ m.

Dulja stranica ima 15 stupova između kojih je 14 razmaka, pa je duljina $14 \cdot 3 = 42$ m.

Površina vrta iznosi $12 \cdot 42 = 504 \text{ m}^2$.

3. Berba krušaka

Dinka, Tina i Marta беру kruške u voćnjaku. Dinka je ubrala $\frac{2}{9}$ svih ubranih krušaka. Tina je ubrala 18 krušaka više od Dinke. Marta je ubrala 13 krušaka manje negoli Dinka i Tina zajedno. Koliko je neubranih krušaka ostalo u voćnjaku ako su djevojke pobrale $\frac{3}{5}$ svih krušaka u voćnjaku?

Rezultat: 138

Rješenje. Neka je x broj svih ubranih krušaka.

Dinka je ubrala $\frac{2}{9}x$ krušaka.

Tina je ubrala $\frac{2}{9}x + 18$ krušaka, a Marta $\frac{4}{9}x + 5$.

Ukupno su ubrali $\frac{8}{9}x + 23$ što znači da je $\frac{1}{9}x = 23$.

Broj svih ubranih krušaka je $x = 23 \cdot 9 = 207$.

Ako su djevojke pobrale $\frac{3}{5}$ svih krušaka u voćnjaku, ukupan broj krušaka je $207 : \frac{3}{5} = 345$.

Neubranih krušaka je $345 - 207 = 138$.

4. Kvadratna tablica

U kvadratnu tablicu Sergej je upisao prirodne brojeve od 1 do 2025, svaki broj točno jednom. Broj 1 je upisao u središte tablice, a zatim je upisivao brojeve redom u smjeru kazaljke na satu, kao što je prikazano na slici. Kolika je razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku odozgo tako popunjene tablice?

21	22	23	...	
20	7	8	9	10
19	6	1	2	11
18	5	4	3	12
17	16	15	14	13

Rezultat: 173

Prvo rješenje. Zbog redoslijeda popunjavanja tablice, u drugom retku najveći se broj nalazi u prvom polju, a najmanji broj u drugom polju. Brojevi između ta dva broja upisani su u osjenčana polja (vidi sliku).

U tim su poljima $44 + 43 + 44 + 43 = 174$ uzastopna broja. Najveći broj je za 173 veći od najmanjeg.

Napomena: Na slici se vidi koji su brojevi u tim poljima, ali u ovom rješenju nam te vrijednosti nisu potrebne.

1981	1982			...			2024	2025
1980	1807	1808		...			1849	1850
1979	1806	↖				↗		1851
			7	8	9			
...			6	1	2			...
			5	4	3			
		↘				↙		
1938								1892
1937	1936			...			1894	1893

Drugo rješenje.

U gornjem retku tablice zapisano je posljednjih 45 brojeva, tj. svi brojevi od $2025 - 44 = 1981$ do 2025. Najveći broj u drugom retku od vrha je broj u prvom polju, tj. broj koji se nalazi ispod broja 1981, a to je broj 1980.

S prvih $43 \cdot 43 = 1849$ brojeva, Sergej je popunio sva polja tablice osim onih na rubu. Zatim upisuje broj 1850 u posljednje polje drugog retka. Od drugog do predzadnjeg polja u drugom retku nalaze se brojevi od $43 \cdot 43 - 42 = 1849 - 42 = 1807$ do $43 \cdot 43 = 1849$.

Dakle, u drugom retku napisani su redom brojevi

1980 1807 1808 1809 ... 1849 1850.

Najmanji broj u drugom retku tablice je broj 1807, a najveći broj 1980.

Razlika najvećeg i najmanjeg broja u drugom retku tablice je $1980 - 1807 = 173$.

5. Kutovi

Neka je ABC jednakostranični trokut, a $ABDE$ kvadrat kojem je točka C u unutrašnjosti. Neka je F sjecište dužina $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ te neka su točke G i H redom sjecišta dužina $\overline{BD}$ i $\overline{DE}$ s pravcem koji sadrži točku C i okomit je na pravac AC . Odredi, u stupnjevima, zbroj mjera kutova $\sphericalangle AFB$, $\sphericalangle CGB$ i $\sphericalangle HCE$.

Rezultat: 210

Rješenje.

Vrijedi $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BAD| = 45^\circ$ jer je trokut ABD jednakokračan pravokutan.

