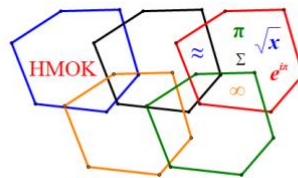


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 28. rujna 2024.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Rezanje kocke

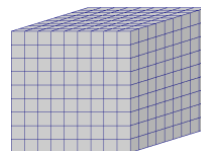
Duljina brida kocke je 9 cm. Kocku režemo tako da svakim rezom jedan dio dijelimo na dva dijela. Koliko je rezova potrebno da bi svi nastali dijelovi bili kocke duljine brida 1 cm?

Rezultat: 728

Rješenje.

Svakim se rezanjem broj dijelova povećava za 1. Nakon prvog rezanja kocka će biti razrezana na dva dijela, nakon dva rezanja na tri dijela i tako dalje.

Trebamo na kraju dobiti $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ malih kocki, a za to nam je potrebno 728 rezanja.



2. Zamišljeni broj

Tina je zamislila troznamenkasti broj. Odbacivanjem znamenke stotica tog broja dobila je dvoznamenkasti broj. Odbacivanjem znamenke desetica tog dvoznamenkastog broja dobila je jednoznamenkasti broj. Zbrajanjem tih triju brojeva (troznamenkastog, dvoznamenkastog i jednoznamenkastog) dobila je četveroznamenkasti broj čiji zapis završava s 21. Koji je broj zamislila Tina?

Rezultat: 957

Prvo rješenje. Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj kojemu je a znamenka stotica, b znamenka desetica i c znamenka jedinica. Odbacivanjem znamenke stotica dobije se dvoznamenkasti broj $\overline{bc}$, a daljnjim odbacivanjem znamenke desetica jednoznamenkasti broj c . Neka je d znamenka tisućica, a e znamenka stotica dobivenog četveroznamenkastog broja.

Znamenka jedinica zbroja (znamenka 1) nastala je zbrajanjem tri znamenke c što je moguće samo za $c = 7$.

$$\begin{array}{r} \boxed{a} \boxed{b} \boxed{c} \\ \boxed{b} \boxed{c} \\ + \quad \quad \boxed{c} \\ \hline \boxed{d} \boxed{e} \boxed{2} \boxed{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{a} \boxed{b} \boxed{7} \\ \boxed{b} \boxed{7} \\ + \quad \quad \boxed{7} \\ \hline \boxed{d} \boxed{e} \boxed{2} \boxed{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{a} \boxed{5} \boxed{7} \\ \boxed{5} \boxed{7} \\ + \quad \quad \boxed{7} \\ \hline \boxed{d} \boxed{e} \boxed{2} \boxed{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{9} \boxed{5} \boxed{7} \\ \boxed{5} \boxed{7} \\ + \quad \quad \boxed{7} \\ \hline \boxed{1} \boxed{0} \boxed{2} \boxed{1} \end{array}$$

Budući je $3 \cdot 7 = 21$, a znamenka desetica zbroja je 2, zbrajanjem dvije iste znamenke b treba dobiti 0 pa možemo zaključiti da je $b = 0$ ili $b = 5$. Lako se vidi da ne može biti $b = 0$.

Na kraju lako vidimo da za $a < 9$ zbroj ne bi bio četveroznamenkast, što znači da je $a = 9$, $e = 0$ i $d = 1$.

Tina je zamislila broj 957. Zaista, $957 + 57 + 7 = 1021$.

Drugo rješenje.

Najveći mogući broj koji možemo dobiti na opisani način je $999 + 99 + 9 = 1107$.

Kako znamo da rezultat mora biti četveroznamenkasti broj, jasno je da će znamenka tisućica biti 1, a zbog uvjeta da završava znamenkama 21, rezultat je broj oblika 1_21. Taj broj mora biti manji od 1107, pa je jedina mogućnost za rezultat 1021.

Kada bi zamišljeni troznamenkasti broj bio manji od 900, najveći mogući rezultat bi bio $899 + 99 + 9 = 1007$ što je manje od 1021. Zaključujemo da je znamenka stotica zamišljenog broja 9.

Uočimo da znamenka jedinica dobivenog zbroja ovisi samo o znamenki jedinica zamišljenog broja. Jedini način da znamenka jedinica zbroja bude 1 jest da znamenka jedinica zamišljenog broja bude 7 ($7+7+7 = 21$).

Sada je dovoljno provjeriti nekoliko slučajeva:

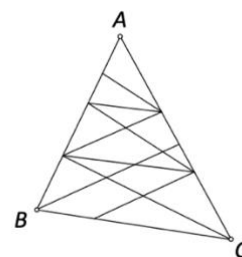
zamišljeni troznamenkasti broj	dvoznamenkasti broj	jednoznamenkasti broj	zbroj
997	97	7	1101
987	87	7	1081
977	77	7	1061
967	67	7	1041
957	57	7	1021
947	47	7	1001
937	37	7	...

Dalje nije potrebno računati jer je jasno da će rezultat biti manji od 1000.

Tina je zamislila broj 957.

3. Trokuti

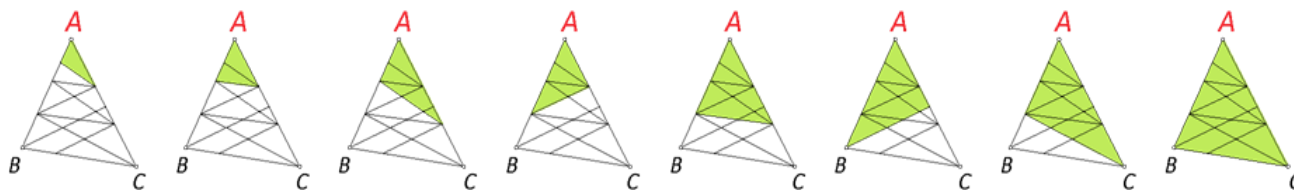
Ana je odredila broj trokuta na slici koji sadrže vrh A , Barbara broj trokuta koji sadrže vrh B , a Cvijeta broj trokuta koji sadrže vrh C . Koliko iznosi umnožak brojeva koje su trebale dobiti Ana, Barbara i Cvijeta?



Rezultat: 704

Rješenje.

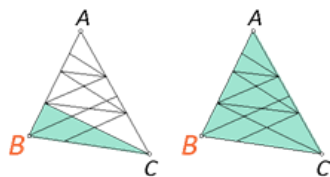
Svakom trokutu kojemu je jedan vrh točka A , jedna stranica pripada dužini $\overline{AB}$, a jedna dužini $\overline{AC}$.



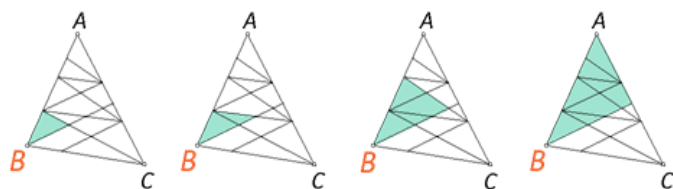
Ukupno ima osam trokuta kojima je jedan vrh točka A .

U vrhu B sastaju se tri dužine, pa postoje tri mogućnosti za trokute kojima je jedan vrh točka B :

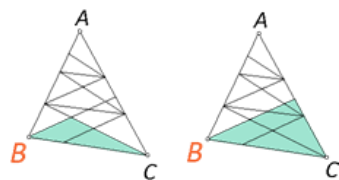
a) jedna stranica pripada dužini $\overline{BC}$, a druga dužini $\overline{BA}$. Postoje dva takva trokuta.



b) jedna stranica pripada dužini $\overline{BA}$, ali nijedna ne pripada dužini $\overline{BC}$. Postoje četiri takva trokuta.



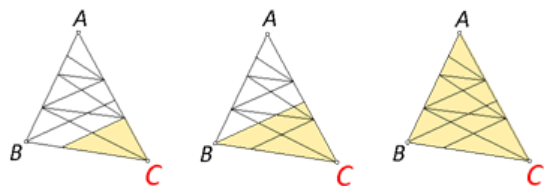
c) jedna stranica pripada dužini $\overline{BC}$, ali nijedna ne pripada dužini $\overline{BA}$. Postoje dva takva trokuta.



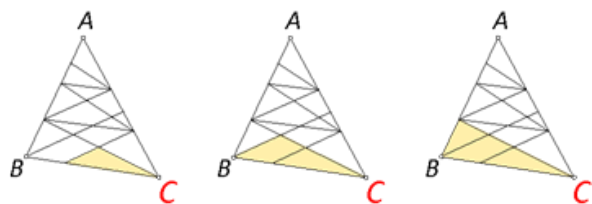
Ukupno ima osam trokuta kojima je jedan vrh točka B .

U vrhu C također se sastaju tri dužine, pa postoje tri mogućnosti za trokute kojima je jedan vrh točka C :

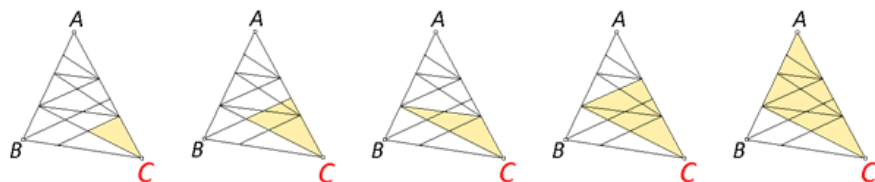
a) jedna stranica pripada dužini $\overline{CB}$, a druga dužini $\overline{CA}$. Postoje tri takva trokuta.



b) jedna stranica pripada dužini $\overline{CB}$, ali nijedna ne pripada dužini $\overline{CA}$. Postoje tri takva trokuta.



c) jedna njegova stranica pripada dužini $\overline{CA}$, ali nijedna ne pripada dužini $\overline{CB}$. Postoji pet takvih trokuta.



Ukupno ima jedanaest trokuta kojima je jedan vrh točka C .

Traženi umnožak je $8 \cdot 8 \cdot 11 = 704$.

