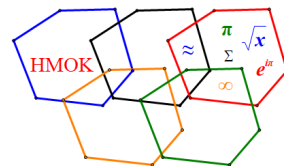


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 7. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Jaja

Baka Mara ima četiri koke. Prva koka snese po jedno jaje svakog dana. Druga koka snese po jedno jaje svakog drugog dana. Treća koka snese po jedno jaje svakog trećeg dana. Četvrta koka snese po jedno jaje svakog četvrtog dana. Ako su 1. siječnja 2023. godine sve četiri koke snijele po jedno jaje, koliko će ukupno jaja bakine koke snijeti tijekom cijele 2023. godine?

Rezultat: 762

Prvo rješenje.

Godina 2023. nije prijestupna pa ima 365 dana.

Prva koka, koja snese svaki dan jedno jaje, snijet će u cijeloj godini 365 jaja.

Podijelimo li 365 s 2, količnik je 182 i ostatak 1. To znači da u cijeloj godini ima 182 puta po dva dana i još jedan dan. Kako druga koka snese jaje svaki drugi dan, ona će u 364 dana snijeti ukupno $182 + 1 = 183$ jaja.

Kako je $365 : 3 = 121$ i ostatak 2, znači da u cijeloj godini ima 121 put po 3 dana i još dva dana pa će treća koka snijeti $121 + 1 = 122$ jaja.

Budući da je $365 : 4 = 91$ i ostatak 1, četvrta koka će snijeti $91 + 1 = 92$ jaja.

Sve četiri koke zajedno snijet će $365 + 183 + 122 + 92 = 762$ jaja.

Drugo rješenje.

2023. godina nije prijestupna pa ima 365 dana. Označimo u tablici kojim danima koja koka snese jaje.

Dani:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	...
1. koka	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
2. koka	+		+		+		+		+		+		+	
3. koka	+			+			+			+			+	
4. koka	+				+				+				+	

Kako se vidi iz tablice, trinaestog dana opet sve četiri koke snesu po jedno jaje. Nakon toga stupci tablice ponavljaju u ciklusima po 12 dana. U jednom ciklusu koke snesu $12 + 6 + 4 + 3 = 25$ jaja.

U prvih 360 dana 2023. godine ima $360 : 12 = 30$ punih ciklusa od po 12 dana.

U tih 360 dana koke snesu $30 \cdot 25 = 750$ jaja.

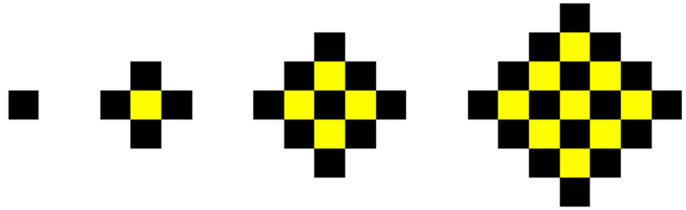
U posljednjih 5 dana 2023. godine koke snesu još $5 + 3 + 2 + 2 = 12$ jaja, kao u prvih 5 dana ciklusa.

To je ukupno $750 + 12 = 762$ jaja u cijeloj 2023. godini.

2. Kvadratići

Na slici su prikazana četiri lika sastavljena od crnih i žutih kvadratića.

Ako na isti način nastavimo crtati likove, od koliko će se ukupno crnih i žutih kvadratića sastojati jedanaesti lik u nizu?



Rezultat: 221

Prvo rješenje.

Središta gornjeg, donjeg, lijevog i desno kvadratića lika čine (zakrenut) kvadrat. Stoga možemo uočiti da je broj crnih kvadratića u likovima na slici redom $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$.

U jedanaestom liku je broj crnih kvadratića $11 \cdot 11 = 121$.

Na sličan način možemo uočiti da su žuti kvadratići u (zakrenutoj) kvadratnoj strukturi, pa je broj žutih kvadratića u likovima na slici redom $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$.

U jedanaestom liku je broj žutih kvadratića $10 \cdot 10 = 100$.

Prema tome, jedanaesti lik u niz sastoji se od ukupno $121 + 100 = 221$ crnih i žutih kvadratića.

Drugo rješenje.

Likovima na slici broj crnih i žutih kvadratića možemo izračunati na sljedeći način:

1. lik ima 1 kvadratić.

2. lik ima $1 + 4$ kvadratića.

3. lik ima $1 + 4 + 8 = 1 + 4 \cdot (1 + 2)$ kvadratića.

4. lik ima $1 + 4 + 8 + 12 = 1 + 4 \cdot (1 + 2 + 3)$ kvadratića.

Svaki idući lik nastaje tako da na prethodni lik dodajemo kvadratiće duž ruba. Za svaki idući lik dodajemo 4 kvadratića više nego u prethodnom koraku. Stoga se jedanaesti lik u niz sastoji od ukupno

$$1 + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10) = 1 + 4 \cdot 55 = 221$$

crnih i žutih kvadratića.

3. Gusari

Kapetan gusarskog broda dijeli zlatnike s trojicom svojih gusara na sljedeći način:

prvo dijeljenje:	jedan meni, po jedan svakome od vas
drugo dijeljenje:	dva meni, po jedan svakome od vas
treće dijeljenje:	tri meni, po jedan svakome od vas.

U svakom sljedećem dijeljenju kapetan sebi uzima jedan zlatnik više nego u prethodnom dijeljenju, a svakom od ostalih gusara daje po jedan zlatnik.

Koliko zlatnika više od ostalih gusara zajedno ima kapetan nakon 44 dijeljenja?

Rezultat: 858

Rješenje.

