

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 9. listopada 2024.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Neka su A, B, C, D, E i F različite znamenke za koje vrijedi

$$\overline{AA} + A = \overline{AB}$$

$$\overline{BB} + B = \overline{CD}$$

$$\overline{CC} + C = \overline{EF}$$

Koliko je $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}$?

Rješenje.

Znamenka A ne može biti 0. Ispitajmo ostale mogućnosti.

A	$\overline{AB} = \overline{AA} + A$	B	$\overline{CD} = \overline{BB} + B$	C, D	$\overline{EF} = \overline{CC} + C$	E, F
1	12	2	24	$C = 2$, nemoguće jer $B = C$		
2	24	4	48	$C = 4$, nemoguće jer $B = C$		
3	36	6	72	$C = 7, D = 2$	84	$E = 8, F = 4$
4	48	8	96	$C = 9, D = 6$	108, nemoguće	

Ako je $A \geq 5$, onda prva znamenka zbroja $\overline{AA} + A$ nije A .

Vidimo da postoji samo jedna mogućnost, $\overline{AB} = 36$, $\overline{CD} = 72$, $\overline{EF} = 84$, pa je

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = 36 + 72 + 84 = 192.$$

Napomena.

Iz prve jednakosti zaključujemo da je A manji od 5 i da je $B = 2A$. Iz druge jednadžbe slijedi da je B veći od 5, pa je $B = 6$ ili $B = 8$. Ta dva slučaja provjeravamo kao u tablici u danom rješenju.

[illegible]

U tablici je ukupno zapisano $100 \cdot 100 = 10\,000$ brojeva.

$$1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + \cdots + (100 + 100 + \cdots + 100) + \cdots + (197 + 197 + 197) + (198 + 198) + 199.$$

Grupiranjem dobivamo:

$$(1 + 199) + (2 + 198) + (2 + 198) + (3 + 197) + \cdots + (100 + 100) + \cdots + (100 + 100)$$

Zbroj brojeva u svakoj zagradi je 200. Takvih je zagrada $10\,000 : 2 = 5\,000$ jer smo zbrojili svih 10 000 brojeva. Dakle, zbroj svih brojeva u tablici iznosi $200 \cdot 5\,000 = 1\,000\,000$.

The diagram illustrates a sequence of 100 numbers arranged in a staircase pattern. The numbers are: 100, 101, 196, 197, 198, 199, 99, 196, 197, 198, 196, 197, 196, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 101, 1, 2, 3, 4, 99, 100. A red diagonal line runs from the top-left to the bottom-right.

U prvi stupac tablice upisani su brojevi od 1 do 100.

Njihov je zbroj

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101.$$

U drugi stupac tablice upisani su brojevi od 2 do 101.

Njihov je zbroj

$$2 + 3 + 4 + \cdots + 51 + 52 + \cdots + 98 + 99 + 100 + 101 = 50 \cdot 103.$$

Analogno, sljedeći zbrojevi su $50 \cdot 105, 50 \cdot 107, \dots, 50 \cdot 299$.

Zbroj zbrojeva po svim stupcima je

$$\begin{aligned} & 50 \cdot 101 + 50 \cdot 103 + 50 \cdot 105 + \cdots + 50 \cdot 295 + 50 \cdot 297 + 50 \cdot 299 \\ &= 50 \cdot (101 + 103 + 105 + \cdots + 295 + 297 + 299) \\ &= 50 \cdot ((101 + 299) + (103 + 297) + \cdots + (199 + 201)) \\ &= 50 \cdot (400 \cdot 50) = 1\,000\,000. \end{aligned}$$

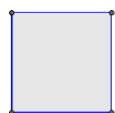
3. U kvadratnoj mreži na slici najbliže su točke udaljene 2 cm. Skiciraj pet kvadrata različitih veličina s vrhovima u toj mreži, a zatim odredi njihove površine.



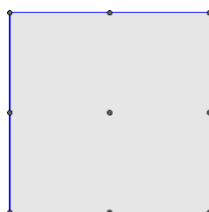
Rješenje.

Postoji pet različitih veličina kvadrata:

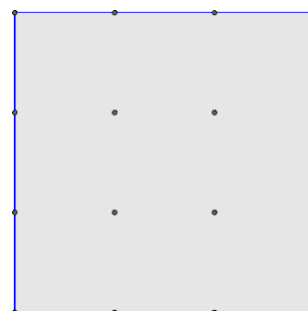
A:



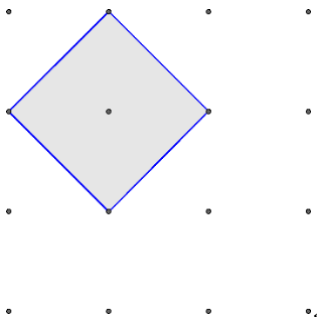
B:



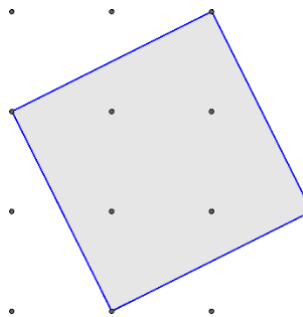
C:



D:



E:

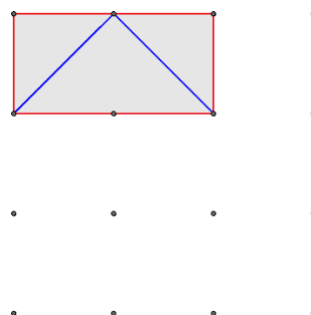
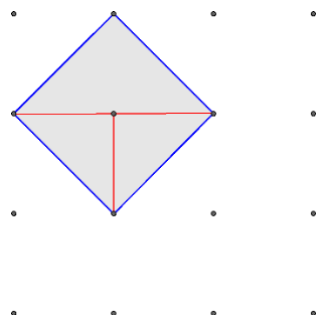


Površine prva tri kvadrata lako je odrediti, jer su duljine njihovih stranica redom 2 cm, 4 cm i 6 cm. Zato površina kvadrata A iznosi 4 cm^2 , površina kvadrata B 16 cm^2 , a površina kvadrata C je 36 cm^2 .

Površine kvadrata D i E mogu se izračunati na više načina. Prikazat ćemo dva načina.