Vrijedi $|\sphericalangle FBA| = |\sphericalangle CBA| = 60^\circ$ jer je trokut ABC jednakostraničan.

Slijedi da je $|\sphericalangle AFB| = 180^\circ - |\sphericalangle BAF| - |\sphericalangle FBA| = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$.

U četverokutu $ABGC$ kutovi pri vrhovima B i C su pravi, a kut pri vrhu A iznosi 60° .

Stoga preostali kut pri vrhu G iznosi

$$|\sphericalangle CGB| = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

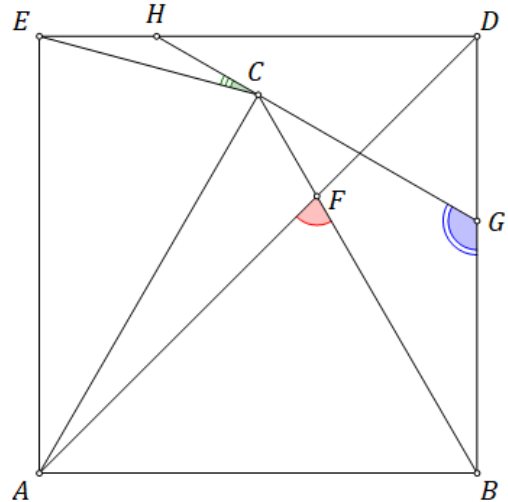
Trokut ACE je jednakokračan jer je $|AC| = |AE|$.

Vrijedi $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ i $|\sphericalangle BAE| = 90^\circ$ pa je $|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle BAE| - |\sphericalangle BAC| = 30^\circ$.

Slijedi $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle ECA| = 150^\circ : 2 = 75^\circ$.

Budući da je $|\sphericalangle HCA| = 90^\circ$ slijedi $|\sphericalangle HCE| = |\sphericalangle HCA| - |\sphericalangle ECA| = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Zbroj mjera tri označena kuta iznosi $75^\circ + 120^\circ + 15^\circ = 210^\circ$.



6. Pedeseti redak

Prirodni brojevi zapisani su redom i to tako da je u prvom retku zapisan jedan broj, u drugom retku dva broja te u svakom sljedećem retku po jedan broj više nego u prethodnom retku. Koliki je umnožak znamenki zbroja svih brojeva u pedesetom retku?

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15
.	.	.	.	.

Rezultat: 600

Rješenje. Uočimo da je broj brojeva u svakom retku jednak rednom broju retka te da je posljednji broj u svakom retku zbroj svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih broju retka.

U prvom retku je broj 1.

Drugi redak ima dva broja, a posljednji je broj $1 + 2 = 3$.

Treći redak ima tri broja, a posljednji je broj $1 + 2 + 3 = 6$.

Četvrti redak ima četiri broja, a posljednji je broj $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

...

Četrdeset deveti redak ima 49 brojeva, a posljednji je broj $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 49$.

Taj zbroj odredit ćemo na sljedeći način:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 49 \\ \underline{49 + 48 + 47 + \dots + 1} \\ 50 + 50 + 50 + \dots + 50 \end{array}$$

Vrijedi $2A = 50 \cdot 49$, odnosno $A = 25 \cdot 49 = 1225$.

Pedeseti redak započinje brojem 1226, a završava s $1225 + 50 = 1275$, pa je zbroj svih pedeset brojeva u pedesetom retku $B = 1226 + 1227 + \dots + 1275$.

Taj zbroj određujemo na sličan način:

$$\begin{array}{r} 1226 + 1227 + \dots + 1275 \\ \underline{1275 + 1274 + \dots + 1226} \\ 2501 + 2501 + \dots + 2501 \end{array}$$

Vrijedi $2B = 50 \cdot 2501$, odnosno $B = 25 \cdot 2501 = 62525$.

Umnožak znamenki zbroja svih brojeva u pedesetom retku iznosi $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 600$.

7. Manji od 500

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ?

Rezultat: 883

Prvo rješenje.

Odredit ćemo najprije broj troznamenkastih brojeva kojima umnožak znamenaka nije manji od 500. Trebamo odrediti tri znamenke čiji je umnožak 500 ili veći.