U svakom dijeljenju kapetan svakome od trojice gusara daje po jedan zlatnik, ukupno 3 zlatnika.

Trojica gusara nakon 44 dijeljenja zajedno imaju $44 \cdot 3 = 132$ zlatnika.

Kapetan u prvom dijeljenju uzima sebi jedan, u drugom dva, u trećem tri, ... i tako do 44. dijeljenja u kojem uzima sebi 44 zlatnika. Kapetan će nakon 44 dijeljenja imati

$$1 + 2 + 3 + \dots + 44 = (1 + 44) + (2 + 43) + \dots + (22 + 23) = 22 \cdot 45 = 990 \text{ zlatnika.}$$

Nakon 44 dijeljenja kapetan ima $990 - 132 = 858$ zlatnika više od svih svojih gusara zajedno.

4. Razlika najvećeg i najmanjeg

Kada u prazna polja na slici upišemo znamenke 1, 2, 3, 4 i 5, tako da svaku znamenku upišemo točno jednom, dobivamo matematički izraz u kojem se zbrajaju i množe prirodni brojevi.



Kolika je razlika između najveće moguće i najmanje moguće vrijednosti takvog izraza?

Rezultat: 182

Rješenje.

Brojevni izraz će biti manji ako je u dvoznamenkastim brojevima znamenka desetica manja od znamenke jedinica, te ako je jednoznamenkasti broj u umnošku što manji. Zato množimo brojem 1, a u dvoznamenkastim brojevima biramo za znamenku desetica 2 i 3, a za znamenku jedinica 4 i 5.

Najmanju moguću vrijednost možemo dobiti na više načina:

$$25 + 34 \cdot 1 = 24 + 35 \cdot 1 = 34 + 25 \cdot 1 = 35 + 24 \cdot 1 = 59.$$

Brojevni izraz će biti veći ako se množe veći brojevi i ako je u dvoznamenkastim brojevima znamenka desetica veća od znamenke jedinica.

Promotrimo gdje u izrazu $\square\square + \square\square \cdot \square$ treba biti znamenka 5 da bi rezultat bio najveći mogući.

Ona nije znamenka jedinica dvoznamenkastog broja. Također, nije ni znamenka desetica prvog dvoznamenkastog broja. Ako bi 5 bila znamenka desetica drugog dvoznamenkastog broja koji množimo jednoznamenkastim brojem, onda bi zamjenom tog jednoznamenkastog broja i znamenke 5 povećali rezultat. Na primjer, $52 \cdot 3 < 32 \cdot 5$. Zaključujemo da drugi dvoznamenkasti broj množimo brojem 5.

Sada promotrimo gdje treba biti znamenka 4. Ona je znamenka desetica jednog od dvoznamenkastih brojeva i to onog koje se množi brojem 5. Tako smo došli do: $\square\square + 4\square \cdot 5$.

Znamenka 3 je ili na prvom ili na zadnjem slobodnom mjestu, pa usporedimo vrijednosti izraza:

$$31 + 42 \cdot 5 = 31 + 210 = 241,$$

$$32 + 41 \cdot 5 = 32 + 205 = 237,$$

$$21 + 43 \cdot 5 = 21 + 215 = 236.$$

Najveća moguća vrijednost izraza je 241,

a razlika između najveće moguće i najmanje moguće vrijednosti

$$241 - 59 = 182.$$

5. Glazbena škola

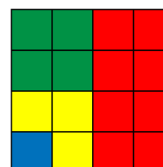
U nekoj glazbenoj školi svaki učenik svira točno jedan instrument: klavir, gitaru, trubu ili violinu. Polovina svih učenika svira klavir, a polovina od polovine svih učenika svira gitaru. Broj učenika koji sviraju trubu jednak je četvrtini broja učenika koji sviraju gitaru, a 72 učenika svira violinu. Koliko učenika ima glazbena škola?

Rezultat: 384

Rješenje.

Broj učenika možemo prikazati dijagramom u kojem cijeli kvadrat predstavlja sve učenike škole.

Polovinu učenika koji sviraju klavir označimo crvenom bojom.



■ klavir
■ gitara
■ truba
■ violina

One koji sviraju gitaru označimo zelenom bojom (to je polovina učenika koji ne sviraju klavir).

Preostali učenici sviraju trubu ili violinu. Njih ukupno ima jednako kao onih koji sviraju gitaru.

Kako učenika koji sviraju trubu ima četiri puta manje od onih koji sviraju gitaru, možemo označiti plavom bojom odgovarajući dio kvadrata. Preostale učenike, a to su oni koji sviraju violinu označimo žutom bojom.

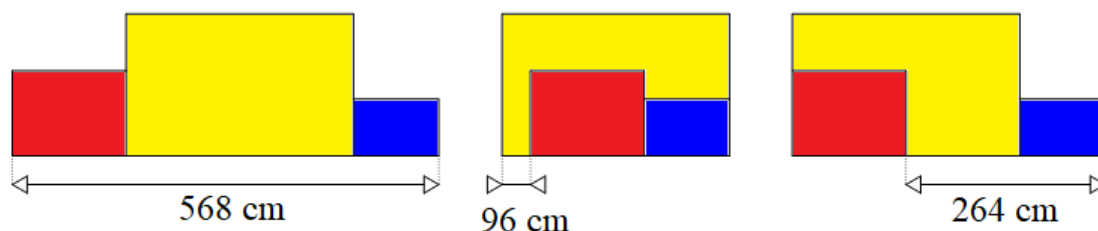
Sada je jasno da učenika koji sviraju violinu ima tri puta više od onih koji sviraju trubu.