Prvi način određivanja površine kvadrata D i E

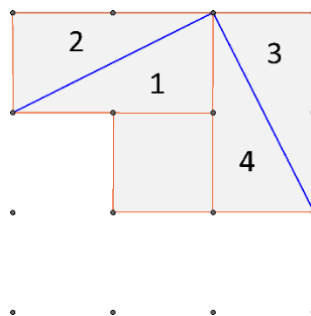
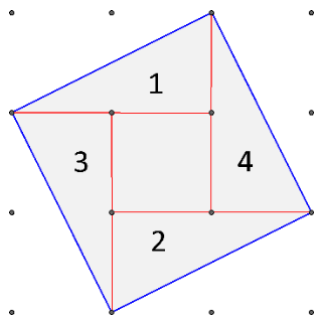
Da bismo odredili površinu kvadrata D, razrežimo ga kao na lijevoj slici.



Premještanjem dvaju manjih pravokutnih trokuta (slika desno) dobivamo pravokutnik čije su duljine stranica 4 cm i 2 cm. Njegova je površina 8 cm^2 .

Odredimo na kraju i površinu kvadrata E.

Razrežimo kvadrat E na 4 jednaka pravokutna trokuta (označena brojevima 1, 2, 3 i 4) i manji kvadrat.

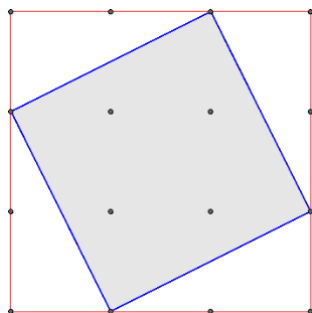
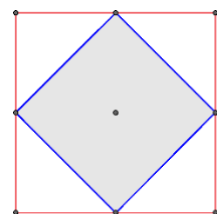


Premještanjem pravokutnog trokuta 2 iznad pravokutnog trokuta 1 i pravokutnog trokuta 4 desno od pravokutnog trokuta 3 (vidi slike gore) dobivamo dva pravokutnika čije su duljine stranica 4 cm i 2 cm. Površine tih pravokutnika su $4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2$.

Površina kvadrata E jednaka je zbroju površina tih dvaju pravokutnika i površine manjeg kvadrata, odnosno $2 \cdot 8 + 4 = 20 \text{ cm}^2$.

Drugi način određivanja površine kvadrata D i E

Nadopunimo kvadrat D s četirima jednakim pravokutnim trokutima (koji su jednaki pravokutnim trokutima na koje je podijeljen kvadrat D). Tim dopunjavanjem dobili smo kvadrat stranice duljine 4 cm čija je površina dva puta veća od površine kvadrata D. Zato površina kvadrata D iznosi $(4 \cdot 4) : 2 = 8 \text{ cm}^2$.



Nadopunimo kvadrat E s četirima jednakim pravokutnim trokutima. Tim dopunjavanjem dobili smo kvadrat čija je površina $6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$.

Površina svakog od četiri pravokutna trokuta jednaka je polovini površine pravokutnika sa stranicama duljina 4 cm i 2 cm. Površina tog pravokutnika je 8 cm^2 , a površina svakog od dodanih pravokutnih trokuta 4 cm^2 .

Površina kvadrata E jednaka je razlici površina velikog kvadrata dobivenog dopunjavanjem i zbroja površina četiriju pravokutnih trokuta

$$36 - 4 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2.$$

4. Troje učenika petog razreda i četvero učenika četvrtog razreda koji su odabrani za sudjelovanje na ekipnom matematičkom natjecanju trebaju se podijeliti u dvije ekipe - Gru i Malci. U jednoj ekipi trebaju biti tri, a u drugoj četiri učenika. U svakoj ekipi treba biti barem jedan učenik petog razreda. Na koliko se načina učenici mogu podijeliti u ekipe?

Rješenje.

Razlikujemo četiri slučaja, ovisno o broju učenika u ekipama i razredima koje pohađaju.

Gru	5-4-4	5-5-4	5-4-4-4	5-5-4-4
Malci	5-5-4-4	5-4-4-4	5-5-4	5-4-4

Neka su A, B i C učenici petog razreda, a D, E, F i G učenici četvrtog razreda.

1. slučaj: Gru = 5-4-4, Malci = 5-5-4-4

Ekipa Gru ima tri učenika od kojih je samo jedan učenik petog razreda, a ekipa Malci četiri učenika od kojih su dva učenika petog razreda.

U ekipi Gru jednog učenika petog razreda moguće je odabrati na 3 načina (to je A ili B ili C). Preostala dva člana ekipe Gru, učenike četvrtog razreda, moguće je odabrati na $4 \cdot 3 : 2 = 6$ načina (to su D, E ili D, F ili D, G ili E, F ili E, G ili F, G; poredak nije bitan). Ekipu Gru moguće je sastaviti na $3 \cdot 6 = 18$ načina. U ekipi Malci su svi preostali učenici.

2. slučaj: Gru = 5-5-4, Malci = 5-4-4-4

Ekipa Gru ima tri učenika od kojih su dva učenika petog razreda, a ekipa Malci četiri učenika od kojih je samo jedan učenik petog razreda.

U ekipi Gru dva učenika petog razreda moguće je odabrati na 3 načina – isto kao da biramo onog učenika petog razreda koji će biti u ekipi Malci. Preostalog člana ekipe Gru, učenika četvrtog razreda, moguće je odabrati na 4 načina. Ovakvu podjelu moguće je napraviti na $3 \cdot 4 = 12$ načina.

3. slučaj: Gru = 5-4-4-4, Malci = 5-5-4

Ekipa Gru ima četiri učenika od kojih je samo jedan učenik petog razreda, a ekipa Malci tri učenika od kojih su dva učenika petog razreda.

Ovakvih podjela ima jednako kao i podjela u drugom slučaju, 12, jer su samo zamijenjene uloge (imena) ekipa.

4. slučaj: Gru = 5-5-4-4, Malci = 5-4-4

Ekipa Gru ima četiri učenika od kojih su dva učenika petog razreda, a ekipa Malci tri učenika od kojih je samo jedan učenik petog razreda.

Ovakvih je podjela jednako kao u prvom slučaju, 18.