Ako je jedna od znamenaka 6 ili manja, najveći mogući umnožak je $9 \cdot 9 \cdot 6 = 486 < 500$. Zato su jedine moguće znamenke 7, 8 i 9.

Ako se koriste dvije znamenke 7, najveći mogući umnožak je $7 \cdot 7 \cdot 9 = 441 < 500$. Također, $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448 < 500$.

Ostali umnošci su veći od 500:

$$\begin{array}{l} 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 > 500 \\ 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 > 500 \end{array}$$

Očito su i umnošci $7 \cdot 9 \cdot 9$, $8 \cdot 8 \cdot 9$, $8 \cdot 9 \cdot 9$, $9 \cdot 9 \cdot 9$ veći od 500.

Kombinacije znamenaka čiji je umnožak veći od 500 su

7, 8, 9, 8, 8, 8, 7, 9, 9 8, 8, 9, 8, 9, 9, 9, 9, 9.

Lako provjerimo da takvih brojeva ima ukupno $6 + 1 + 3 + 3 + 3 + 1 = 17$.

Taj broj treba oduzeti od broja svih troznamenkastih brojeva: $900 - 17 = 883$.

Troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima 883.

Drugo rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ troznamenasti broj. Prema uvjetu zadatku mora biti $a \cdot b \cdot c < 500$. Kako je najveća moguća vrijednost znamenke 9, umnožak $b \cdot c$ može biti najviše 81.

Ako je a bilo koja znamenka od 1 do 6, umnožak znamenaka može biti najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Stoga svi brojevi od 100 do 699 zadovoljavaju uvjet zadaka. Takvih je brojeva 600.

a	b	c	broj brojeva
$a = 7$, tada je $7 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 72$.	od 0 do 7	od 0 do 9	80
	8	od 0 do 8	9
	9	od 0 do 7	8
$a = 8$, tada je $8 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 63$.	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 8	9
	8	od 0 do 7	8
$a = 9$, tada je $9 \cdot b \cdot c < 500$, tj. $b \cdot c < 56$.	9	od 0 do 6	7
	od 0 do 6	od 0 do 9	70
	7	od 0 do 7	8
	8	od 0 do 6	7
	9	od 0 do 6	7

Troznamenastih brojeva kojima je umnožak znamenaka manji od 500 ima ukupno

$$600 + 97 + 94 + 92 = 883.$$

Napomena.

Ovakvo razmatranje možemo početi i od znamenke jedinica. Ako je c bilo koja znamenka od 0 do 6, umnožak znamenaka bit će najviše $6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Ako je $c = 7$ postoji ukupno 87 brojeva s umnoškom znamenaka manjim od 500. Za $c = 8$ takvih je brojeva 84, a za $c = 9$ ima ih 82. Ukupno je takvih brojeva $7 \cdot 90 + 87 + 84 + 82 = 883$.

8. Dvoznamenkasti brojevi

Ako se zbroju znamenaka nekog dvoznamenkastog broja doda kvadrat tog zbroja, dobiva se ponovno taj dvoznamenkasti broj. Koliki je zbroj svih dvoznamenkastih brojeva sa tim svojstvom?

Rezultat: 144

Prvo rješenje.

Neka je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj. Iz uvjeta vrijedi

$$a + b + (a + b)^2 = \overline{ab}$$

$$a + b + (a + b)^2 = 10a + b$$

$$(a + b)^2 = 9a$$

Lijeva strana jednakosti je kvadrat broja $a + b$ i broj 9 je kvadrat broja 3, pa je znamenka a također kvadrat prirodnog broja, odnosno vrijedi $a \in \{1, 4, 9\}$.

Za $a = 1$ slijedi da je $b = 2$, što daje broj 12.

Za $a = 4$ slijedi da je $b = 2$, što daje broj 42.

Za $a = 9$ slijedi da je $b = 0$, što daje broj 90.

Zbroj svih brojeva je $12 + 42 + 90 = 144$.

Drugo rješenje.

Neka je x zbroj znamenaka dvoznamenkastog broja.

Tada je x^2 kvadrat zbroja znamenaka, a $x + x^2$ je taj dvoznamenkasti broj.

Uvrštavanjem vrijednosti za x od 3 do 9 dobivamo brojeve 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90.

Za x manji od 3 dobivamo jednoznamenkasti broj, a za veći od 9 troznamenkasti.