Trubu svira $72 : 3 = 24$ učenika, trubu ili violinu njih $24 + 72 = 96$, a isto toliko ih svira gitaru. Klavir svira dvostruko više, 192 učenika. Glazbena škola ima ukupno $2 \cdot 192 = 384$ učenika.

Do tog smo rezultata mogli doći i množenjem $16 \cdot 24 = 384$ jer svaki mali kvadratić predstavlja 24 učenika.

6. Tri papira

Tri lista papira u boji najprije su postavljena jedan pored drugoga (prva slika).



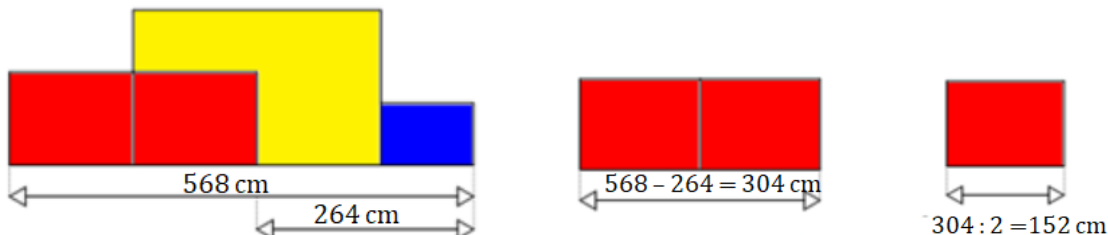
Zatim su crveni i plavi papir postavljeni ispred žutog papira (druga slika). Na kraju je crveni papir pomaknut do ruba žutog papira, a plavi je papir vraćen u početni položaj (treća slika).

Koliki je zbroj duljina žutog i crvenog papira u centimetrima?

Rezultat: 484

Rješenje.

Spojimo li prvu i treću sliku dobit ćemo informaciju o duljini crvenog papira kao što je prikazano na slici. Dva crvena papira imaju duljinu $568 - 264 = 304$ cm, a jedan $304 : 2 = 152$ cm.



Iz prve (ili treće) slike možemo zaključiti da je zbroj duljina žutog i plavog papira $568 - 152 = 416$ cm. Na temelju druge slike zaključujemo da razlika duljina žutog i plavog papira iznosi $96 + 152 = 248$ cm.

Na sličan kao što smo izračunali duljinu crvenog papira računamo duljinu plavog. Nacrtamo li sliku na kojoj su dva plava papira, jedan kraj žutog papira, a drugi ispred žutog papira, možemo zaključiti da dva plava papira imaju duljinu $416 - 248 = 168$ cm, a jedan plavi papir ima duljinu $168 : 2 = 84$ cm.

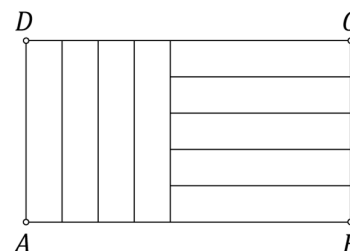
Žuti papir ima duljinu $416 - 84 = 332$ cm, a zbroj duljina žutog i crvenog papira iznosi $332 + 152 = 484$ cm.

7. Opseg pravokutnika

Pravokutnik $ABCD$ sastavljen je od devet jednakih pravokutnika. Opseg svakog od tih devet pravokutnika je 204 cm.

Izračunaj opseg pravokutnika $ABCD$ u centimetrima.

Rezultat: 476



Rješenje.

Dulja stranica svakog od tih devet pravokutnika pet je puta dulja od kraće stranice. Podijelimo li opseg jednog od njih s 12, dobivamo duljinu kraće stranice svakog od tih devet pravokutnika.

Kraća stranica ima duljinu $204 : 12 = 17$ cm i pojavljuje se:

- u stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ pravokutnika $ABCD$ ukupno $5 + 5$, tj. 10 puta,
- u stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ pravokutnika $ABCD$ ukupno $9 + 9$, tj. 18 puta.

Kraća stranica duljine 17 cm pojavljuje se u opsegu pravokutnika $ABCD$ ukupno $10 + 18$, tj. 28 puta.

Opseg pravokutnika $ABCD$ je $28 \cdot 17$, tj. 476 cm.



8. Lokot

Marko se ne može sjetiti šifre koja se sastoji od triju znamenaka od 0 do 9. Sjeća se da su neke dvije znamenke jednake, a preostala znamenka različita od njih. Također se sjeća da su ili sve tri znamenke parne ili sve tri neparne. Koliko ima različitih mogućnosti Markove zaboravljene šifre? Nula je parna znamenka.

Rezultat: 120

Rješenje.

S obzirom na to koje su dvije znamenke jednake razlikujemo 3 slučaja:

$\overline{aab}$, $\overline{aba}$ i $\overline{baa}$ pri čemu je $a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a \neq b$.

Promotrimo prvi slučaj, $\overline{aab}$. Ako su sve znamenke parne, znamenka a može biti 0, 2, 4, 6 ili 8, što znači da ima 5 mogućnosti. Za svaku od tih mogućnosti, znamenka b može se odabrati na 4 načina jer može biti bilo koja osim one koja je odabrana za znamenku a . To je ukupno $5 \cdot 4 = 20$ mogućnosti za prvi slučaj.

Za drugi i treći slučaj, $\overline{aba}$ i $\overline{baa}$, također će biti po 20 mogućnosti u slučaju parnih znamenaka. Dakle, za parne znamenke ukupno je $3 \cdot 20 = 60$ mogućnosti.

Za neparne znamenke, na analogan način, dobiva se također 60 mogućnosti, što znači da je ukupno 120 mogućnosti za šifru lokota.