Ukupan broj mogućih podjela učenika u ekipe Gru i Malci je $18 + 12 + 12 + 18 = 60$.

5. Vedran je zamolio prijatelje da zamisle dvoznamenkasti broj. Zatim im je davao upute:

- dodaj zamišljenom broju 42
- pomnoži dobiveni rezultat s 20
- dodaj tom rezultatu broj koji si zamislio
- podijeli dobiveni broj sa 7
- dodaj 80.

Kada je čuo da je Mirela dobila broj 311, a Nikola broj 443, Vedran je odmah odredio koje su brojeve zamislili. Možeš li i ti odrediti te brojeve? Objasni na koji način Vedran određuje zamišljene brojeve.

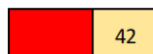
Prvo rješenje.

Prikažimo zamišljeni broj kao crveni pravokutnik:



Slijedom Vedranovih uputa dobivamo:

(dodaj zamišljenom broju 42)



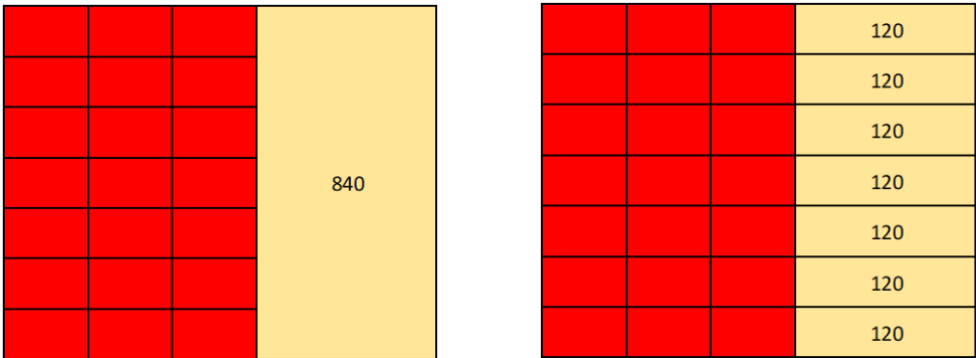
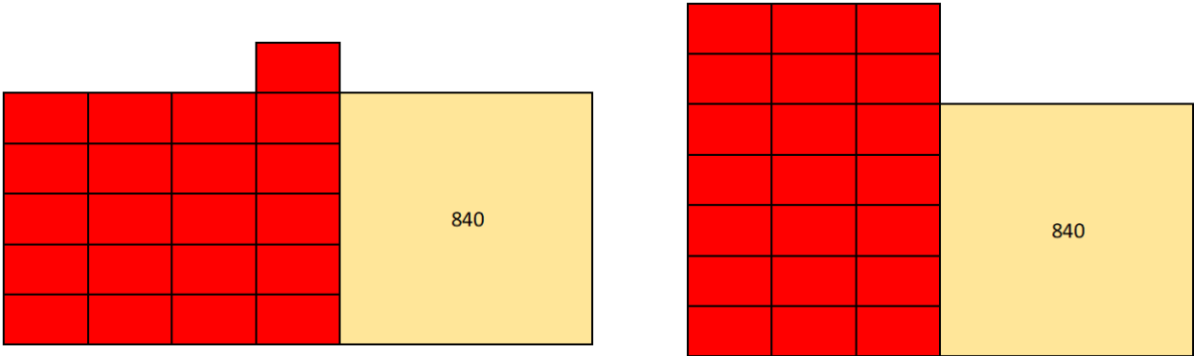
(pomnoži dobiveni rezultat s 20)

				42	42	42	42
				42	42	42	42
				42	42	42	42
				42	42	42	42
				42	42	42	42

(dodaj tom rezultatu broj koji si zamislio)

				42	42	42	42
				42	42	42	42
				42	42	42	42
				42	42	42	42
				42	42	42	42

odnosno...



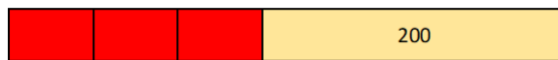
(podijeli dobiveni broj sa 7)

			120
--	--	--	-----

(dodaj 80)

			120	80
--	--	--	-----	----

Konačno, dobiveni rezultat Vedranovih prijatelja možemo prikazati ovako:



Ako je  + 200 = 311, onda je  = 111 i  = 111 : 3 = 37.

Mirela je zamislila broj 37.

Slično zaključujemo da je Nikola zamislio broj $(443 - 200) : 3 = 243 : 3 = 81$.

Da bi dobio zamišljeni broj, Vedran mora od rezultata oduzeti broj 200 i zatim podijeliti s 3.

Drugo rješenje

Umjesto da broju dodaju 42, pa pomnože rezultat s 20, Vedranovi prijatelji mogu zamišljeni broj pomnožiti s 20 te rezultatu dodati $42 \cdot 20 = 840$. Kada tom rezultatu dodaju zamišljeni broj, rezultat je zamišljeni broj pomnožen s 21 te uvećan za 840. Dijeljenjem sa 7 dobije se zamišljeni broj pomnožen s 3 i uvećan za $840 : 7 = 120$. Na kraju dodaju još 80 te dobiju zamišljeni broj pomnožen s 3 i uvećan za 200.

To znači da Vedran mora od rezultata oduzeti broj 200 i zatim podijeliti s 3 da bi dobio zamišljeni broj.

Mirela je zamislila broj $(311 - 200) : 3 = 111 : 3 = 37$, a Nikola broj $(443 - 200) : 3 = 243 : 3 = 81$.

Treće rješenje

Neka je x broj zamišljeni broj.

Slijedeći Vedranove upute, nakon prva tri koraka dobije se

- (dodaj zamišljenom broju 42) $x + 42$
- (pomnoži dobiveni rezultat s 20) $(x + 42) \cdot 20$
- (dodaj tom rezultatu broj koji si zamislio) $(x + 42) \cdot 20 + x$

Sređivanjem dobivamo $(x + 42) \cdot 20 + x = 20x + 840 + x = 21x + 840$

Nakon sljedećeg koraka (podijeli dobiveni broj sa 7) rezultat je $3x + 120$

te na kraju (dodaj 80) konačno $3x + 200$.