4. Natjecanje

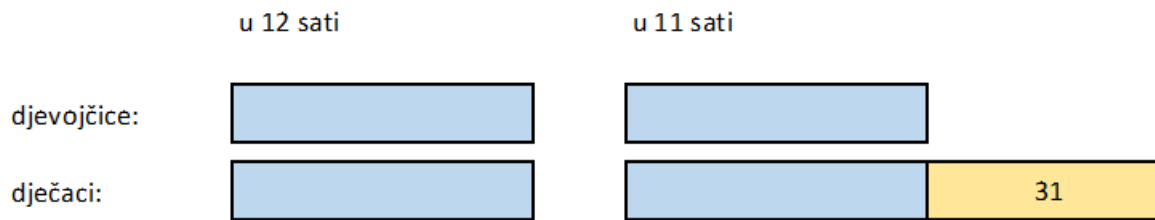
Svi učenici četvrtih razreda OŠ „Matko Hmok“ pristupili su natjecanju iz matematike koje je započelo u 10 sati. Do 11 sati natjecanje je završilo 15 djevojčica i nijedan dječak pa je u 11 sati broj preostalih dječaka bio dvostruko veći od broja preostalih djevojčica. Između 11 i 12 sati natjecanje je završio 31 dječak i nijedna djevojčica tako da je u 12 sati broj preostalih dječaka bio jednak broju preostalih djevojčica. Koliko je ukupno učenika četvrtih razreda u toj školi?

Rezultat: 108

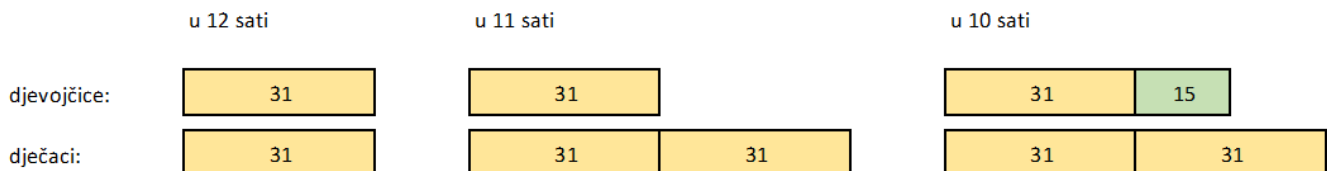
Rješenje.

Nakon 12 sati broj djevojčica i dječaka na natjecanju bio je jednak. Između 11 i 12 sati broj djevojčica na natjecanju nije se promijenio, a broj dječaka smanjio se za 31, to jest u 11 sati na natjecanju je bio 31 dječak više nego u 12 sati.

Grafički to možemo prikazati ovako:



Kako je poznato da je na natjecanju u 11 sati bilo dvostruko više dječaka nego djevojčica, možemo zaključiti da plavi pravokutnik predstavlja 31 dječaka odnosno 31 djevojčicu.



Poslije 12 sati na natjecanju su ostali još 31 dječak i 31 djevojčica, a u 11 sati na natjecanju su bila 62 dječaka i 31 djevojčica. Između 10 i 11 sati broj dječaka se nije mijenjao dok se broj djevojčica smanjio za 15. Na početku natjecanja bilo je $31 + 15 = 46$ djevojčica i 62 dječaka.

U školi je ukupno $62 + 46 = 108$ učenika četvrtih razreda.

Napomena. Rješenje možemo skraćeno zapisati koristeći jednadžbe. Neka je x broj dječaka odnosno broj djevojčica na natjecanju nakon 12 sati. Na natjecanju je do 11 sati bilo $x + 31$ dječaka. U 11 sati broj dječaka bio je dvaput veći od broja djevojčica, tj. vrijedi $x + 31 = 2 \cdot x$. Rješenje ove jednadžbe je $x = 31$. U 12 sati dječaka je bilo 31, a isto toliko i djevojčica. U 11 sati na natjecanju je bilo $31 + 31 = 62$ dječaka i 31 djevojčica. U 10 sati na natjecanju je bilo $31 + 15 = 46$ djevojčica i 62 dječaka, a ukupno $62 + 46 = 108$ učenika.

5. Pravokutnici

Koliko ima različitih pravokutnika kojima je opseg 2024 cm, a duljine stranica u centimetrima su prirodni brojevi? Smatramo da su dva pravokutnika različita ako im se razlikuju duljine stranica.

Rezultat: 506

Rješenje.

Opseg je jednak zbroju duljina svih stranica pravokutnika. Označimo duljine dviju susjednih stranica pravokutnika a i b te neka je $a \leq b$. Zbroj duljina stranica a i b jednak je polovini opsega, $2024 : 2 = 1012$ cm. Za bilo koju duljinu stranice a , duljina stranice b iznosi $1012 - a$. Moguće duljine stranica su:

a (cm)	b (cm)
1	1011
2	1010
3	1009
4	1008
...	...
504	508
505	507
506	506

Ukupno postoji 506 različitih pravokutnika koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

6. Kula od karata

Od plavih i narančastih karata gradi se niz kula. Svaka kula ima određen broj redova. U najnižem redu su plave karte, u sljedećem narančaste i tako naizmjenice do najvišeg reda. Svaki red, osim najnižeg, sadrži i horizontalno položene karte. Na slici su prikazane prve četiri kule. Prva se kula



sastoji od dvije plave karte; druga od četiri plave i tri narančaste karte; treća od devet plavih i šest narančastih karata. Ako bismo na isti način sagradili kulu koja ima 15 redova, koliko bi se plavih karata nalazilo u njoj?

Rezultat: 177

Rješenje.

Zapišimo pregledno broj plavih i narančastih karata u svakom redu pojedine kule:

	1. kula	2. kula	3. kula	4. kula	5. kula	...	15. kula	...	n -ta kula
1. red	2	4	6	8	10		$2 \cdot 15$		$2n$
2. red		3	6	9	12		$3 \cdot 14$		$3(n - 1)$
3. red			3	6	9		$3 \cdot 13$		$3(n - 2)$
4. red				3	6		$3 \cdot 12$		$3(n - 3)$
5. red					3		$3 \cdot 11$		$3(n - 4)$
...							...		
14. red							$3 \cdot 2$		$3(n - 13)$
15. red							$3 \cdot 1$		$3(n - 14)$
...									
n -ti red									3

U petnaestoj kuli, plave su karte u prvom, trećem,..., petnaestom redu.

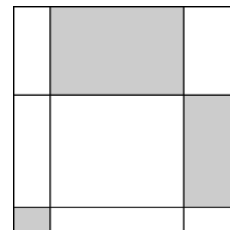
U prvom redu ih ima $2 \cdot 15$, u trećem $3 \cdot 13$, u petom $3 \cdot 11$, ..., a u petnaestom redu su tri plave karte.

Njihov je ukupan broj

$$\begin{aligned}
 &2 \cdot 15 + 3 \cdot 13 + 3 \cdot 11 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\
 &= 2 \cdot 15 + 3 \cdot (13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1) \\
 &= 2 \cdot 15 + 3 \cdot 49 = 30 + 147 = 177
 \end{aligned}$$

7. Kvadrat

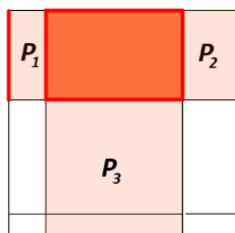
Kvadrat je podijeljen na devet pravokutnika kao što je prikazano na slici. Opsezi osjenčanih pravokutnika su 970 mm, 387 cm i 52 dm. Odredi duljinu stranice kvadrata u centimetrima.



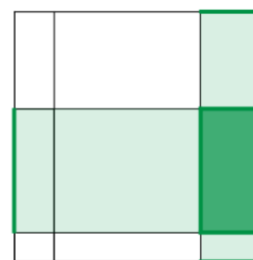
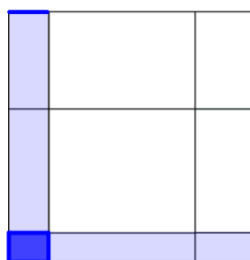
Rezultat: 251

Rješenje.

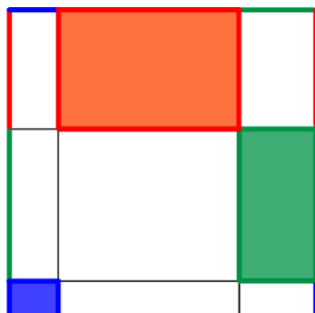
Svakom od istaknutih pravokutnika (na slici crveni, zeleni i plavi) barem jedna stranica pripada rubu zadanog kvadrata, a ostale pripadaju još nekom pravokutniku.



Promotrimo na primjer crveni pravokutnik. Jedna njegova stranica pripada rubu kvadrata, a po jedna pravokutnicima P_1 , P_2 i P_3 . Nasuprotne stranice pravokutnika jednake su duljine. Zato su stranice crvenog pravokutnika jednake duljine kao označene dužine na rubu kvadrata (po jedna na svakoj stranici kvadrata).



Ponovimo isto za plavi i zeleni pravokutnik.



Vidimo da se opseg kvadrata sastoji upravo od dužina koje su jednake duljine kao stranice istaknutih pravokutnika. Opseg zadanog kvadrata jednak je zbroju opsega triju istaknutih pravokutnika.

Opseg kvadrata stoga iznosi $970 \text{ mm} + 387 \text{ cm} + 52 \text{ dm} = 97 \text{ cm} + 387 \text{ cm} + 520 \text{ cm} = 1004 \text{ cm}$.

Duljina svake stranice kvadrata je $1004 \text{ cm} : 4 = 251 \text{ cm}$.

8. Kućni brojevi

Marko, Toma i Zvonimir uspoređuju svoje kućne brojeve. Utvrdili su da za njih vrijedi:

- Sva su tri kućna broja troznamenkasta.
- Različiti kućni brojevi nemaju istih znamenaka.
- Zbroj znamenaka svakog kućnog broja je 10.
- Znamenka jedinica Markovog kućnog broja je 6.
- Zvonimirov kućni broj može se bez ostatka podijeliti s 10.
- Tomin kućni broj manji je od Zvonimirovog, ali veći od Markovog.

Koji je najveći mogući Tomin kućni broj?

Rezultat: 541

Prvo rješenje.

Markov kućni broj ima znamenku jedinica 6.