9. Megakocka

Od jednakih je kockica složena jedna velika kocka. Duljina brida velike kocke sto puta je veća od duljine brida svake kockice. Velika kocka položena je na stol i sve su njezine strane, osim one koja dodiruje stol, obojene crvenom bojom. Koliko kockica ima točno dvije strane crvene boje?

Rezultat: 788

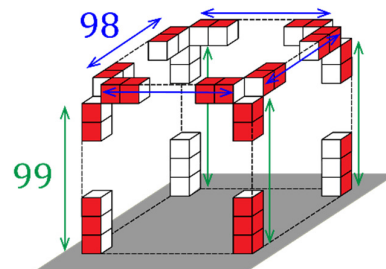
Rješenje.

Uzduž svakog od 4 brida gornje plohe kocke ima 98 kockica s dvjema crvenim stranama.

Uzduž svakog od 4 bočna brida kocke ima 99 kockica s dvjema crvenim stranama.

Broj kockica s točno dvije strane crvene boje iznosi

$$4 \cdot 98 + 4 \cdot 99 = 392 + 396 = 788.$$



10. Raspodjela eura

Ana, Janko i Tara imaju određene iznose eura i žele ih međusobno drugačije podijeliti. Najprije Ana daje Janku i Tari dio svog novca tako da nakon toga i Janko i Tara imaju dvostruko više novca nego prije. Potom Janko daje Ani i Tari dio svog novca tako da nakon toga i Ana i Tara imaju dvostruko više novca nego prije. Na kraju, Tara daje Ani i Janku dio svog novca tako da nakon toga i Ana i Janko imaju dvostruko više novca nego prije. Ako Tara na početku i na kraju ima 73 eura, koliko eura imaju Ana, Janko i Tara zajedno?

Rezultat: 511

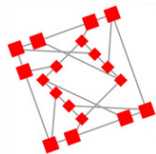
Rješenje.

Tara nakon prvog koraka ima 146 €, a nakon drugog koraka 292 €. Kako na kraju, nakon trećeg koraka, ima 73 €, dala je Ani i Janku $292 - 73 = 219$ €.

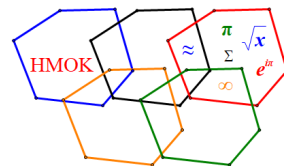
Iznosom od 219 € udvostručila je ukupan iznos koji su prije toga imali Ana i Janko.

Ana i Janko na kraju imaju $219 + 219 = 438$ €. Tara na kraju ima 73 €.

Ana, Janko i Tara zajedno imaju $438 + 73 = 511$ €.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

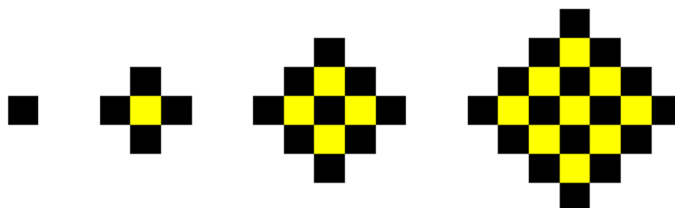
HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 7. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. Kvadratići

Na slici su prikazana četiri lika sastavljena od crnih i žutih kvadratića. Ako na isti način nastavimo crtati likove, od koliko se ukupno crnih i žutih kvadratića sastoji 22. lik u nizu?



Rezultat: 925

Prvo rješenje.

Broj crnih kvadratića u likovima ovog niza je redom 1, 4, 9, 16, ..., n^2 , ... odnosno broj crnih kvadratića odgovara kvadratu rednog broja lika u nizu. Stoga 22. lik u nizu ima $22^2 = 484$ crnih kvadratića.

Broj žutih kvadratića je: 0, 1, 4, 9, 16, ..., $(n-1)^2$, ... odnosno broj žutih kvadratića računa se tako da se redni broja lika u nizu umanji za 1 i taj broj kvadrira. Stoga 22. lik u nizu ima $(22-1)^2 = 441$ žutih kvadratića.

Prema tome, 22. lik u niz ima ukupno $484 + 441 = 925$ crnih i žutih kvadratića.

Drugo rješenje.

Likovima na slici broj crnih i žutih kvadratića možemo izračunati na sljedeći način:

1. lik ima 1 kvadratić.

2. lik ima $1 + 4$ kvadratića.

3. lik ima $1 + 4 + 8 = 1 + 4 \cdot (1 + 2)$ kvadratića.

4. lik ima $1 + 4 + 8 + 12 = 1 + 4 \cdot (1 + 2 + 3)$ kvadratića.

Svaki idući lik nastaje tako da na prethodni lik dodajemo kvadratiće duž ruba. Za svaki idući lik dodajemo 4 kvadratića više nego u prethodnom koraku. Zaključujemo da n -ti lik ima za $4 \cdot (n-1)$ kvadratića više nego prethodni.

Stoga ukupan broj kvadratića 22. lika iznosi

$$1 + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 21) = 1 + 4 \cdot 22 \cdot 21 : 2 = 925.$$

2. Megakocka

Od jednakih je kockica složena jedna velika kocka. Duljina je brida velike kocke sto puta veća od duljine brida svake kockice. Velika kocka položena je na stol i sve su njezine strane, osim one koja dodiruje stol, obojene crvenom bojom. Koliko kockica ima točno dvije strane crvene boje?

Rezultat: 788

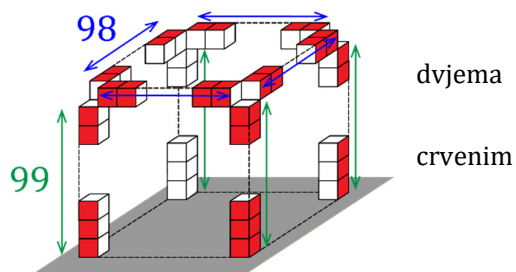
Rješenje.