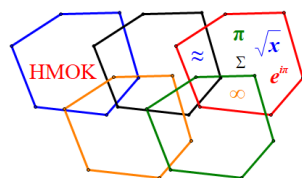
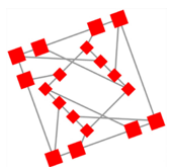
Mirelin broj dobit ćemo rješavanjem jednadžbe $3x + 200 = 311$.

$$3x = 311 - 200 = 111, \quad x = 111 : 3 = 37.$$

Za Nikolin broj vrijedi $3x + 200 = 443$ te dobivamo $x = 81$.

Mirela je zamislila broj 37, a Nikola broj 81.

Vedran zamišljeni broj dobiva tako da rezultat umanji za 200 i dobivenu razliku podijeli brojem 3.



HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 9. listopada 2024.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. Neka su A, B, C, D, E i F različite znamenke za koje vrijedi

$$\overline{AA} + A = \overline{AB}$$

$$\overline{BB} + B = \overline{CD}$$

$$\overline{CC} + C = \overline{EF}$$

Koliko je $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}$?

Rješenje.

Znamenka A ne može biti 0. Ispitajmo ostale mogućnosti.

A	$\overline{AB} = \overline{AA} + A$	B	$\overline{CD} = \overline{BB} + B$	C, D	$\overline{EF} = \overline{CC} + C$	E, F
1	12	2	24	$C = 2$, nemoguće jer $B = C$		
2	24	4	48	$C = 4$, nemoguće jer $B = C$		
3	36	6	72	$C = 7, D = 2$	84	$E = 8, F = 4$
4	48	8	96	$C = 9, D = 6$	108, nemoguće	

Ako je $A \geq 5$, onda prva znamenka zbroja $\overline{AA} + A$ nije A .

Vidimo da postoji samo jedna mogućnost, $\overline{AB} = 36$, $\overline{CD} = 72$, $\overline{EF} = 84$, pa je

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = 36 + 72 + 84 = 192.$$

Napomena.

Iz prve jednakosti zaključujemo da je A manji od 5 i da je $B = 2A$. Iz druge jednadžbe slijedi da je B veći od 5, pa je $B = 6$ ili $B = 8$. Ta dva slučaja provjeravamo kao u tablici u danom rješenju.

2. Neka je $ABCD$ kvadrat. Točka E pripada stranici $\overline{BC}$ i vrijedi $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$, a točka F pripada stranici $\overline{CD}$ i vrijedi $|FC| = \frac{4}{5}|CD|$. Ako površina trokuta AEF iznosi 5292 cm^2 , koliki su opseg i površina kvadrata $ABCD$?

Rješenje.

Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$.

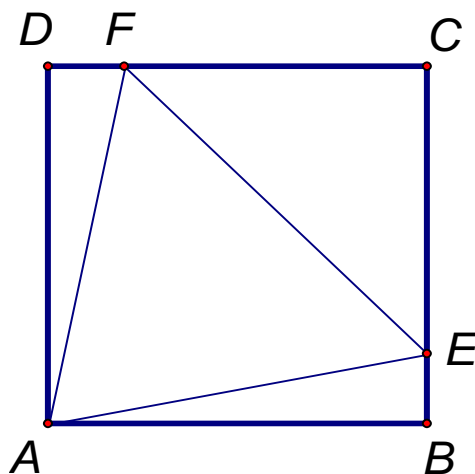
Znači, $a = |AB| = |BC| = |CD| = |DA|$.

Površina kvadrata $ABCD$ jednaka je a^2 .

Kako je $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$, slijedi da je $|BE| = \frac{1}{5}a = 0.2a$ i $|EC| = \frac{4}{5}a = 0.8a$.

Kako je $|FC| = \frac{4}{5}|CD|$, slijedi da je $|DF| = \frac{1}{5}a = 0.2a$ i $|FC| = \frac{4}{5}a = 0.8a$.

Površine trokuta $\triangle ABE$ i $\triangle AFD$ su jednake i iznose $(a \cdot 0.2a):2 = 0.1a^2$. Površina trokuta $\triangle ECF$ iznosi $(0.8a \cdot 0.8a):2 = 0.32a^2$. Zbroj površina tih triju trokuta iznosi $0.1a^2 + 0.1a^2 + 0.32a^2 = 0.52a^2$.



Površina trokuta $\triangle AEF$ jednaka je površini kvadrata $ABCD$ umanjenoj za zbroj površina trokuta ABE , AFD i ECF , tj. iznosi $a^2 - 0.52a^2 = 0.48a^2$.

Površina trokuta $\triangle AEF$ iznosi 5292 cm^2 pa vrijedi $0.48a^2 = 5292$, odnosno

$$a^2 = 5292:0.48 = 11025.$$

Površina kvadrata jednaka je 11025 cm^2 .

Broj 11025 rastavimo na proste faktore: $11025 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$.

Proste faktore podijelimo u dvije jednake grupe: $11025 = (3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7) = 105 \cdot 105$.

Znači, duljina stranice kvadrata iznosi $a = 105 \text{ cm}$, pa je opseg $105 \cdot 4 = 420 \text{ cm}$.

3. U nizu od deset prirodnih brojeva treći i svaki sljedeći član niza jednak je zbroju dvaju prethodnih članova, a sedmi član niza je 184. Dokaži da je u svakom takvom nizu zbroj prvih deset članova isti, te odredi taj zbroj.

Rješenje.

Neka su prva dva člana niza prirodni brojevi a i b . Svih deset članova možemo prikazati pomoću a i b :

$$\begin{array}{llllll} F_1 = a, & F_2 = b, & F_3 = a + b, & F_4 = a + 2b, & F_5 = 2a + 3b, \\ F_6 = 3a + 5b, & F_7 = 5a + 8b, & F_8 = 8a + 13b, & F_9 = 13a + 21b, & F_{10} = 21a + 34b. \end{array}$$

Označimo njihov zbroj sa Z . Vrijedi

$$\begin{aligned} Z &= a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) \\ &\quad + (5a + 8b) + (8a + 13b) + (13a + 21b) + (21a + 34b) = 55a + 88b, \end{aligned}$$

odnosno

$$Z = 11 \cdot (5a + 8b).$$

Kako je sedmi član niza 184, tj. $5a + 8b = 184$, vrijednost zbroja Z je

$$\begin{aligned} Z &= 11 \cdot 184 \\ Z &= 2024 \end{aligned}$$

Zbroj deset brojeva takvog niza je 2024.