Zvonimirov kućni broj djeljiv je s 10 bez ostatka, što znači da mu je znamenka jedinica 0.

Markov broj ne može sadržavati znamenku 0, a Zvonimirov broj ne može sadržavati znamenku 6.

Preostale dvije znamenke Markovog kućnog broja zbrojene daju 4, pa to mogu biti 3 i 1 te 2 i 2. Markov je broj jedan od brojeva 316, 226, 136.

Preostale dvije znamenke Zvonimirovog kućnog broja zbrojene daju 10, pa su mogućnosti: 1 i 9, 2 i 8, 3 i 7 te 5 i 5. Zvonimirov kućni broj može biti 910, 820, 730, 550, 370, 280 ili 190.

Ispitajmo sve mogućnosti.

	Markov kućni broj	Zvonimirov kućni broj	preostale znamenke	moguće znamenke Tominog kućnog broja
A)	136 ili 316	280 ili 820	4, 5, 7, 9	–
B)	136 ili 316	550	2, 4, 7, 8, 9	2, 4, 4
C)	226	190 ili 910	3, 4, 5, 7, 8	3, 3, 4
D)	226	370 ili 730	1, 4, 5, 8, 9	1, 4, 5 ili 1, 1, 8
E)	226	550	1, 3, 4, 7, 8, 9	3, 3, 4

Od preostalih znamenaka (tj. onih koje se ne pojavljuju ni u Markovom, ni u Zvonimirovom kućnom broju) treba odabrati tri znamenke čiji je zbroj 10. U slučaju A) to nije moguće, a u ostalim slučajevima sve mogućnosti su popisane u posljednjem stupcu gornje tablice.

Ispišimo sve mogućnosti za njihove kućne brojeve, uzimajući u obzir i podatak da je Tomin kućni broj manji je od Zvonimirovog, ali veći od Markovog.

MARKO	TOMA	ZVONIMIR
136	244, 424, 442	550
316	424, 442	550
226	334, 343, 433	910
226	–	370
226	415, 451, 514, 541	730
226	334, 343, 433	550

Ovo su sve mogućnosti, pa je najveći mogući Tomin kućni broj 541.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da Markov kućni broj može biti 136, 226 ili 316, a Zvonimirov kućni broj može biti 910, 820, 730, 550, 370, 280 ili 190. Tomin broj ne sadrži znamenke 0 niti 6.

Tomin broj je manji od Zvonimirovog, pa znamenka stotica Tominog broja ne može biti 9.

- Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 8, to bi bio broj 811 (jer ne smijemo koristiti znamenku 0), ali tada bi Markov broj trebao biti 226 (jer ne smijemo koristiti znamenku 2), a Zvonimirov broj bi morao biti veći od 811, što nije moguće jer 820 i 910 nisu dopušteni.
- Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 7, to bi bio jedan od brojeva 721 i 712 (opet jer ne smijemo koristiti 0), ali ne postoji Markov mogući broj koji ne sadrži ni znamenku 1 ni znamenku 2.
- Tomin broj ne može imati znamenku stotica 6.

Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 5, preostale znamenke bi bile 1 i 4 ili 2 i 3 (nije moguće da budu 0 i 5). Najveći takav broj je 541. Kada bi to bio Tomin broj, Markov broj bi morao biti 226 (jer ne smije sadržavati znamenku 1). U tom bi slučaju Zvonimirov kućni broj imao znamenke 3, 7 i 0. Zvonimirov broj je najveći, a Tomin najmanji, pa bi Zvonimirov broj mogao biti 730. Zaista je moguće da je Tomin broj 541, Zvonimirov broj 730 i Markov broj 226 – u tom su slučaju ispunjeni svi uvjeti.

Dakle, najveći mogući Tomin broj je 541.

9. Matematika

Koja je najveća moguća vrijednost izraza

$$(M \cdot A + T) \cdot E + M \cdot A + T - I \cdot K : A$$

ako istim slovima odgovaraju iste, a različitim slovima različite znamenke?

Rezultat: 624

Rješenje.

Uočimo da se u danom izrazu $M \cdot A + T$ pojavljuje na dva mjesta, pa primjenom distributivnosti možemo napisati

$$(M \cdot A + T) \cdot E + M \cdot A + T - I \cdot K : A = (M \cdot A + T) \cdot (E + 1) - I \cdot K : A$$

Od umnoška brojeva $(M \cdot A + T)$ i $(E + 1)$ oduzimamo vrijednost izraza $I \cdot K : A$. Da bismo dobili što veću vrijednost, trebamo oduzeti što manji broj. To možemo postići za $I = 0$ ili $K = 0$ (time ne ograničavamo vrijednost spomenutog umnoška jer se slova I i K pojavljuju na ovom mjestu).

Treba još utvrditi koja je najveća moguća vrijednost umnoška $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1)$.

Jasno je da ćemo za znamenke M, A, T i E odabrati četiri najveće moguće vrijednosti, tj. 9, 8, 7 i 6, u nekom poretku. Utvrdimo najprije koja je najveća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ za pojedine vrijednosti broja E .

Izraz $M \cdot A + T$ će imati najveću moguću vrijednost ako za M i A odaberemo što veće brojeve, a za T najmanji od brojeva na raspolaganju. Na primjer, za $E = 8$, biramo $T = 6$, a M i A su 9 i 7, te je $M \cdot A + T = 69$.

Za $E = 9$, najveća moguća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ iznosi 62, a u tom je slučaju $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1) = 620$.

Za $E = 8$, najveća moguća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ iznosi 69, a u tom je slučaju $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1) = 621$.

Za $E = 7$, najveća moguća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ iznosi 78, a u tom je slučaju $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1) = 624$.

Za $E = 6$, najveća moguća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ iznosi 79, a u tom je slučaju $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1) = 553$.

Najveća moguća vrijednost danog izraza je 624.

10. Bazen

Bazen se može puniti trima različitim cijevima. Kad bi se bazen punio samo prvom cijevi, napunio bi se za 15 sati, kad bi se punio samo drugom cijevi, napunio bi se za 10 sati, a kad bi se punio samo trećom cijevi, napunio bi se za 6 sati. Da bi napunio prazni bazen, Ivan je najprije otvorio prve dvije cijevi. Kad se napunila trećina bazena, zatvorio je prvu cijev i otvorio treću cijev te 90 minuta punio bazen koristeći drugu i treću cijev. Na kraju je otvorio sve tri cijevi i pričekao dok se bazen nije napunio. Koliko je ukupno minuta trajalo punjenje bazena?

Rezultat: 258

Prvo rješenje.

Neka je obujam bazena 30 kubičnih jedinica (iako ne znamo koliko je velik bazen obujam dijelimo na 30 jednakih dijelova). Prva cijev u jednom satu napuni $30 : 15 = 2$ jedinice, druga cijev u jednom satu napuni $30 : 10 = 3$ jedinice, a treća cijev $30 : 6 = 5$ jedinica.

Opisani postupak punjenja bazena sastoji se od tri dijela.

- Prva i druga cijev zajedno u jednom satu napune 5 jedinica. Trećina bazena je $30 : 3 = 10$ jedinica, a to će se napuniti za dva sata.
- Druga i treća cijev zajedno napune 8 jedinica u sat vremena. U 90 minuta (=1 sat + pola sata) te dvije cijevi napunit će $8 + 4 = 12$ jedinica.
- U tom trenutku nedostaje još $30 - (10 + 12) = 8$ jedinica da bi bazen bio pun. Sve tri cijevi zajedno napune 10 jedinica za sat vremena, odnosno jednu jedinicu za 6 minuta. Da bi se napunilo 8 jedinica, potrebno je $8 \cdot 6 = 48$ minuta.

Ukupno je punjenje bazena trajalo 2 sata + 90 minuta + 48 minuta = 120 + 90 + 48 = 258 minuta.

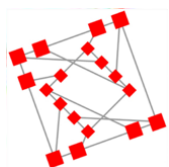
Drugo rješenje.

Zamislimo još jednu cijev koja bi bazen napunila za 30 sati. Neka se ta cijev zove pomoćna cijev. Pomoćna cijev puni dvaput sporije od prve cijevi, triput sporije od druge cijevi i 5 puta sporije od treće cijevi.

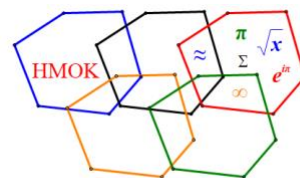
Opisani postupak punjenja bazena sastoji se od tri dijela.

- Prva i druga cijev zajedno su pet puta brže od pomoćne cijevi. Pomoćna cijev bi trećinu bazena napunila za 10 sati, pa će prva i druga cijev zajedno to učiniti za dva sata.
- Druga i treća cijev zajedno su 8 puta brže od pomoćne cijevi. U 90 minuta one napune koliko pomoćna cijev u $8 \cdot 90$ minuta = 720 minuta = 12 sati.
- U tom trenutku, pomoćna cijev bi trebala puniti bazen još $30 - (10 + 12) = 8$ sati da bi bazen bio pun. Sve tri cijevi zajedno pune bazen $2 + 3 + 5 = 10$ puta brže od pomoćne cijevi, što znači da će ovaj dio punjenja umjesto 8 sati trajati $(8 \cdot 60 \text{ min}) : 10 = 48$ minuta.

Ukupno je punjenje bazena trajalo 2 sata + 90 minuta + 48 minuta = 120 + 90 + 48 = 258 minuta.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 28. rujna 2024.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

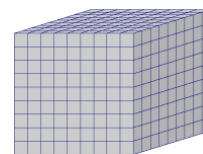
1. Rezanje kocke

Duljina brida kocke je 9 cm. Kocku režemo tako da svakim rezom jedan dio dijelimo na dva dijela. Koliko je rezova potrebno da bi svi nastali dijelovi bili kocke duljine brida 1 cm?

Rezultat: 728

Rješenje.

Svakim se rezanjem broj dijelova povećava za 1. Nakon prvog rezanja kocka će biti razrezana na dva dijela, nakon dva rezanja na tri dijela i tako dalje. Trebamo na kraju dobiti $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ malih kocki, a za to nam je potrebno 728 rezanja.