Uzduž svakog od 4 brida gornje plohe kocke ima 98 kockica s crvenim stranama.

Uzduž svakog od 4 bočna brida kocke ima 99 kockica s dvjema stranama.

Broj kockica s točno dvije strane crvene boje iznosi

$$4 \cdot 98 + 4 \cdot 99 = 392 + 396 = 788.$$



3. Koliko ih je?

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je zbroj dviju znamenaka dvostruko veći od treće?

Rezultat: 121

Prvo rješenje.

Traženo svojstvo imaju svi troznamenkasti brojevi sa svim jednakim znamenkama, a ima ih 9 (preciznije, to su 111, 222, 333, ..., 888, 999).

Promotrimo sada sve kombinacije od tri različita znamenke bez obzira na njihov poredak, prema uvjetu zadatka. Kako bismo bili sigurni da ćemo ispisati sve mogućnosti, zapisat ćemo ih u rastućem redoslijedu, prema razlici između znamenaka.

Razlika između znamenaka	Kombinacije	Broj kombinacija
1	012, 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789	8
2	024, 135, 246, 357, 468, 579	6
3	036, 147, 258, 369	4
4	048, 159	2

Kombinacija s rastućim redoslijedom znamenki ima $8 + 6 + 4 + 2 = 20$.

U 16 kombinacija nema znamenke 0, te odabirom poretka za svaku kombinaciju dobijemo 6 brojeva (npr. 123, 132, 213, 231, 312 i 321). Za preostale 4 kombinacije u kojima se pojavljuje znamenka 0 postoje samo 4 mogućnosti, jer znamenka stotica ne može biti 0 (npr. 102, 120, 201 i 210, ali ne 012 i 021).

Ukupan broj takvih brojeva s različitim znamenkama je $16 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 96 + 16 = 112$.

Traženih je brojeva $9 + 112 = 121$.

Drugo rješenje.

Znamenke koje u zbroju daju dvostruku vrijednost treće znamenke moraju biti ili obje parne ili obje neparne. Treću znamenku dobivamo zbrajanjem znamenaka u paru i dijeljenjem zbroja s 2.

Prvi slučaj. Objе znamenke koje zbrajamo su parne. Mogući parovi znamenki su:

$\{0, 2\}, \{0, 4\}, \{0, 6\}, \{0, 8\}, \{2, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 4\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 6\}, \{6, 8\}$ i $\{8, 8\}$.

Za parove u kojima je jedna znamenka 0 postoje 4 broja određena tim znamenkama ($\overline{ab0}, \overline{ba0}, \overline{a0b}, \overline{b0a}$).

Za parove u kojima su obje znamenke različite od 0 i međusobno različite postoji 6 brojeva određenih tim znamenkama ($\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$).

Za parove u kojima su obje znamenke međusobno jednake treća znamenka je iste vrijednosti pa postoje 4 takva broja (222, 444, 666 i 888).

Prema tome, troznamenkastih brojeva sa zadanim uvjetom u ovom slučaju ima: $4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 4 = 56$.

Drugi slučaj. Objе znamenke koje zbrajamo su neparne. Mogući parovi znamenki su:

$\{1, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{3, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{5, 5\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{7, 7\}, \{7, 9\}$ i $\{9, 9\}$.

Za sve parove u kojima su obje znamenke međusobno različite postoji 6 brojeva određenih tim znamenkama ($\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$).

Za parove u kojima su obje znamenke međusobno jednake treća znamenka je iste vrijednosti pa postoji 5 takvih brojeva (111, 333, 555, 777 i 999).

Prema tome, troznamenkastih brojeva sa zadanim uvjetom u ovom slučaju ima: $10 \cdot 6 + 5 = 65$.

Troznamenkastih brojeva sa zadanim uvjetom ima ukupno $56 + 65 = 121$.

Treće rješenje.

Neka su a, b i c znamenke za koje vrijedi $a \leq b \leq c$. Tada mora vrijediti $a + c = 2b$.

Promotrimo sve mogućnosti za pojedine $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Primjerice, za $b = 3$, jednakost $a + c = 6$ zadovoljavaju parovi $\{3, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}$ i $\{0, 6\}$,

što znači da broj može imati znamenke: $\{3, 3, 3\}$ ili $\{2, 3, 4\}$ ili $\{1, 3, 5\}$ ili $\{0, 3, 6\}$.

Ako su znamenke različite i različite od 0, onda postoji 6 troznamenkastih brojeva s tim znamenkama. Ako je jedna znamenka 0, onda postoje 4 takva broja, jer 0 ne može biti znamenka stotica. Ako su sve znamenke jednake, samo je jedan takav broj.

b	mogućnosti za $a + c$	jednake	bez nule	s nulom	ukupan broj mogućnosti
1	$1+1, 0+2$	1		1	$1 + 4 = 5$
2	$2+2, 1+3, 0+4$	1	1	1	$1+6+4 = 11$
3	$3+3, 2+4, 1+5, 0+6$	1	2	1	$1 + 2 \cdot 6 + 4 = 17$
4	$4+4, 3+5, 2+6, 1+7, 0+8$	1	3	1	$1 + 3 \cdot 6 + 4 = 23$
5	$5+5, 4+6, 3+7, 2+8, 1+9$	1	4		$1 + 4 \cdot 6 = 25$
6	$6+6, 5+7, 4+8, 3+9$	1	3		$1 + 3 \cdot 6 = 19$
7	$7+7, 6+8, 5+9$	1	2		$1 + 2 \cdot 6 = 13$
8	$8+8, 7+9$	1	1		$1 + 6 = 7$
9	$9+9$	1			1

Ukupan broj je $5 + 11 + 17 + 23 + 25 + 19 + 13 + 7 + 1 = 121$.