Napomena. Postoje četiri takva niza. Kako su pribrojnici $8b$ i 184 djeljivi s 8, pribrojnik $5a$ mora biti djeljiv s 8. Brojevi 5 i 8 su relativno prosti pa a mora biti djeljiv s 8.

Kako su a i b prirodni brojevi, pribrojnik $5a$ mora biti manji od 184, tj. $a < 36.8$.

Postoje četiri niza koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

1. niz: 8, 18, ...
2. niz: 16, 13, ...
3. niz: 24, 8, ...
4. niz: 32, 3, ...

4. Neka su a, b, c prirodni brojevi za koje vrijedi $15a + 6b = 20c$.

- a) Je li umnožak $a \cdot b \cdot c$ uvijek djeljiv s 30 ?
- b) Je li umnožak $a \cdot b \cdot c$ uvijek djeljiv s 20 ?

Rješenje.

a) U izrazu $15a + 6b = 20c$ brojevi $6b$ i $20c$ su djeljivi s 2 pa i pribrojnik $15a$ mora biti djeljiv s 2. Kako su brojevi 15 i 2 relativno prosti, to će biti jedino ako je i a djeljiv s 2. Neka je $a = 2k, k \in \mathbb{N}$.

U izrazu $15a + 6b = 20c$ brojevi $15a$ i $20c$ su djeljivi s 5 pa i pribrojnik $6b$ mora biti djeljiv s 5. Kako su brojevi 6 i 5 relativno prosti, to će biti jedino ako je i b djeljiv s 5. Neka je $b = 5m, m \in \mathbb{N}$.

U izrazu $15a + 6b = 20c$ pribrojnici $15a$ i $6b$ su djeljivi s 3 pa i zbroj $20c$ mora biti djeljiv s 3. Kako su brojevi 20 i 3 relativno prosti, to će biti jedino ako je i c djeljiv s 3. Neka je $c = 3n, n \in \mathbb{N}$.

Tada je $a \cdot b \cdot c = 2k \cdot 5m \cdot 3n = 30 \cdot kmn$, pa je umnožak $a \cdot b \cdot c$ uvijek djeljiv s 30.

b) Ne; na primjer, za $a = 2, b = 5, c = 3$ je $15 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 20 \cdot 3$, a umnožak $2 \cdot 5 \cdot 3$ nije djeljiv s 20.

5. Mario treba odabrati lozinku koja se sastoji od pet znakova među kojima trebaju biti tri znamenke i dva slova hrvatske abecede pri čemu **nisu** svi znakovi različiti. Koliko ima takvih lozinki?

Prvo rješenje.

Broj mogućih lozinki odredit ćemo tako da od broja svih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede oduzmemo broj takvih lozinki u kojima su svi znakovi različiti.

Lozinka se sastoji od pet znakova. Biraju se 3 znamenke iz skupa od 10 znamenaka te 2 slova hrvatske abecede iz skupa od 30 slova. Neka je Z oznaka za znamenku, a S oznaka za slovo u lozinki.

Odredimo najprije na koliko se pozicija u lozinki mogu rasporediti dva slova. Prvo slovo možemo rasporediti na jednu od 5 pozicija, a drugo slovo na jednu od preostale 4 pozicije. Kako u rasporedu pozicija, prije odabira slova, nije važno koje je prvo, a koje drugo slovo, broj načina $5 \cdot 4$ treba podijeliti s 2. Znamenama, tada, popunjavamo slobodne pozicije.

Dakle, dva slova i tri znamenke mogu se u lozinki rasporediti na 10 načina.

(To su: SSZZZ, SZSZZ, SZZSZ, SZZZS, ZSSZZ, ZSZSZ, ZSZZS, ZZSSZ, ZZSZS, ZZZSS.)

Odredimo broj svih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slova u lozinki smiju se ponavljati pa svako od njih možemo odabrati na 30 načina, tj. ukupno $30 \cdot 30$ načina
- znamenke u lozinki smiju se ponavljati pa svaku od njih možemo odabrati na 10, tj. ukupno $10 \cdot 10 \cdot 10$ načina.

Broj svih mogućih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede je $10 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000000$.

Odredimo broj takvih lozinki u kojima su svi znakovi različiti.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slova u lozinki moraju biti međusobno različita pa prvo slovo možemo odabrati na 30, a drugo na 29, ukupno $30 \cdot 29$ načina.
- znamenke u lozinki moraju biti međusobno različite pa prvu znamenku možemo odabrati na 10, drugu na 9, treću na 8, ukupno $10 \cdot 9 \cdot 8$ načina.

Broj lozinki u kojima su svi znakovi različiti je

$$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 6264000.$$

Prema tome, broj lozinki u kojima nisu svi znakovi različiti je

$$9000000 - 6264000 = 2736000.$$

Drugo rješenje.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su dva ista slova.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slovo koje se ponavlja u lozinki možemo odabrati na 30 načina
- tri znamenke biramo na $10 \cdot 10 \cdot 10$ načina

Broj lozinki u kojima su dva slova ista je $10 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 300\,000$.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su slova različita, a jedna znamenka se ponavlja točno dva puta.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- dva različita slova možemo odabrati na $30 \cdot 29$ načina
- znamenku u lozinki koja se ponavlja točno dva puta možemo odabrati na 10 načina, a preostalu znamenku na 9 načina
- tri su moguće pozicije na koje se može rasporediti znamenka koja se ne ponavlja

Broj lozinki u kojima su slova različita, a jedna znamenka se ponavlja točno dva puta je

$$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3 = 2\,349\,000.$$

Odredimo broj svih lozinki u kojima su slova različita, znamenka se ponavlja tri puta.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

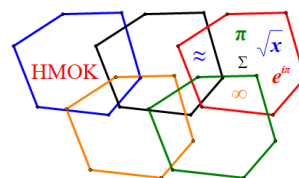
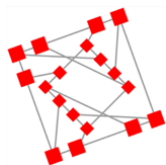
- dva različita slova možemo odabrati na $30 \cdot 29$ načina
- znamenku u lozinki koja se ponavlja tri puta možemo odabrati na 10 načina

Broj lozinki u kojima su slova različita, znamenka se ponavlja tri puta je

$$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 = 87\,000.$$

Prema tome, broj lozinki u kojima nisu svi znakovi različiti je

$$300\,000 + 2\,349\,000 + 87\,000 = 2736000.$$



HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 9. listopada 2024.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Koliko ima međusobno različitih (nesukladnih) raznostraničnih trokuta kojima su duljine svih stranica prirodni brojevi, a duljina najdulje stranice je 100 ?