2. Džeparac

Karla, Lara, Maja i Nina su najbolje prijateljice. Nina je na ljetovanje zaboravila ponijeti džeparac pa su joj prijateljice posudile jednake iznose; Karla joj je posudila petinu, Lara četvrtinu, a Maja šestinu svog džeparca. Po povratku kući, Karla, Lara i Maja odlučile su desetinu ukupnog iznosa koji su ponijele na ljetovanje darovati u dobrotvorne svrhe. Ako su darovale ukupno 78 €, koliki je džeparac na ljetovanju imala Nina?

Rezultat: 156

Rješenje.

Neka je x iznos koji je svaka od tri prijateljice posudila Nini.

Tada je Karlin džeparac $5x$, Larin $4x$, a Majin $6x$. Ukupan iznos koji su ponijele na ljetovanje iznosi $5x + 4x + 6x = 15x$. Desetina tog iznosa je 78 €, pa vrijedi $15x = 780$.

Slijedi da je $x = 780 : 15 = 52$.

Ninin džeparac na ljetovanju iznosi $3x$, tj. $3 \cdot 52 = 156$ €.

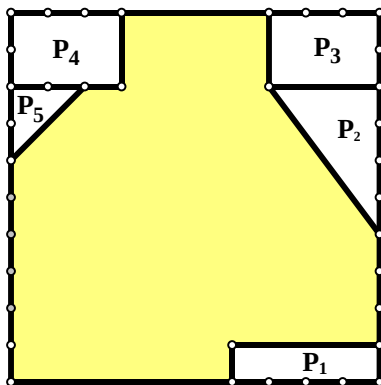
3. Površina

Lik na slici smješten je u kvadratnu mrežu. Površina obojenog dijela tog lika iznosi 198 cm^2 . Koliko kvadratnih centimetara iznosi površina cijelog lika?

Rezultat: 684

Rješenje.

Obojeni dio lika se sastoji od 20 malih kvadrata i 4 pravokutna trokuta, što ukupno čini površinu kao 22 mala kvadrata.



Podijelimo li $198 : 22 = 9$, dobivamo da je površina svakog malog kvadrata 9 cm^2 , te slijedi da je duljina stranice malog kvadrata 3 cm . Kvadratna mreža se sastoji od 100 malih kvadrata tj. mreža je kvadrat površine 900 cm^2 .

Od te površine trebamo oduzeti površine pet likova.

Lik 1 je pravokutnik sa stranicama duljina $4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$ i 3 cm .

Lik 2 je pravokutni trokut s katetama (ili polovina pravokutnika sa stranicama) duljina $4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$ i $3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$. Lik 3 i Lik 4 su pravokutnici sa stranicama duljina $2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$ i $3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$.

Lik 5 je pravokutni trokut s katetama (ili polovina kvadrata sa

stranicama) duljina $2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$.

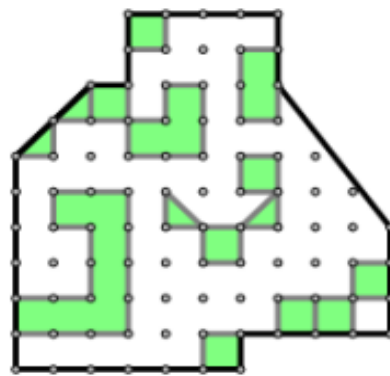
Slijedi da je tražena površina

$$P = 900 - (12 \cdot 3 + 12 \cdot 9 : 2 + 2 \cdot 6 \cdot 9 + 6 \cdot 6 : 2)$$

$$P = 900 - (36 + 54 + 108 + 18)$$

$$P = 900 - 216$$

$$P = 684 \text{ cm}^2$$



4. Kula od karata

Od plavih i narančastih karata gradi se niz kula. Svaka kula ima određen broj redova. U najnižem redu su plave karte, u sljedećem narančaste i tako naizmjenice do najvišeg reda. Svaki red, osim najnižeg, sadrži i horizontalno položene karte. Na slici su prikazane prve četiri kule. Prva se kula sastoji od dvije plave karte, druga od četiri plave i tri narančaste karte, treća od devet plavih i šest narančastih karata.

Kad bismo na isti način nastavili graditi kule, koliko bi se plavih karata nalazilo u dvadesetčetvrtoj kuli?



Rezultat: 444

Rješenje.

Plave karte nalaze se u prvom (donjem), trećem, petom,... i svim ostalim neparnim recima. Na vrhu (u gornjem redu) druge, četvrte, šeste,... i dvadesetčetvrte kule su tri narančaste karte.

Odredimo broj plavih karata u kulama na parnim mjestima u nizu:

broj kule u nizu	broj plavih karata
2	$2 \cdot 2 + 0 \cdot 3$
4	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3$
6	$6 \cdot 2 + (4 + 2) \cdot 3$
8	$8 \cdot 2 + (6 + 4 + 2) \cdot 3$
10	$10 \cdot 2 + (8 + 6 + 4 + 2) \cdot 3$
...	...
bilo koji paran n	$n \cdot 2 + ((n - 2) + (n - 4) + \dots + 4 + 2) \cdot 3$

U dvadesetčetvrtoj kuli, za $n = 24$, nalazile bi se

$$24 \cdot 2 + (22 + 20 + \dots + 2) \cdot 3 = 24 \cdot 2 + 132 \cdot 3 = 444$$

plave karte.

5. Jedanaesterostruko

Koji je broj 11 puta veći od broja troznamenkastih brojeva djeljivih brojem 6 koji imaju barem dvije jednake znamenke?

Rezultat: 385

Prvo rješenje.

Prebrojimo koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih brojem 6 koji imaju sve tri znamenke jednake. Čim troznamenkasti broj ima jednake znamenke, djeljiv je brojem 3 jer mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 3. Zadnja znamenka mora biti parna i različita od 0, pa imamo 4 mogućnosti: 222, 444, 666, 888.

Prebrojimo koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih brojem 6 koji imaju točno dvije znamenke jednake. Imamo tri mogućnosti koje dvije znamenke će biti jednake, te ćemo promotriti tri slučaja.

Ako su jednake znamenke desetica i jedinica, traženi brojevi su: 300, 600, 900, 522, 822, 144, 744, 366, 966, 288, 588. Ima ih ukupno 11.

Ako su jednake znamenke stotica i jedinica, traženi brojevi su 252, 282, 414, 474, 606, 636, 696, 828, 858. Takvih brojeva ima 89

Ako su jednake znamenke stotica i desetica, traženi brojevi su 330, 660, 990, 552, 882, 114, 774, 336, 966, 288, 588. Takvih brojeva ima također 11.

Ukupno ima $4 + 11 + 9 + 11 = 35$ takvih troznamenkastih brojeva. Traženi rezultat je $35 \cdot 11 = 385$.

Drugo rješenje.

Prirodni broj je djeljiv brojem 6 ako je djeljiv brojevima 2 i 3. Zadnja znamenka (tj. znamenka jedinica) mora biti parna. Ako su barem dvije znamenke jednake, onda da bi broj bio djeljiv brojem 3 sve tri znamenke moraju davati isti ostatak pri dijeljenju brojem 3.

Ako je znamenka jedinica 0, jedine mogućnosti su 300, 600, 900, 330, 660, 990, te ih ima 6.

Ako je znamenka jedinica 2, jedine mogućnosti su 222, 252, 522, 552, 282, 822, 882 te ih ima 7.

Slično je u slučajevima kad je znamenka jedinica 4 (114, 144, 414, 444, 474, 744, 774) ili 8 (228, 288, 828, 888, 558, 588, 858), te u tim slučajevima ima također po 7 brojeva. Imamo i slučaj kad je znamenka jedinica 6 (336, 366, 606, 636, 666, 696, 966, 996), u kojem imamo 8 brojeva.

Ukupno ima $6 + 3 \cdot 7 + 8 = 35$ takvih troznamenastih brojeva. Traženi rezultat je $35 \cdot 11 = 385$.

6. Kućni brojevi

Marko, Toma i Zvonimir uspoređuju svoje kućne brojeve. Utvrdili su da za njih vrijedi:

- Sva su tri kućna broja troznamenasta.
- Različiti kućni brojevi nemaju istih znamenaka.
- Zbroj znamenaka svakog kućnog broja je 10.
- Znamenka jedinica Markovog kućnog broja je 6.
- Zvonimirov kućni broj može se bez ostatka podijeliti s 10.
- Tomin kućni broj manji je od Zvonimirovog, ali veći od Markovog.

Koji je najveći mogući Tomin kućni broj?

Rezultat: 541

Prvo rješenje.

Markov kućni broj ima znamenku jedinica 6.

Zvonimirov kućni broj djeljiv je s 10 bez ostatka, što znači da mu je znamenka jedinica 0.

Markov broj ne može sadržavati znamenku 0, a Zvonimirov broj ne može sadržavati znamenku 6.

Preostale dvije znamenke Markovog kućnog broja zbrojene daju 4, pa to mogu biti 3 i 1 te 2 i 2. Markov je broj jedan od brojeva 316, 226, 136.

Preostale dvije znamenke Zvonimirovog kućnog broja zbrojene daju 10, pa su mogućnosti: 1 i 9, 2 i 8, 3 i 7 te 5 i 5. Zvonimirov kućni broj može biti 910, 820, 730, 550, 370, 280 ili 190.

Tomin broj ne sadrži znamenke 0 niti 6.

Tomin broj je manji od Zvonimirovog, pa znamenka stotica Tominog broja ne može biti 9.

- Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 8, to bi bio broj 811, ali tada Zvonimirov broj ne bi mogao biti 910.
- Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 7, to bi bio jedan od brojeva 721 i 712, no ne postoji Markov mogući broj koji ne sadrži ni znamenku 1 ni znamenku 2.
- Tomin broj ne može imati znamenku stotica 6.

Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 5, preostale znamenke bi bile 1 i 4 ili 2 i 3 (nije moguće da budu 0 i 5). Najveći takav broj je 541. Kada bi to bio Tomin broj, Markov broj bi morao biti 226 (jer ne smije sadržavati znamenku 1). U tom bi slučaju Zvonimirov kućni broj imao znamenke 3, 7 i 0. Zvonimirov broj je najveći, a Tomin najmanji, pa mi Zvonimirov broj mogao biti 730. Zaista je moguće da je Tomin broj 541, Zvonimirov broj 730 i Markov broj 226 – u tom su slučaju ispunjeni svi uvjeti.

Dakle, najveći mogući Tomin broj je 541.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da Markov kućni broj može biti 136, 226 ili 316, a Zvonimirov kućni broj može biti 910, 820, 730, 550, 370, 280 ili 190.

Ispitajmo sve mogućnosti.

	Markov kućni broj	Zvonimirov kućni broj	preostale znamenke	moгуće znamenke Tominog kućnog broja
A)	136 ili 316	280 ili 820	4, 5, 7, 9	–
B)	136 ili 316	550	2, 4, 7, 8, 9	2, 4, 4
C)	226	190 ili 910	3, 4, 5, 7, 8	3, 3, 4
D)	226	370 ili 730	1, 4, 5, 8, 9	1, 4, 5 ili 1, 1, 8
E)	226	550	1, 3, 4, 7, 8, 9	3, 3, 4

Od preostalih znamenaka (tj. onih koje se ne pojavljuju ni u Markovom, ni u Zvonimirovom kućnom broju) treba odabrati tri znamenke čiji je zbroj 10. U slučaju A) to nije moguće, a u ostalim slučajevima sve mogućnosti su popisane u posljednjem stupcu gornje tablice.

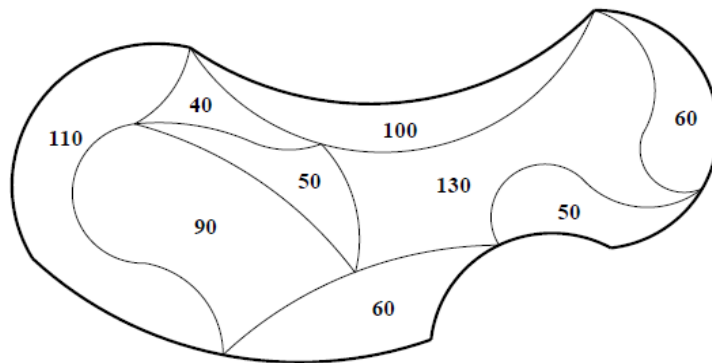
Ispišimo sve mogućnosti za njihove kućne brojeve, uzimajući u obzir i podatak da je Tomin kućni broj manji je od Zvonimirovog, ali veći od Markovog.

MARKO	TOMA	ZVONIMIR
136	244, 424, 442	550
316	424, 442	550
226	334, 343, 433	910
226	–	370
226	415, 451, 514, 541	730
226	334, 343, 433	550

Ovo su sve mogućnosti, pa je najveći mogući Tomin kućni broj 541.

7. Opseg

Koliki je opseg lika na slici ako su upisani brojevi opsezi odgovarajućih dijelova tog lika?

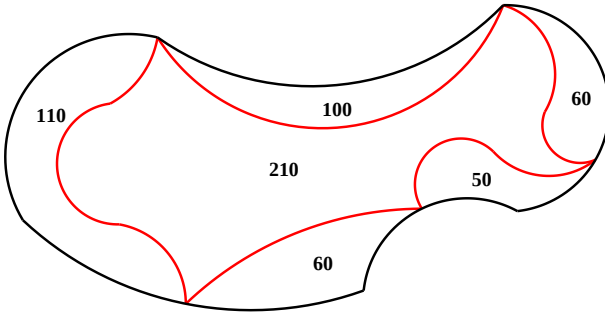
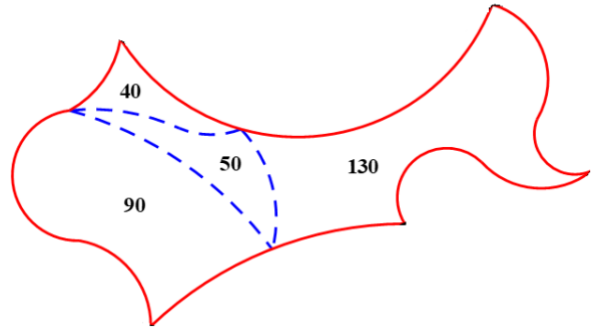


Rezultat: 170

Rješenje.

Uočimo dio početnog lika istaknut crvenim rubom. Njegov je opseg jednak zbroju opsega likova s kojima ima zajednički dio ruba (likovi opsega 90, 40 i 130) umanjenom za dijelove koji nisu na njegovom rubu. Dakle opseg lika s plavim rubom iznosi

$$90 + 40 + 130 - 50 = 210.$$



Analogno, opseg zadanog lika jednak je zbroju opsega likova s kojima ima zajednički dio ruba (to su likovi opsega 110, 100, 60, 50 i 60) umanjenom za duljinu dijelova tih likova koji ne pripadaju rubu zadanog lika. Drugim riječima, zbroj opsega spomenutih dijelova treba umanjiti za opseg lika s crvenim rubom. Zato je opseg zadanog lika jednak:

$$110 + 100 + 60 + 50 + 60 - 210 = 170.$$

8. Bazen

Bazen se može puniti trima različitim cijevima. Kad bi se bazen punio samo prvom cijevi, napunio bi se za 15 sati, kad bi se punio samo drugom cijevi, napunio bi se za 10 sati, a kad bi se punio samo trećom cijevi, napunio bi se za 6 sati.

Da bi napunio prazni bazen, Ivan je najprije otvorio prve dvije cijevi. Kad se napunila trećina bazena, zatvorio je prvu cijev i otvorio treću cijev te 90 minuta punio bazen koristeći drugu i treću cijev. Na kraju je otvorio sve tri cijevi i pričekao dok se bazen nije napunio. Koliko je ukupno minuta trajalo punjenje bazena?

Rezultat: 258

Prvo rješenje.

Neka je obujam bazena 30 kubičnih jedinica (iako ne znamo koliko je velik bazen obujam dijelimo na 30 jednakih dijelova). Prva cijev u jednom satu napuni $30 : 15 = 2$ jedinice, druga cijev u jednom satu napuni $30 : 10 = 3$ jedinice, a treća cijev $30 : 6 = 5$ jedinica.

Opisani postupak punjenja bazena sastoji se od tri dijela.

- Prva i druga cijev zajedno u jednom satu napune 5 jedinica. Trećina bazena je $30 : 3 = 10$ jedinica, a to će se napuniti za dva sata.
- Druga i treća cijev zajedno napune 8 jedinica u sat vremena. U 90 minuta (=1 sat + pola sata) te dvije cijevi napunit će $8 + 4 = 12$ jedinica.
- U tom trenutku nedostaje još $30 - (10 + 12) = 8$ jedinica da bi bazen bio pun. Sve tri cijevi zajedno napune 10 jedinica za sat vremena, odnosno jednu jedinicu za 6 minuta. Da bi se napunilo 8 jedinica, potrebno je $8 \cdot 6 = 48$ minuta.

Ukupno je punjenje bazena trajalo 2 sata + 90 minuta + 48 minuta = $120 + 90 + 48 = 258$ minuta.

Drugo rješenje.

Zamislamo još jednu cijev koja bi bazen napunila za 30 sati. Neka se ta cijev zove pomoćna cijev. Pomoćna cijev puni dvaput sporije od prve cijevi, triput sporije od druge cijevi i 5 puta sporije od treće cijevi.

Opisani postupak punjenja bazena sastoji se od tri dijela.

- Prva i druga cijev zajedno su pet puta brže od pomoćne cijevi. Pomoćna cijev bi trećinu bazena napunila za 10 sati, pa će prva i druga cijev zajedno to učiniti za dva sata.
- Druga i treća cijev zajedno su 8 puta brže od pomoćne cijevi. U 90 minuta one napune koliko pomoćna cijev u $8 \cdot 90 \text{ minuta} = 720 \text{ minuta} = 12 \text{ sati}$.
- U tom trenutku, pomoćna cijev bi trebala puniti bazen još $30 - (10 + 12) = 8 \text{ sati}$ da bi bazen bio pun. Sve tri cijevi zajedno pune bazen $2 + 3 + 5 = 10$ puta brže od pomoćne cijevi, što znači da će ovaj dio punjenja umjesto 8 sati trajati $(8 \cdot 60 \text{ min}) : 10 = 48 \text{ minuta}$.

Ukupno je punjenje bazena trajalo $2 \text{ sata} + 90 \text{ minuta} + 48 \text{ minuta} = 120 + 90 + 48 = 258 \text{ minuta}$.

9. Potpuni kvadrat

Odredi najmanji prirodan broj x za koji je umnožak $3192 \cdot x$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Rezultat: 798

Rješenje.

Kvadrat prirodnog broja a je broj $a^2 = a \cdot a$. U rastavu umnoška $a \cdot a$ na proste faktore, svi prosti faktori broja a moraju se pojaviti paran broj puta.

Kako bismo odredili najmanji prirodan broj x takav da je umnožak $3192 \cdot x$ kvadrat prirodnog broja, rastavljamo broj 3192 na proste faktore: $3192 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$.

Uočimo da se faktor 2 pojavljuje tri puta, a svaki od preostalih prostih faktora jednom.

Kako bi umnožak $3192 \cdot x$ bio kvadrat prirodnog broja, u rastavu broja x na proste faktore trebaju se nalaziti (po jednom) faktori 2, 3, 7 i 19.

Prema tome, najmanji prirodan broj x s traženim svojstvom je $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 798$.

10. Kuglice u kutijama

Fran sprema svojih 40 potpuno jednakih kuglica u 5 kutija različitih boja. Na koliko ih načina može rasporediti u kutije ako u jednu kutiju stane najviše 9 kuglica, a svaka kuglica mora biti spremljena u neku od kutija?



Rezultat: 126

Rješenje.

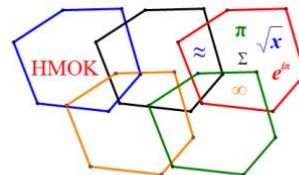
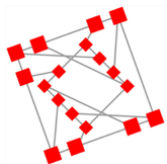
Fran ima 40 kuglica pa ne može u svaku od pet kutija spremiti po 9 kuglica.