4. Pas i lisica

Pas ugleda lisicu koja je od njega udaljena 123 metra i pojuri za njom. Lisica bježi pred psom, a oboje se kreću po istom pravcu. Svaki pseći skok ima duljinu 2 metra, a svaki skok lisice 1 metar. Dok pas skoči dvaput, lisica to učini triput. Na kojoj udaljenosti od svog polazišta pas stiže lisicu?

Rezultat: 492

Prvo rješenje.

Za svaka dva skoka od 2 metra pas skoči 4 metra, a u istom vremenu sa tri skoka lisica skoči 3 metra i pri tome se razmak između njih smanji za 1 metar.

Dok pas 123 puta skoči po 2 skoka i napravi $123 \cdot 2 \cdot 2 = 492$ m, lisica će u istom vremenu skočiti 123 puta po 3 skoka i napraviti $123 \cdot 3 \cdot 1 = 369$ m.

Kako je lisica bila u prednosti pred psom 123 metra pas će stići lisicu na udaljenosti od 492 metra od polazišta.

Drugo rješenje.

U tablici su prikazani razmaci između psa i lisice nakon određenog broja intervala. U svakom intervalu pas skoči dvaput (i prijeđe 4 metra), a lisica skoči triput (i prijeđe 3 metra):

broj intervala	udaljenost (m)
0	123
1	$123 + 3 - 4 = 122$
2	$122 + 3 - 4 = 121$
3	$121 + 3 - 4 = 120$
...	...
123	$1 + 3 - 4 = 0$

U 123 intervala pas je prošao $123 \cdot 2 \cdot 2 = 492$ m, a lisica $123 \cdot 3 \cdot 1 = 369$ m.

Kako je lisica bila u prednosti pred psom 123 metra pas će stići lisicu na udaljenosti od 492 metra od polazišta.

5. Dijeljenje s ostatkom

Odredi zbroj svih prirodnih brojeva čiji je količnik pri dijeljenju brojem 7 manji od ostatka.

Rezultat: 336

Rješenje.

Neka je n prirodni broj koji pri dijeljenju sa 7 daje količnik k i ostatak o . Pri dijeljenju sa 7 vrijedi da je ostatak $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ pa je $n = 7k + o$, $k < o < 7$. Mogućnosti možemo prikazati tablicom:

k	o	$n = 7k + o$
0	1	1
0	2	2
0	3	3
0	4	4
0	5	5
0	6	6
1	2	9
1	3	10
1	4	11
1	5	12
1	6	13

k	o	$n = 7k + o$
2	3	17
2	4	18
2	5	19
2	6	20
3	4	25
3	5	26
3	6	27
4	5	33
4	6	34
5	6	41

Zbroj svih brojeva iznosi $21 + 55 + 74 + 78 + 67 + 41 = 336$.

6. Troznamenkasti broj

Odredi najveći troznamenkasti broj koji je 21 put veći od umnoška svojih znamenaka.

Rezultat: 315

Rješenje.

Za troznamenkasti broj $\overline{abc}$ mora vrijediti: $100a + 10b + c = 21abc$.

Umnožak znamenaka abc pomnožen brojem 21 je troznamenkasti broj pa mora biti

$$5 \leq abc \leq 47.$$

Mogući umnošci abc triju znamenaka su samo:

$$\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45\}$$

jer brojeve koji imaju dvoznamenkast prost faktor možemo eliminirati.

Odgovarajući brojevi $21abc$ su

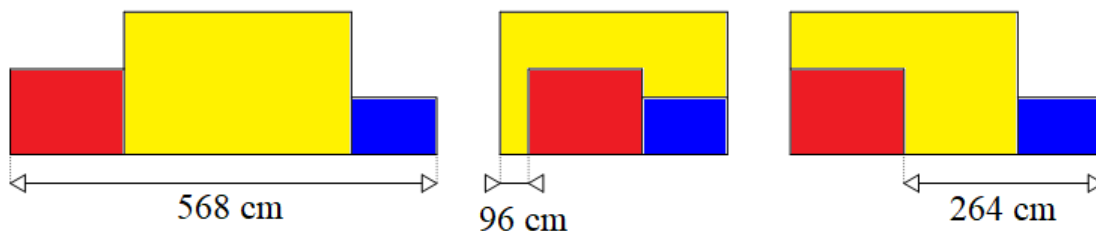
$105 = 21 \cdot 5$	$126 = 21 \cdot 6$	$147 = 21 \cdot 7$	$168 = 21 \cdot 8$
$189 = 21 \cdot 9$	$210 = 21 \cdot 10$	$252 = 21 \cdot 12$	$294 = 21 \cdot 14$
$315 = 21 \cdot 15$	$336 = 21 \cdot 16$	$378 = 21 \cdot 18$	$420 = 21 \cdot 20$
$441 = 21 \cdot 21$	$504 = 21 \cdot 24$	$525 = 21 \cdot 25$	$567 = 21 \cdot 27$
$588 = 21 \cdot 28$	$630 = 21 \cdot 30$	$672 = 21 \cdot 32$	$735 = 21 \cdot 35$
$756 = 21 \cdot 36$	$840 = 21 \cdot 40$	$882 = 21 \cdot 42$	$945 = 21 \cdot 45$

Sada direktno provjeravamo u kojim slučajevima je umnožak znamenaka troznamenkastog broja na lijevoj strani jednakosti jednak drugom faktoru na desnoj strani. Mnogi se slučajevi mogu eliminirati jer npr. nijedna znamenka ne može biti 0.