Prvo rješenje.

Neka su duljine stranica trokuta prirodni brojevi a, b, c , pri čemu je $a < b < c$, tj. $a < b < 100$. Vrijede sljedeće nejednakosti (nejednakost trokuta)

$$a < b + 100$$

$$b < a + 100$$

$$100 < a + b$$

Kako je $a < b$, prva nejednakost $a < b + 100$ je zadovoljena za svaki $a \in \mathbb{N}$ pa je, u nastavku, ne treba promatrati.

I druga nejednakost, $b < a + 100$, zadovoljena je za svaki $a \in \mathbb{N}$, jer je, prema uvjetu zadatka $b < 100$ pa je, u nastavku, ne treba promatrati.

Iz treće nejednakosti, $100 < a + b$, slijedi da je $b > 100 - a$.

Promatrajmo, redom, $a \in \mathbb{N}$ i odgovarajuće vrijednosti za b , $b < 100$. Najveći a koji promatramo je 98, u slučaju kada je $98 < 99 < 100$.

a	$b > a$	$b > 100 - a$	konačni uvjet	broj trokuta
1	$b > 1$	$b > 99$	$99 < b < 100$	0
2	$b > 2$	$b > 98$	$98 < b < 100$	1
3	$b > 3$	$b > 97$	$97 < b < 100$	2
4	$b > 4$	$b > 96$	$96 < b < 100$	3
...	...	...	...	...
49	$b > 49$	$b > 51$	$51 < b < 100$	48
50	$b > 50$	$b > 50$	$50 < b < 100$	49
51	$b > 51$	$b > 49$	$51 < b < 100$	48
52	$b > 52$	$b > 48$	$52 < b < 100$	47
53	$b > 53$	$b > 47$	$53 < b < 100$	46
...			...	...
97	$b > 97$	$b > 3$	$97 < b < 100$	2
98	$b > 98$	$b > 2$	$98 < b < 100$	1

Broj trokuta koji ispunjavaju uvjete zadatka je

$$1 + 2 + \dots + 48 + 49 + 48 + 47 + \dots + 1 = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 48) + 49 = 2401.$$

Drugo rješenje.

Neka su kao u prvom rješenju duljine stranica trokuta prirodni brojevi a , b , 100, pri čemu je $a < b < 100$, te zaključimo da vrijede nejednakosti trokuta:

$$a < b + 100$$

$$b < a + 100$$

$$100 < a + b$$

Ako je $b = 99$, onda mora vrijediti $a \in \{2, 3, \dots, 98\}$, odnosno imamo 97 trokuta.

Ako je $b = 98$, onda mora vrijediti $a \in \{3, 4, \dots, 97\}$, odnosno imamo 95 trokuta.

Ako je $b = 97$, onda mora vrijediti $a \in \{4, 5, \dots, 96\}$, odnosno imamo 93 trokuta.

Nastavimo li na isti način zaključivati, možemo uočiti da ako smanjimo b za 1, broj trokuta se smanjuje za 2.

Ako je $b = 52$, onda mora vrijediti $a \in \{49, 50, 51\}$, odnosno imamo 3 trokuta.

Ako je $b = 51$, onda mora vrijediti $a \in \{50\}$, odnosno imamo 1 trokut.

Za $b \leq 50$, nema trokuta koji zadovoljavaju uvjet $a < b$.

Ukupno imamo $1 + 3 + 5 + \dots + 93 + 95 + 97 = 49 \cdot 98 : 2 = 2401$ trokut.

2. U nizu od deset prirodnih brojeva treći i svaki sljedeći član niza jednak je zbroju dvaju prethodnih članova, a sedmi član niza je 184. Koliko ima takvih nizova? Za svaki od njih napiši prva dva člana i odredi zbroj svih deset članova niza.

Rješenje.

Neka su prva dva člana niza prirodni brojevi a i b . Svih deset članova možemo prikazati pomoću a i b :

$$F_1 = a, \quad F_2 = b, \quad F_3 = a + b, \quad F_4 = a + 2b, \quad F_5 = 2a + 3b,$$

$$F_6 = 3a + 5b, \quad F_7 = 5a + 8b, \quad F_8 = 8a + 13b, \quad F_9 = 13a + 21b, \quad F_{10} = 21a + 34b.$$

Označimo njihov zbroj sa Z . Vrijedi

$$\begin{aligned} Z &= a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + \\ &\quad (3a + 5b) + (5a + 8b) + (8a + 13b) + (13a + 21b) + (21a + 34b) \end{aligned}$$

$$Z = 55a + 88b$$

$$Z = 11 \cdot (5a + 8b)$$

Kako je sedmi član niza 184, tj. $5a + 8b = 184$, vrijednost zbroja Z je

$$Z = 11 \cdot 184$$

$$Z = 2024$$

Zbroj deset brojeva tog niza je 2024.

Promotrimo za koje je vrijednosti prirodnih brojeva a i b sedmi član tog niza jednak 184, odnosno za koje vrijednosti brojeva a i b je $5a + 8b = 184$.

Kako su pribrojnici $8b$ i 184 djeljivi s 8, pribrojnik $5a$ mora biti djeljiv s 8. Brojevi 5 i 8 su relativno prosti pa a mora biti djeljiv s 8.

Kako su a i b prirodni brojevi, pribrojnik $5a$ mora biti manji od 184, tj. $a < 36.8$.

a	$b = (184 - 5a) : 8$
8	18
16	13
24	8
32	3

Postoje četiri niza koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

1. niz: 8, 18, ...
2. niz: 16, 13, ...
3. niz: 24, 8, ...
4. niz: 32, 3, ...

3. Mario treba odabrati lozinku koja se sastoji od pet znakova među kojima trebaju biti tri znamenke i dva slova hrvatske abecede pri čemu **nisu** svi znakovi različiti. Koliko ima takvih lozinki?

Prvo rješenje.