- Ako u četiri kutije spremi po 9 kuglica, u jednu kutiju mora spremiti još 4 kuglice. Označimo takvu vrstu rasporeda sa **[9-9-9-9-4]**. Kutiju u koju mora spremiti 4 kuglice može odabrati na 5 načina.

- Ako u tri kutije spremi po 9 kuglica, u dvije kutije mora spremiti još 13 kuglica.
 - **[9-9-9-8-5]** Kutiju s 8 kuglica može odabrati na 5 načina, a za svaki takav izbor, kutiju s 5 kuglica može odabrati na 4 načina, dok u preostale tri kutije sprema po 9 kuglica. To je ukupno $5 \cdot 4 = 20$ načina.
 - **[9-9-9-7-6]** Analogno, to može učiniti na $5 \cdot 4 = 20$ načina.
- Ako u dvije kutije spremi po 9 kuglica, u tri kutije mora spremiti još 22 kuglice. To ne može učiniti tako da u svakoj od te tri kutije spremi najviše 7 kuglica pa barem u jednu od te tri kutije mora spremiti 8 kuglica. U preostale dvije kutije mora spremiti još 14 kuglica.
 - **[9-9-8-8-6]** Kutiju sa 6 kuglica može odabrati na 5 načina. Za svaki takav odabir postoji 6 rasporeda preostalih kuglica u četiri kutije: (9,9,8,8), (9,8,9,8), (9,8,8,9), (8,9,9,8), (8,9,8,9), (8,8,9,9). To je ukupno $5 \cdot 6 = 30$ načina.
 - **[9-9-8-7-7]** Analogno, to može učiniti na $5 \cdot 6 = 30$ načina.
- Ako u jednu kutiju spremi 9 kuglica, u četiri kutije mora spremiti još 31 kuglicu. To mora učiniti tako da u jednu od te četiri kutije spremi 7 kuglica, a u preostale po 8 kuglica **[9-8-8-8-7]**. To može učiniti na $5 \cdot 4 = 20$ načina.
- Ako niti u jednu od kutija ne spremi 9 kuglica, onda u svakoj od pet kutija mora biti točno 8 kuglica **[8-8-8-8-8]**. To je još 1 mogući raspored.

Kuglice se u kutije, prema uvjetima zadatka, mogu spremiti na $5 + 40 + 60 + 20 + 1 = 126$ načina.

Napomena. U svaku od pet kutija stane najviše 9 kuglica, ukupno 45 kuglica. Fran ima 40 kuglica pa umjesto broja kuglica u kutijama možemo promatrati broj slobodnih mjesta u svakoj od pet kutija. Slobodnih je mjesta ukupno 5, te možemo promatrati slučajeve kao u gornjem rješenju samo što u zapisu pišemo broj slobodnih mjesta umjesto broja kuglica u pojedinoj kutiji. Na primjer, umjesto [9-9-9-8-5] pišemo [0-0-0-1-4] itd.



HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 28. rujna 2024.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Kula od karata

Od plavih i narančastih karata gradi se niz kula. Svaka kula ima određen broj redova. U najnižem redu su plave karte, u sljedećem narančaste i tako naizmjenice do najvišeg reda. Svaki red osim najnižeg sadrži i horizontalno položene karte. Na slici su prikazane prve četiri kule. Prva se kula sastoji od dvije plave karte, druga od četiri plave i tri narančaste karte, treća od devet plavih i šest narančastih karata. Kad bismo na isti način nastavili graditi kule, koliko bi se plavih karata nalazilo u dvadesetčetvrtoj kuli?



Rezultat: 444

Rješenje.

Plave karte nalaze se u prvom (donjem), trećem, petom, ... i svim ostalim neparnim recima. Na vrhu (u gornjem redu) druge, četvrte, šeste, ... i dvadesetčetvrte kule su tri narančaste karte.

Odredimo broj plavih karata u kulama na parnim mjestima u nizu:

broj kule u nizu	broj plavih karata
2	$2 \cdot 2 + 0 \cdot 3$
4	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3$
6	$6 \cdot 2 + (4 + 2) \cdot 3$
8	$8 \cdot 2 + (6 + 4 + 2) \cdot 3$
10	$10 \cdot 2 + (8 + 6 + 4 + 2) \cdot 3$
...	...
bilo koji paran n	$n \cdot 2 + ((n - 2) + (n - 4) + \dots + 4 + 2) \cdot 3$

U dvadesetčetvrtoj kuli, za $n = 24$, nalazile bi se

$$24 \cdot 2 + (22 + 20 + \dots + 2) \cdot 3 = 24 \cdot 2 + 132 \cdot 3 = 444$$

plave karte.

2. Ušteđevina

Mirna i Luka marljivo štede još od prvog razreda. Danas su prebrojali svoje ušteđevine i Mirna je rekla Luki: „Da sam uštedjela 20 % više nego što jesam, ti bi imao točno dva puta više eura od mene.“ Na to je Luka odgovorio: „A da sam ja uštedio 27 € više nego što jesam, imao bih točno tri puta više eura od tebe.“ Koliko su ukupno uštedjeli Mirna i Luka?

Rezultat: 153

Prvo rješenje.

Neka su m i l iznosi koje su uštedjeli Mirna i Luka.

Mirna je rekla da je $2 \cdot (m + 20\% \cdot m) = l$, tj. $l = \frac{12}{5}m$. Luka je rekao da je $l + 27 = 3 \cdot m$.

Tada je $\frac{12}{5}m + 27 = 3m$ pa je $m = 45$ i $l = 108$. Mirna i Luka su zajedno uštedjeli $45 + 108 = 153$ eura.

Drugo rješenje.

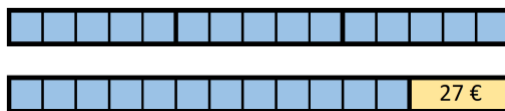
Označimo s  20 % Mirnine ušteđevine.

Mirna je uštedjela 

a da je uštedjela 20 % više, imala bi 

Prema Mirninoj izjavi, Luka ima dvostruko više od toga, tj. 

Prema Lukinoj izjavi, trostruka Mirnina ušteđevina jednaka je iznosu njegove ušteđevine uvećane za 27 €.



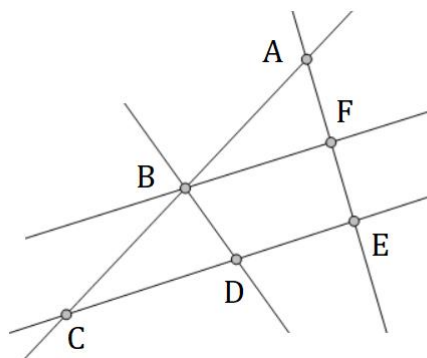
Sada vidimo da je  jednako , pa je  = 9 €.

Mirnina ušteđevina iznosi 45 €, a Lukina 108 €. Zajedno su uštedjeli 153 €.

3. Broj u točki B

Svakoj od točaka na slici pridružen je po jedan broj. Ti su brojevi međusobno različiti uzastopni višekratnici broja 17, počevši od najmanjeg troznamenkastog višekratnika tog broja. Brojevi pridruženi točkama koje pripadaju istom pravcu su zbrojeni.

Zbroj svih pet tako dobivenih zbrojeva iznosi 1870. Koji je broj pridružen točki B?



Rezultat: 136

Prvo rješenje.

Najmanji troznamenkasti višekratnik broja 17 je broj $17 \cdot 6 = 102$, a sljedećih pet višekratnika su 119, 136, 153, 170 i 187. Ti su brojevi (nepoznatim redom) pridruženi točkama A, B, C, D, E i F .

Neka su a, b, c, d, e i f redom brojevi pridruženi točkama A, B, C, D, E i F .

Promotrimo zbrojeve brojeva pridruženih točkama na istom pravcu:

$$a + b + c, \quad a + f + e, \quad b + d, \quad b + f, \quad c + d + e.$$

Njihov je zbroj 1870, tj.

$$(a + b + c) + (a + f + e) + (b + d) + (b + f) + (c + d + e) = 1870$$

$$2 \cdot (a + b + c + d + e + f) + b = 1870$$

Brojevi a, b, c, d, e i f su upravo brojevi 102, 119, 136, 153, 170 i 187 (nepoznatim redoslijedom) pa je

$$a + b + c + d + e + f = 102 + 119 + 136 + 153 + 170 + 187$$

$$a + b + c + d + e + f = 17 \cdot (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) = 17 \cdot 51 = 867$$

Sada iz gornje jednadžbe dobivamo

$$2 \cdot 867 + b = 1870$$

$$b = 1870 - 2 \cdot 867 = 1870 - 1734$$

$$b = 136$$

Drugo rješenje.

Točkama A, B, C, D, E i F pridruženi su, ne nužno tim redoslijedom, brojevi 102, 119, 136, 153, 170, 187. Svaka od točaka, osim točke B , pripada dvama pravcima. Točka B pripada trima pravcima.

Zato je ukupan zbroj, 1870, jednak dvostrukom zbroju svih brojeva i broja pridruženog točki B . Dakle, broj koji pridružen točki B je

$$1870 - 2 \cdot (102 + 119 + 136 + 153 + 170 + 187) = 1870 - 2 \cdot 867 = 136.$$

Točki B pridružen je broj 136.

4. Crno-bijeli trokut

Jednakostraničan je trokut obojen crnom bojom. Ana je označila polovišta njegovih stranica i spojila ih dužinama te tako podijelila polazni trokut na četiri sukladna jednakostranična trokuta. Trokut čiji su vrhovi označena polovišta obojila je bijelom bojom. U svakom sljedećem koraku Ana je ponovila isti postupak na svim preostalim crnim trokutima. Na slici je prikazan trokut na početku te nakon prva dva koraka.



polazni trokut



nakon prvog koraka



nakon drugog koraka

Odredi koliki je dio polaznog trokuta obojan crnom bojom nakon petog koraka i zapiši ga u obliku do kraja skraćenog razlomka $\frac{a}{b}$. Kolika je razlika $b - a$?