Jedino u trećem slučaju taj je uvjet ispunjen, jer je $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$. Zato je traženi broj 315.

7. Tri papira

Tri lista papira u boji najprije su postavljena jedan pored drugoga (prva slika).



Zatim su crveni i plavi papir postavljeni jedan do drugog, a ispred žutog papira (druga slika). Na kraju je crveni papir pomaknut do ruba žutog papira, a plavi je papir vraćen u početni položaj (treća slika).

Koliki je zbroj duljina žutog i crvenog papira u centimetrima?

Rezultat: 484

Prvo rješenje.

Označimo sa C, Ž i P redom duljine crvenog, žutog i plavog papira. Na temelju slika zaključujemo da vrijedi

$$C + \text{Ž} + P = 568,$$

$$\text{Ž} - C - P = 96,$$

$$\text{Ž} - C + P = 264.$$

Iz prve dvije jednađbe slijedi $2\check{Z} = 664$, $\check{Z} = 332$ cm.

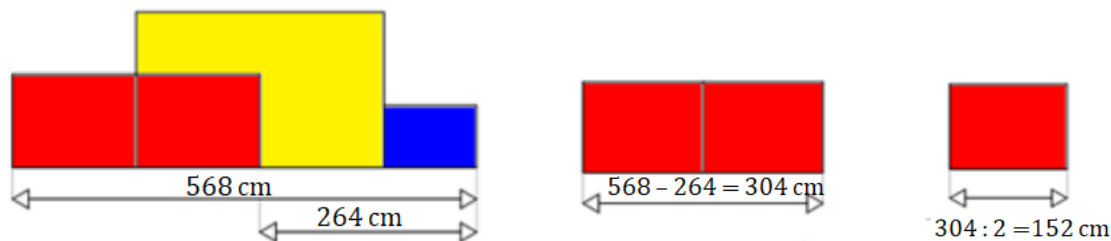
Iz druge dvije jednađbe slijedi $2\check{Z} - 2C = 360$, pa je $\check{Z} - C = 180$, te $C = 332 - 180 = 152$ cm.

Slijedi $P = 568 - 332 - 152 = 84$ cm.

Konačno, $\check{Z} + C = 332 + 152 = 484$ cm. Zbroj duljina žutog i crvenog papira je 484 cm.

Drugo rješenje.

Spojimo li prvu i treću sliku dobit ćemo informaciju o duljini crvenog papira kao što je prikazano na slici. Dva crvena papira imaju duljinu $568 - 264 = 304$ cm, a jedan $304 : 2 = 152$ cm.



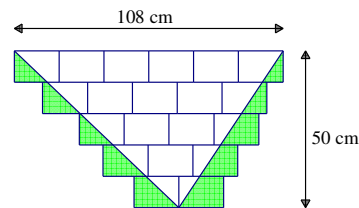
Iz prve (ili treće) slike možemo zaključiti da je zbroj duljina žutog i plavog papira $568 - 152 = 416$ cm. Na temelju druge slike zaključujemo da razlika duljina žutog i plavog papira iznosi $96 + 152 = 248$ cm.

Na sličan kao što smo izračunali duljinu crvenog papira računamo duljinu plavog. Nacrtamo li sliku na kojoj su dva plava papira, jedan kraj žutog papira, a drugi ispred žutog papira, možemo zaključiti da dva plava papira imaju duljinu $416 - 248 = 168$ cm, a jedan plavi papir ima duljinu $168 : 2 = 84$ cm.

Žuti papir ima duljinu $416 - 84 = 332$ cm, a zbroj duljina žutog i crvenog papira iznosi $332 + 152 = 484$ cm.

8. Osjenčana površina

Koliko kvadratnih centimetara iznosi osjenčana površina na slici ako su svi pravokutnici međusobno sukladni ?



Rezultat: 900

Prvo rješenje.

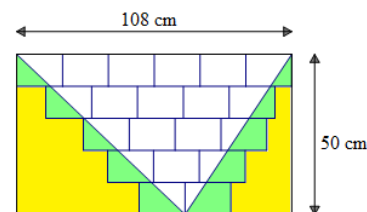
Nadopunimo lik na slici do pravokutnika i istaknimo nadopunu žutom bojom. Neobojani trokut je pola površine pravokutnika, onda je i obojani dio pola njegove površine, tj. 2700 cm^2 .

Dimenzije malih pravokutnika su $108 : 6 = 18$ cm i $50 : 5 = 10$ cm,

pa je površina svakog malog pravokutnika 180 cm^2 .

U svakom redu odozgo prema dolje po jedan je pravokutnik manje pa je površina žutog dijela jednaka površini $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ pravokutnika, odnosno 1800 cm^2 .

Zato je površina zelenog dijela $2700 - 1800 = 900 \text{ cm}^2$.



Drugo rješenje.

Dimenzija jednog pravokutnika je na slici je $(108 \text{ cm} : 6) \times (50 \text{ cm} : 5) = 18 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$.

Površina jednog pravokutnika je $P_1 = 18 \cdot 10 = 180 \text{ cm}^2$.

Površina svih 20 pravokutnika je $P_{20} = 20 \cdot P_1 = 20 \cdot 180 = 3600 \text{ cm}^2$.

Na crtežu uočimo bijeli trokut kojemu je osnovica duljine 108 cm, a duljina visine na osnovici je 50 cm.