Broj mogućih lozinki odredit ćemo tako da od broja svih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede oduzmemo broj takvih lozinki u kojima su svi znakovi različiti.

Lozinka se sastoji od pet znakova. Biraju se 3 znamenke iz skupa od 10 znamenaka te 2 slova hrvatske abecede iz skupa od 30 slova. Neka je Z oznaka za znamenku, a S oznaka za slovo u lozinki.

Odredimo najprije na koliko se pozicija u lozinki mogu rasporediti dva slova. Prvo slovo možemo rasporediti na jednu od 5 pozicija, a drugo slovo na jednu od preostale 4 pozicije. Kako u rasporedu pozicija, prije odabira slova, nije važno koje je prvo, a koje drugo slovo, broj načina $5 \cdot 4$ treba podijeliti s 2. Znamenkama, tada, popunjavamo slobodne pozicije.

Dakle, dva slova i tri znamenke mogu se u lozinki rasporediti na 10 načina.

(To su SSZZZ, SZSZZ, SZZSZ, SZZZS, ZSSZZ, ZSZSZ, ZSZZS, ZZSSZ, ZZSZS, ZZZSS.)

Odredimo broj svih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slova u lozinki smiju se ponavljati pa svako od njih možemo odabrati na 30 načina, tj. ukupno $30 \cdot 30$ načina
- znamenke u lozinki smiju se ponavljati pa svaku od njih možemo odabrati na 10, tj. ukupno $10 \cdot 10 \cdot 10$ načina.

Broj svih mogućih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede je $10 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000000$.

Odredimo broj takvih lozinki u kojima su svi znakovi različiti

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slova u lozinki moraju biti međusobno različita pa prvo slovo možemo odabrati na 30, a drugo na 29, ukupno $30 \cdot 29$ načina.
- znamenke u lozinki moraju biti međusobno različite pa prvu znamenku možemo odabrati na 10, drugu na 9, treću na 8, ukupno $10 \cdot 9 \cdot 8$ načina.

Broj lozinki u kojima su svi znakovi različiti je

$$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 6264000.$$

Prema tome, broj lozinki u kojima nisu svi znakovi različiti je

$$9000000 - 6264000 = 2736000.$$

Drugo rješenje.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su dva ista slova.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slovo koje se ponavlja u lozinki možemo odabrati na 30 načina
- tri znamenke biramo na $10 \cdot 10 \cdot 10$ načina

Broj lozinki u kojima su dva slova ista je $10 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 300\,000$.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su slova različita, a jedna znamenka se ponavlja točno dva puta.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- dva različita slova možemo odabrati na $30 \cdot 29$ načina
- znamenku u lozinki koja se ponavlja točno dva puta možemo odabrati na 10 načina, a preostalu znamenku na 9 načina
- tri su moguće pozicije na koje se može rasporediti znamenka koja se ne ponavlja

Broj lozinki u kojima su slova različita, a jedna znamenka se ponavlja točno dva puta je

$$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3 = 2\,349\,000.$$

Odredimo broj svih lozinki u kojima su slova različita, znamenka se ponavlja tri puta.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- dva različita slova možemo odabrati na $30 \cdot 29$ načina
- znamenku u lozinki koja se ponavlja tri puta možemo odabrati na 10 načina

Broj lozinki u kojima su slova različita, znamenka se ponavlja tri puta je

$$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 = 87\,000.$$

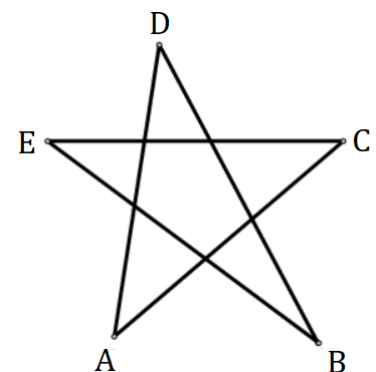
Prema tome, broj lozinki u kojima nisu svi znakovi različiti je

$$300\,000 + 2\,349\,000 + 87\,000 = 2\,736\,000.$$

4. Za lik na slici vrijedi

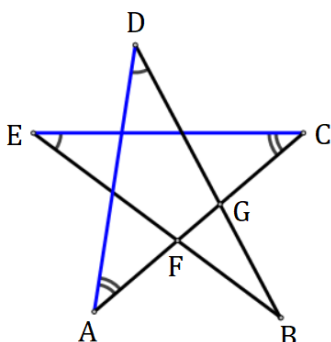
$$|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle ADB|, \quad |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ECA| \quad \text{i} \quad |CE| = |AD|.$$

Dokaži da je $|BD| = |BE|$.



Prvo rješenje.

Neka je točka F sjecište dužina $\overline{BE}$ i $\overline{AC}$, a točka G sjecište dužina $\overline{BD}$ i $\overline{AC}$.



Pokažimo da je $\triangle DAG \cong \triangle CEF$.

Kako je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle FEC$ i $\sphericalangle CAD = \sphericalangle GAD$ te $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADG$ i $\sphericalangle ECA = \sphericalangle ECF$, imamo (uvjeti zadatka):

$$\sphericalangle FEC \cong \sphericalangle ADG$$

$$\sphericalangle GAD \cong \sphericalangle ECF$$

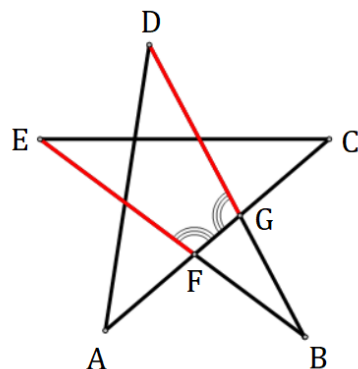
$$\overline{CE} \cong \overline{AD}$$

Stoga je $\triangle DAG \cong \triangle CEF$ (poučak KSK) pa je i $|EF| = |DG|$.

Pokažimo da je $\triangle BGF$ jednakokračan.

Trokut DAG i trokut CEF podudaraju se u kutovima uz stranice $\overline{CE}$ i $\overline{AD}$ pa se podudaraju i u trećem kutu, $\angle CFE \cong \angle DGA$.