Rezultat: 781

Rješenje.

Nakon prvog koraka crno su obojane $\frac{3}{4}$ trokuta. Nakon drugog koraka crno je obojano $\frac{9}{16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ trokuta.

Zaključujemo da je nakon petog koraka crnom bojom obojano $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{243}{1024}$ trokuta.

Razlomak $\frac{243}{1024}$ je do kraja skraćen pa je tražena razlika $1024 - 243 = 781$.

5. Potpuni kvadrat

Odredi najmanji prirodan broj x za koji je umnožak $3192 \cdot x$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Rezultat: 798

Rješenje.

Kvadrat prirodnog broja a je broj $a^2 = a \cdot a$. U rastavu umnoška $a \cdot a$ na proste faktore, svi prosti faktori broja a pojavit će se paran broj puta.

Kako bismo odredili najmanji prirodan broj x takav da je umnožak $3192 \cdot x$ kvadrat prirodnog broja, rastavit ćemo broj 3192 na proste faktore: $3192 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$.

Uočimo da se faktor 2 pojavljuje triput, a svaki od preostalih prostih faktora jedanput.

Kako bi umnožak $3192 \cdot x$ bio kvadrat prirodnog broja, u rastavu broja x na proste faktore trebaju se nalaziti (po jednom) faktori 2, 3, 7 i 19.

Prema tome, najmanji prirodan broj x s traženim svojstvom je $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 798$.

6. Bazen

Bazen se može puniti trima različitim cijevima. Kad bi se bazen punio samo prvom cijevi, napunio bi se za 2.5 sati, kad bi se punio samo drugom cijevi, napunio bi se za 8 sati, a kad bi se punio samo trećom cijevi, napunio bi se za 10 sati. Da bi napunio prazni bazen, Ivan je otvorio sve tri cijevi. Kad se napunila četvrtina bazena, prva se cijev začepila i njome se bazen više nije punio. U nekom trenutku se začepila i druga cijev, te je nakon toga samo treća cijev punila bazen još 1 sat i 30 minuta, sve dok bazen nije bio pun. Koliko je ukupno minuta trajalo punjenje bazena?

Rezultat: 274

Rješenje.

Prva cijev za jedan sat napuni $\frac{1}{2.5} = \frac{2}{5}$ bazena, druga $\frac{1}{8}$ bazena, a treća $\frac{1}{10}$ bazena.

Zajedno u jednom satu, tj. za 60 minuta, napune $\frac{2}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$ bazena.

U 12 minuta napune $\frac{1}{8}$ bazena, a u 24 minute napune $\frac{2}{8}$, tj. $\frac{1}{4}$ bazena.

Na kraju će samo treća cijev puniti bazen 1.5 sati. Za to vrijeme će napuniti $1.5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$ bazena.

To znači da su druga i treća cijev punile zajedno $1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ bazena.

Druga i treća cijev zajedno u jednom satu, tj. za 60 minuta, napune $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{9}{40}$ bazena.

Da bi zajedno napunile $\frac{3}{5}$ bazena, potrebno im je $\frac{3}{5} : \frac{9}{40} = \frac{8}{3}$ sata, tj. 160 minuta.

Sveukupno, punjenje je trajalo $24 + 160 + 90 = 274$ minute.

7. Kuglice u kutijama

Fran sprema svojih 40 potpuno jednakih kuglica u 5 kutija različitih boja. Na koliko ih načina može rasporediti u kutije ako u jednu kutiju stane najviše 9 kuglica, a svaka kuglica mora biti spremljena u neku od kutija?



Rezultat: 126

Rješenje.

Fran ima 40 kuglica pa ne može u svaku od pet kutija spremiti po 9 kuglica.

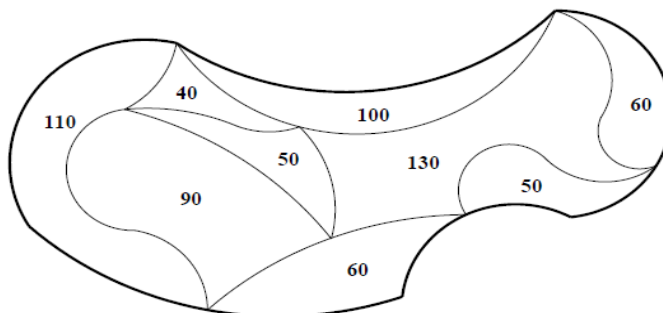
- Ako u četiri kutije spremi po 9 kuglica, u jednu kutiju mora spremiti još 4 kuglice. Označimo takvu vrstu rasporeda sa **[9-9-9-9-4]**. Kutiju u koju mora spremiti 4 kuglice može odabrati na 5 načina.
- Ako u tri kutije spremi po 9 kuglica, u dvije kutije mora spremiti još 13 kuglica.
 - [9-9-9-8-5]** Kutiju s 8 kuglica može odabrati na 5 načina, a za svaki takav izbor, kutiju s 5 kuglica može odabrati na 4 načina, dok u preostale tri kutije sprema po 9 kuglica. To je ukupno $5 \cdot 4 = 20$ načina.
 - [9-9-9-7-6]** Analogno, to može učiniti na $5 \cdot 4 = 20$ načina.
- Ako u dvije kutije spremi po 9 kuglica, u tri kutije mora spremiti još 22 kuglice. To ne može učiniti tako da u svakoj od te tri kutije spremi najviše 7 kuglica pa barem u jednu od te tri kutije mora spremiti 8 kuglica. U preostale dvije kutije mora spremiti još 14 kuglica.
 - [9-9-8-8-6]** Kutiju sa 6 kuglica može odabrati na 5 načina. Za svaki takav odabir postoji 6 rasporeda preostalih kuglica u četiri kutije: (9,9,8,8), (9,8,9,8), (9,8,8,9), (8,9,9,8), (8,9,8,9), (8,8,9,9). To je ukupno $5 \cdot 6 = 30$ načina.
 - [9-9-8-7-7]** Analogno, to može učiniti na $5 \cdot 6 = 30$ načina.
- Ako u jednu kutiju spremi 9 kuglica, u četiri kutije mora spremiti još 31 kuglicu. To mora učiniti tako da u jednu od te četiri kutije spremi 7 kuglica, a u preostale po 8 kuglica **[9-8-8-8-7]**. To može učiniti na $5 \cdot 4 = 20$ načina.
- Ako niti u jednu od kutija ne spremi 9 kuglica, onda u svakoj od pet kutija mora biti točno 8 kuglica **[8-8-8-8-8]**. To je još 1 mogući raspored.

Kuglice se u kutije, prema uvjetima zadatka, mogu spremiti na $5 + 40 + 60 + 20 + 1 = 126$ načina.

Napomena. U svaku od pet kutija stane najviše 9 kuglica, ukupno 45 kuglica. Fran ima 40 kuglica pa umjesto broja kuglica u kutijama možemo promatrati broj slobodnih mjesta u svakoj od pet kutija. Slobodnih je mjesta ukupno 5, te možemo promatrati slučajeve kao u gornjem rješenju samo što u zapisu pišemo broj slobodnih mjesta umjesto broja kuglica u pojedinoj kutiji. Na primjer, umjesto [9-9-9-8-5] pišemo [0-0-0-1-4] itd.

8. Opseg

Koliki je opseg lika na slici ako su brojevi na slici opsezi odgovarajućih dijelova lika?

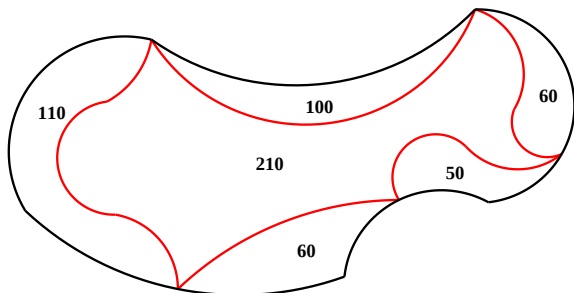
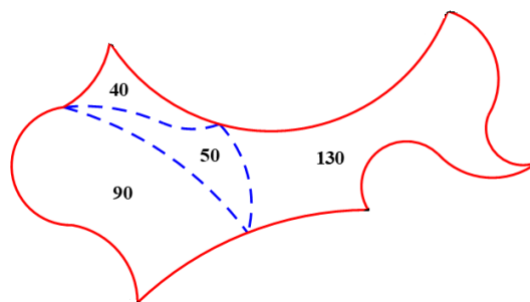


Rezultat: 170

Rješenje.

Uočimo dio početnog lika istaknut crvenim rubom. Njegov je opseg jednak zbroju opsega likova s kojima ima zajednički dio ruba (likovi opsega 90, 40 i 130) umanjenom za dijelove koji nisu na njegovom rubu. Dakle opseg lika s plavim rubom iznosi

$$90 + 40 + 130 - 50 = 210.$$



Analogno, opseg zadanog lika jednak je zbroju opsega likova s kojima ima zajednički dio ruba (to su likovi opsega 110, 100, 60, 50 i 60) umanjenom za duljinu dijelova tih likova koji ne pripadaju rubu zadanog lika. Drugim riječima, zbroj opsega spomenutih dijelova treba umanjiti za opseg lika s crvenim rubom. Zato je opseg zadanog lika jednak:

$$110 + 100 + 60 + 50 + 60 - 210 = 170.$$

9. Površina četverokuta

Točke M , N , P i R su, redom, polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Unutar kvadrata $ABCD$ odabrana je točka T tako da su površine četverokuta $P(AMTR) = 180$, $P(CPTN) = 340$ i $P(DRTP) = 273$. Kolika je površina četverokuta $BNTM$?

Rezultat: 247

Prvo rješenje.