Redom provjeravamo za koje brojeve vrijede uvjeti.

$$12 = 3 + 3^2, \quad 20 \neq 2 + 2^2, \quad 30 \neq 3 + 3^2, \quad 42 = 6 + 6^2,$$

$$56 \neq 11 + 11^2, \quad 72 \neq 9 + 9^2, \quad 90 = 9 + 9^2.$$

Zbroj svih brojeva je $12 + 42 + 90 = 144$.

9. Površina

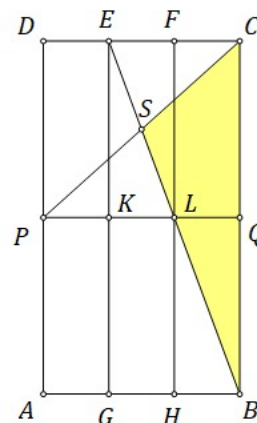
Površina pravokutnika $ABCD$ je 860 cm^2 . Točka E je odabrana na stranici $\overline{CD}$ tako da vrijedi $|EC| = 2|DE|$, točka P je polovište stranice $\overline{AD}$, a točka S je sjecište pravaca CP i BE . Kolika je površina trokuta BCS ?

Rezultat: 215

Prvo rješenje. Neka je točka Q polovište stranice $\overline{BC}$, a točka F polovište dužine $\overline{EC}$. Nadalje, neka točke G i H dijele stranicu $\overline{AB}$ na tri sukladne dužine kao na slici. Neka su točke K i L redom sjecišta dužina $\overline{EG}$ i $\overline{FH}$ s dužinom $\overline{PQ}$. Crtanjem dužina $\overline{PQ}$, $\overline{EG}$ i $\overline{FH}$ dobivamo pravokutnu mrežu koja se sastoji od šest sukladnih pravokutnika.

Točka L je središte pravokutnika $BCEG$, pa pripada dijagonali $\overline{BE}$.

Uočimo da su trokuti PLS i CES sukladni jer imaju sukladne pripadne kutove i vrijedi $|PL| = |CE|$. Stoga je $|PS| = |CS|$, tj. točka S je polovište dužine $\overline{PC}$.

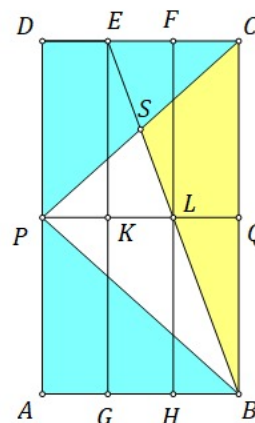


Ta dužina je dijagonala pravokutnika $PQCD$, pa zaključujemo da je S središte tog pravokutnika.

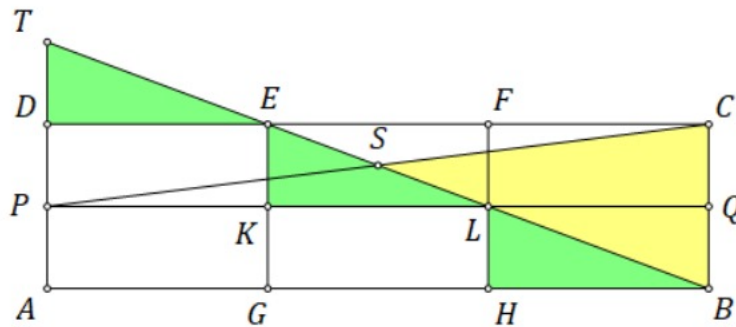
Slijedi da je točka S jednako udaljena od pravaca AD i BC , tj. visina je trokuta BCS iz vrha S na stranicu $\overline{BC}$ upola manja od visine paralelograma $ABCD$ na tu istu stranicu. Zaključujemo da je površina trokuta BCS četiri puta manja od površine paralelograma $ABCD$, odnosno

$$P(BCS) = P(ABCD) : 4 = 860 \text{ cm}^2 : 4 = 215 \text{ cm}^2.$$

Napomena. Površine trokuta ABP i PCD su jednake i iznose četvrtinu površine pravokutnika $ABCD$. Stoga površina trokuta BAP iznosi polovinu površine pravokutnika $ABCD$. Nakon što uočimo da vrijedi $|PS| = |CS|$, možemo zaključiti da trokuti BCS i BSP imaju jednake površine jer imaju sukladne stranice $\overline{PS}$ i $\overline{CS}$ te jednaku visinu na te stranice. Stoga je površina trokuta BCS jednaka četvrtini površine pravokutnika $ABCD$.