Kutovi $\angle CFE$ i $\angle DGA$ su sukladni pa su sukladni i njihovi susjedni kutovi, $\angle BFG \cong \angle FGB$. To su kutovi uz stranicu $\overline{FG}$ pa je $\triangle BGF$ jednakokračan. Stoga je i $|BF| = |BG|$.



Dakle, pokazali smo da je $|EF| = |DG|$ i $|BF| = |BG|$.

Kako je $|BD| = |BG| + |GD|$ i $|BE| = |BF| + |FE|$, tada je $|BD| = |BE|$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Neka je točka H sjecište dužina $\overline{CE}$ i $\overline{AD}$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $|\angle CAH| = |\angle HCA|$, pa je $|AH| = |HC|$.

Budući da je $|CE| = |AD|$, slijedi $|CE| - |HC| = |AD| - |AH|$,

odnosno $|EH| = |HD|$.

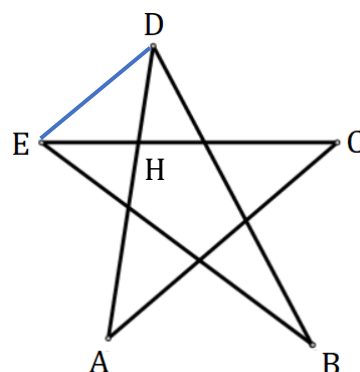
Dakle, trokut DEH je jednakokračan s osnovicom $\overline{DE}$, pa je $|\angle HED| = |\angle EDH|$.

Slijedi

$$|\angle HED| + |\angle BEH| = |\angle EDH| + |\angle HDB|,$$

odnosno $|\angle BED| = |\angle EDB|$. Zaključujemo da je trokut EBD jednakokračan s osnovicom $\overline{DE}$.

Dakle, vrijedi $|BD| = |BE|$, što je i trebalo dokazati.



5. Odredi sve parove prirodnih brojeva a i b za koje je

$$a \cdot b + 102 = 3 \cdot V(a, b) + 36 \cdot D(a, b).$$

$V(a, b)$ je najmanji zajednički višekratnik, a $D(a, b)$ najveći zajednički djelitelj brojeva a i b .

Prvo rješenje.

Uvedimo oznake $D(a, b) = D$ i $V(a, b) = V$.

$$a \cdot b + 102 = 3 \cdot V + 36 \cdot D$$

Kako je $a \cdot b = D \cdot V$, imamo

$$DV + 102 = 3V + 36D$$

$$DV - 36D = 3V - 102$$

$$D(V - 36) = 3V - 102$$

$$D = \frac{3V - 102}{V - 36} = \frac{3 \cdot (V - 36) + 6}{V - 36} = 3 \cdot \frac{V - 36}{V - 36} + \frac{6}{V - 36} = 3 + \frac{6}{V - 36}$$

Najveći zajednički djelitelj brojeva je prirodan broj pa $V - 36$ mora biti djelitelj broja 6.

$V - 36$	V	$D = 3 + \frac{6}{V - 36}$	D dijeli V i $D > 0$
1	37	9	nije rješenje
2	38	6	nije rješenje
3	39	5	nije rješenje
6	42	4	nije rješenje
-1	35	-3	nije rješenje
-2	34	0	nije rješenje
-3	33	1	1 dijeli 33
-6	30	2	2 dijeli 30

U slučaju kada je $D = 1$ i $V = 33$ imamo $a \cdot b = D \cdot V = 33$. Mogući parovi brojeva a i b su $\{1,33\}$, $\{3,11\}$.

U slučaju kada je $D = 2$ i $V = 30$ imamo $a \cdot b = D \cdot V = 60$. Mogući parovi brojeva a i b su $\{1,60\}$, $\{2,30\}$, $\{3,20\}$, $\{4,15\}$, $\{5,12\}$, $\{6,10\}$. Kako je $D = 2$, jedina rješenja su $\{2,30\}$ i $\{6,10\}$.

Konačno, parovi prirodnih brojeva a i b za koje je $a \cdot b + 102 = 3 \cdot V(a, b) + 36 \cdot D(a, b)$ su $\{1,33\}$, $\{3,11\}$, $\{2,30\}$ i $\{6,10\}$.

Napomena. Tvrdnja $a \cdot b = D \cdot V$ se dokazuje koristeći rastav na proste faktore. Ako je p bilo koji prost faktor brojeva a i b , onda postoje brojevi $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ takvi da je p^k potencija broja a , te p^ℓ potencija broja b u rastavu broja b na proste faktore. Manja od tih potencija je upravo potencija broja p u rastavu broja D , a veća je potencija broja p u rastavu broja V na proste faktore.

Drugo rješenje.

Uvedimo oznaku $D(a, b) = D$. Neka je $a = Da_1$ i $b = Db_1$, pri čemu prirodni brojevi a_1 i b_1 nemaju zajedničkih prostih faktora (relativno su prosti). Tada je $V(a, b) = Da_1b_1$.

U novim oznakama jednačba glasi

$$Da_1 \cdot Db_1 + 102 = 3Da_1b_1 + 36D.$$

Uočimo da svi pribrojnici, osim 102, imaju faktor D , pa slijedi da je D djelitelj broja 102.

Budući da je $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, slijedi da je $D \in \{1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102\}$.

Ako je $D = 1$, onda imamo jednačbu

$$a_1b_1 + 102 = 3a_1b_1 + 36,$$

odnosno

$$33 = a_1b_1.$$

Mogući parovi brojeva a i b su $\{1,33\}$, $\{3,11\}$.

Ako je $D = 2$, onda imamo jednačbu $4a_1b_1 + 102 = 6a_1b_1 + 72$, odnosno $15 = a_1b_1$.

Mogući parovi brojeva a i b su $\{2,30\}$, $\{6,10\}$.

Ako je $D = 3$, onda imamo jednačbu $6a_1b_1 + 102 = 9a_1b_1 + 108$, što je nemoguće.

Slično, u ostalim slučajevima dobivamo:

za $D = 6$ jednačbu $18a_1b_1 = 114$,

za $D = 17$ jednačbu $14a_1b_1 = 30$,

za $D = 34$ jednačbu $31a_1b_1 = 33$,

za $D = 51$ jednačbu $48a_1b_1 = 34$,

te za $D = 102$ jednačbu $99a_1b_1 = 35$, od kojih nijedna nema rješenja.