Točkom M stranica $\overline{AB}$ kvadrata podijeljena je na dva sukladna dijela pa trokut AMT i trokut MBT imaju sukladne osnovice $\overline{AM}$ i $\overline{MB}$ te zajedničku visinu iz vrha T . Stoga su im i površine jednake,

$$P(AMT) = P(MBT) = P_1.$$

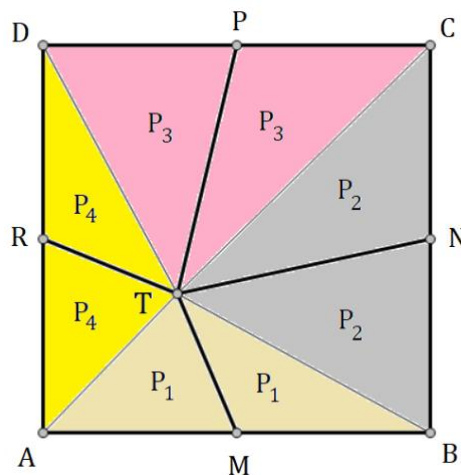
Analogno je i $P(BNT) = P(NCT) = P_2$, $P(CPT) = P(PDT) = P_3$, $P(DRT) = P(RAT) = P_4$.

Uočimo da je

$$P_1 + P_4 + P_2 + P_3 = P(AMTR) + P(CPTN) = 180 + 340 = 520.$$

Zato površina četverokuta $BNTM$ iznosi

$$\begin{aligned} P(BNTM) &= P_1 + P_2 = 520 - (P_3 + P_4) = 520 - P(DRTP) \\ &= 520 - 273 = 247. \end{aligned}$$



Drugo rješenje.

Nacrtajmo četverokut $MNPR$. Trokuti RAM , MBN , NCP i PDR su međusobno sukladni jednakokračni pravokutni trokuti, a zbroj njihovih površina jednak je polovini površine kvadrata $ABCD$. Četverokut $MNPR$ je kvadrat jer su mu stranice sukladne, a kutovi pravi. Njegova je površina jednaka polovini površine kvadrata $ABCD$. Označimo s a duljinu stranice kvadrata $MNPR$.

Prema oznakama na slici vrijedi:

$$P_{\Delta MNT} + P_{\Delta PRT} = \frac{|MN| \cdot v_1}{2} + \frac{|PR| \cdot v_2}{2}$$

a kako je $|MN| = |PR| = a$,

$$P(MNT) + P(PRT) = \frac{a \cdot v_1}{2} + \frac{a \cdot v_2}{2} = \frac{a \cdot (v_1 + v_2)}{2}$$

Primijetimo da je $v_1 + v_2 = a$ (označene visine u trokutima TMN i TPR dijele kvadrat $MNPR$ na dva pravokutnika) pa je

$$P(MNT) + P(PRT) = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}P(MNPR) = \frac{1}{4}P(ABCD).$$

Analogno, $P(RMT) + P(NPT) = \frac{1}{2}P(MNPR) = \frac{1}{4}P(ABCD)$.

Dakle,

$$\begin{aligned} P(AMTR) + P(CPTN) &= P(AMR) + P(RMT) + P(CPN) + P(NPT) \\ &= (P(AMR) + P(CPN)) + (P(RMT) + P(NPT)) = \frac{1}{4}P(ABCD) + \frac{1}{4}P(ABCD) = \frac{1}{2}P(ABCD). \end{aligned}$$

Kako je $P(AMTR) + P(CPTN) = 180 + 340 = \frac{1}{2}P(ABCD)$, znači da je $P(BNTM) + P(DRTP) = \frac{1}{2}P(ABCD)$.

Slijedi da je $P(BNTM) + 273 = 180 + 340$, pa je $P(BNTM) = 247$.

Treće rješenje.

Označimo sa S središte kvadrata $ABCD$.

Dužine $\overline{RN}$ i $\overline{PM}$ dijele kvadrat na četiri sukladna kvadrata. Točka T nalazi se u jednom od tih kvadrata. Pretpostavimo da se točka T nalazi unutar kvadrata $AMSR$. Zbroj površina kvadrata $AMSR$ i $SNCP$ čini polovinu površine kvadrata $ABCD$.

$$P(CPTN) = P(SNCP) + P(SPT) + P(NST)$$

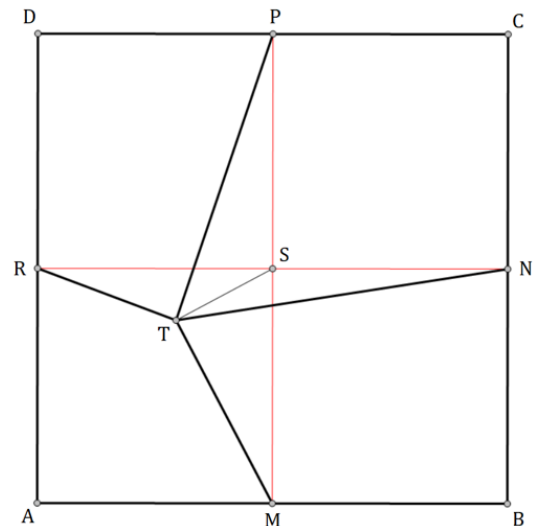
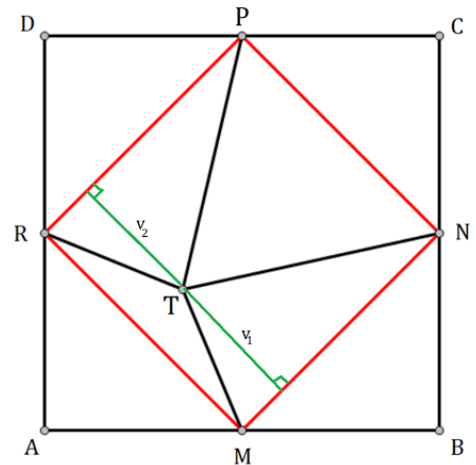
$$P(AMTR) = P(AMSR) - P(MST) - P(SRT)$$

Uočimo da trokuti SPT i MST imaju jednake površine (sukladne su im osnovice $\overline{SP}$ i $\overline{MS}$ i zajednička visina). Također, trokuti NST i SRT imaju jednake površine.

Prema tome, vrijedi:

$$\begin{aligned} P(AMTR) + P(CPTN) &= P(AMSR) - P(MST) - P(SRT) + P(SNCP) + P(SPT) - P(NST) \\ &= P(AMSR) - P(MST) - P(SRT) + P(SNCP) + P(MST) + P(SRT) = P(AMSR) + P(SNCP) \\ &= \frac{1}{2}P(ABCD). \end{aligned}$$

Kako je $P(AMTR) + P(CPTN) = 180 + 340 = \frac{1}{2}P(ABCD)$, znači da je $P(BNTM) + P(DRTP) = \frac{1}{2}P(ABCD)$, pa je $P(BNTM) + 273 = 180 + 340$, te slijedi $P(BNTM) = 247$.



10. Djeljivi i nedjeljivi

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 200 000 koji su djeljivi s 12 i 35, a nisu djeljivi ni s 24 ni s 25?

Rezultat: 190

Prvo rješenje.

Neka je a prirodan broj, $a < 200\,000$ (tj. $a \leq 199\,999$) koji zadovoljava navedene uvjete:

- (a) $12 \mid a$ (čitamo: „12 dijeli broj a “ ili „12 je djelitelj broja a “)
- (b) $35 \mid a$
- (c) $24 \nmid a$
- (d) $25 \nmid a$

Kako $12 \mid a$ i $35 \mid a$, a brojevi 12 i 35 su relativno prosti, i broj $12 \cdot 35 = 420$ dijeli broj a , tj. $420 \mid a$.

Uvjete (a) i (b) zadovoljavaju višekratnici broja 420. Takvih brojeva manjih od 200 000 ima onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 199 999 i 420, dakle 476.

Zbog uvjeta (c), od tih 476 brojeva treba ukloniti brojeve koji su djeljivi s 24. Kako je $V(420, 24) = 840$, takvih je brojeva onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 199 999 i 840, dakle 238.

Zbog uvjeta (d), od onih 476 brojeva treba ukloniti brojeve koji su djeljivi s 25. Kako je $V(420, 25) = 2100$, takvih je brojeva onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 199 999 i 2100, dakle 95.

Tako bismo dobili $476 - 238 - 95 = 143$.

Međutim, na ovaj način smo brojeve koji su djeljivi i s 24 i s 25 uklonili dvaput. Zato treba dodati njihov broj.

Radi se o višekratnicima broja $V(24, 25) = 24 \cdot 25 = 600$ koji su ujedno višekratnici broja 420. Kako je $V(600, 420) = 4200$, takvih je brojeva onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 199 999 i 4200, dakle 47.

Konačno, brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka je $476 - 238 - 95 + 47 = 143 + 47 = 190$.

Drugo rješenje.

Brojevi koji su djeljivi s 12 i 35 su višekratnici broja 420, tj. brojevi oblika $420 \cdot k$.

Da bi $420 \cdot k$ bilo manje od 200 000, mora biti $k \leq 476$. Neka je $S = \{1, 2, 3, \dots, 476\}$.

Promotrimo sada uvjet $24 \nmid a$.

Broj $420 \cdot k$ je uvijek djeljiv s 12 jer $12 \mid 420$. Broj $420 \cdot k$ je djeljiv s 24 $= 2 \cdot 12$ ako i samo ako je k paran.

Promotrimo i uvjet $25 \nmid a$.

Broj $420 \cdot k$ je uvijek djeljiv s 5 jer $5 \mid 420$. Broj $420 \cdot k$ je djeljiv s 25 $= 5^2$ ako i samo ako je broj k djeljiv s 5.

Dakle, treba odrediti koliko je brojeva u skupu S koji nisu parni i nisu djeljivi s 5. I parnih i neparnih brojeva u tom je skupu $476 : 2 = 238$.

Broj brojeva tog skupa S koji su djeljivi s 5 dobit ćemo kao rezultat dijeljenja 476 s 5 – takvih je brojeva 95. Brojeva koji nisu djeljivi s 5 u skupu S je $476 - 95 = 381$.

Brojevi koji su parni i djeljivi s 5 višekratnici su broja 10, a takvih u skupu S ima 47. Zato neparnih višekratnika broja 5 ima $95 - 47 = 48$.

Oduzmimo li od broja neparnih elemenata skupa S broj neparnih višekratnika broja 5, dobit ćemo broj brojeva k iz skupa S koji nisu parni i nisu djeljivi s 5, a to je broj koji trebamo: $238 - 48 = 190$.

Brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka ima 190.