Nacrtajmo pravokutnu mrežu kao u prvom rješenju. Neka je točka T sjecište pravaca AD i BE .



Slijedi $|BC| = |AD| = 2|PD| = |PT|$.

Iz te sukladnosti slijedi $|PS| = |CS|$ i kao u prvom rješenju zaključujemo $P(BCS) = P(ABCD) : 4$.

U svako polje prikazanog lika treba upisati po jedan prirodni broj (brojevi se mogu ponavljati) i to tako da:

- pet brojeva u stupcu su isti kao pet brojeva u retku, moguće u drugačijem poretku
- umnožak tih pet brojeva jednak je njihovom zbroju.

Rješenje.

Ako među tim brojevima ima barem četiri broja 1, umnožak je jednak petom broju, a zbroj je veći od od tog broja. Stoga među pet brojeva može biti najviše tri puta broj 1.

Promotrimo prvo kombinacije koje imaju točno tri broja 1, krenuvši od najmanjih mogućih brojeva. Redom povećavamo brojeve za 1 i promatramo koliko iznosi zbroj i umnožak.

Kombinacija brojeva	Zbroj	Umnožak
1, 1, 1, 2, 2	7	4
1, 1, 1, 2, 3	8	6
1, 1, 1, 2, 4	9	8
1, 1, 1, 2, 5	10	10
Povećavamo li samo peti broj, zbroj će biti manji od umnoška.		
1, 1, 1, 3, 3	9	9
Povećavamo li četvrti ili peti broj, zbroj će biti manji od umnoška.		
1, 1, 2, 2, 2	8	8
Povećavamo li bilo koji broj, zbroj će biti manji od umnoška.		

Na ovaj način smo utvrdili da postoje točno tri kombinacije pet brojeva čiji je umnožak jednak zbroju.

Prebrojimo na koliko načina možemo upisati brojeve 1, 1, 1, 2, 5 u zadani lik na traženi način.

Ako u središnje polje upišemo broj 2, onda na 4 načina možemo izabrati polje u retku, te na 4 načina polje u stupcu u koje ćemo upisati broj 5. U ostala polja upisujemo broj 1. Stoga, u tom slučaju imamo $4 \cdot 4 = 16$ načina.

Na isti način zaključujemo da ako u središnje polje upišemo broj 5, imamo 16 načina.

Ako u središnje polje upišemo broj 1, onda na 4 načina biramo polje u retku u koje upisujemo broj 2, te na 3 načina biramo polje u retku u koje upisujemo broj 5. Dakle, na 12 načina upisujemo brojeve u retku. Također, na 12 načina možemo upisati brojeve u stupac. Ukupno ima $12 \cdot 12 = 144$ načina.

Brojeve 1, 1, 1, 2, 5 u zadani lik možemo upisati na $16 + 16 + 144 = 176$ načina.

Prebrojimo na koliko načina možemo upisati brojeve 1, 1, 1, 3, 3 u zadani lik na traženi način.

Ako u središnje polje upišemo broj 3, onda na 4 načina možemo izabrati polje u retku, te na 4 načina polje u stupcu u koje ćemo još jednom upisati broj 3. U ostala polja upisujemo broj 1. Stoga, u tom slučaju imamo $4 \cdot 4 = 16$ načina.

Ako u središnje polje upišemo broj 1, onda na 6 načina možemo izabrati dva polja u retku, te na 6 načina dva polja u stupcu u koje ćemo još upisati broj 3. U ostala polja upisujemo broj 1. Stoga, u tom slučaju imamo $6 \cdot 6 = 36$ načina.

Brojeve 1, 1, 1, 3, 3 u zadani lik možemo upisati na $16 + 36 = 52$ načina.

Konačno, među brojevima 1, 1, 2, 2, 2 se nalazi dva puta jedan broj, te tri puta drugi broj, baš kao i među brojevima 3, 3, 1, 1, 1. Stoga brojeve 1, 1, 2, 2, 2 također možemo upisati u zadani lik na 52 načina.

Ukupno imamo $176 + 52 + 52 = 280$ načina.