Površina tog trokuta iznosi:

$$P_{\Delta} = \frac{108 \cdot 50}{2} = 54 \cdot 50 = 2700 \text{ cm}^2.$$

Površina zelenog dijela crteža jednaka je razlici površine 20 pravokutnika i površine trokuta, dakle:

$$3600 \text{ cm}^2 - 2700 \text{ cm}^2 = 900 \text{ cm}^2.$$

9. Raspodjela eura

Ana, Janko i Tara imaju određene iznose eura i žele ih međusobno drugačije podijeliti. Najprije Ana daje Janku i Tari dio svog novca tako da nakon toga i Janko i Tara imaju dvostruko više novca nego prije. Potom Janko daje Ani i Tari dio svog novca tako da nakon toga i Ana i Tara imaju dvostruko više novca nego prije. Na kraju, Tara daje Ani i Janku dio svog novca tako da nakon toga i Ana i Janko imaju dvostruko više novca nego prije. Ako Tara na početku i na kraju ima 73 eura, koliko eura imaju Ana, Janko i Tara zajedno?

Rezultat: 511

Rješenje.

Tara nakon prvog koraka ima 146 €, a nakon drugog koraka 292 €. Kako na kraju, nakon trećeg koraka, ima 73 €, dala je Ani i Janku $292 - 73 = 219$ €.

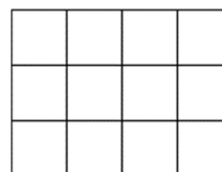
Iznosom od 219 € udvostručila je ukupan iznos koji su prije toga imali Ana i Janko.

Ana i Janko na kraju imaju $219 + 219 = 438$ €. Tara na kraju ima 73 €.

Ana, Janko i Tara zajedno imaju $438 + 73 = 511$ €.

10. Četiri boje

Svako od polja pravokutnika 4×3 , kao na slici, treba obojiti jednom od četiri boje. Na koliko je načina to moguće napraviti tako da bilo koja četiri polja sa zajedničkim vrhom budu obojena različitim bojama?



Rezultat: 120

Rješenje.

Označimo boje s a, b, c, d i fiksirajmo raspored boja u gornjem lijevom 2×2 kvadratu.

S obzirom da 4 različite boje možemo rasporediti na ta četiri polja na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina, na kraju ćemo dobiveni broj mogućnosti bojanja preostalih dijelova tablice pomnožiti s 24.

a	b		
c	d		

Pogledajmo na koji sve način možemo nastaviti s bojanjem do ispunjavanja 3×3 kvadrata.

Prva dva retka u trećem stupcu moraju sadržavati boje a i c , a treći redak mora započinjati bojama a i b .

To nas vodi na sljedeće tri mogućnosti:

1. slučaj

a	b	a	
c	d	c	
a	b		

2. slučaj

a	b	c	
c	d	a	
a	b		

3. slučaj

a	b	a	
c	d	c	
b	a		

U svakom od ova tri slučaja boja polja u trećem retku i trećem stupcu je jednoznačno određena uvjetima zadatka pa imamo:

1. slučaj

a	b	a	
c	d	c	
a	b	a	

2. slučaj

a	b	c	
c	d	a	
a	b	c	

3. slučaj

a	b	a	
c	d	c	
b	a	b	

Zadovoljavajući uvjete zadatka bojanje u 1. slučaju možemo završiti na dva načina.

a	b	a	b
c	d	c	d
a	b	a	b

a	b	a	d
c	d	c	b
a	b	a	d

U 2. slučaju bojanje možemo završiti također na dva načina.

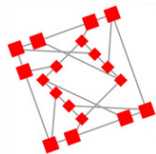
a	b	c	b
c	d	a	d
a	b	c	d

a	b	c	d
c	d	a	b
a	b	c	d

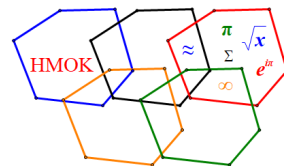
U 3. slučaju bojanje možemo završiti na jedan način.

a	b	a	b
c	d	c	d
b	a	b	a

Dakle, ukupan je broj bojanja $24 \cdot (2 + 2 + 1) = 120$.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

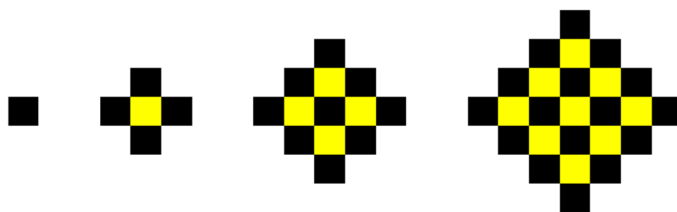
HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 7. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Kvadratići

Na slici su prikazana četiri lika sastavljena od crnih i žutih kvadratića. Ako na isti način nastavimo crtati likove, za koliko će se razlikovati broj svih crnih i broj svih žutih kvadratića u prvih 29 likova u nizu?



Rezultat: 841

Rješenje.

Proučimo koliko je crnih i žutih kvadratića u tim likovima:

redni broj lika	1.	2.	3.	4.		n		29.
broj crnih kvadratića	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	...	n^2	...	29^2
broj žutih kvadratića	$0 = 0^2$	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$		$(n-1)^2$		28^2

Ukupan broj crnih kvadratića prvih 29 likova je $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 29^2$,

a ukupan broj žutih kvadratića $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 28^2$.

Razlika ta dva broja je

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 28^2 + 29^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 28^2) = 29^2 = 841.$$

2. Megakocka

Od jednakih je kockica složena jedna velika kocka. Duljina brida velike kocke sto puta je veća od duljine brida svake kockice. Velika kocka položena je na stol i sve su njezine strane, osim one koja dodiruje stol, obojene crvenom bojom.

Koliko kockica ima točno dvije strane crvene boje?

Rezultat: 788

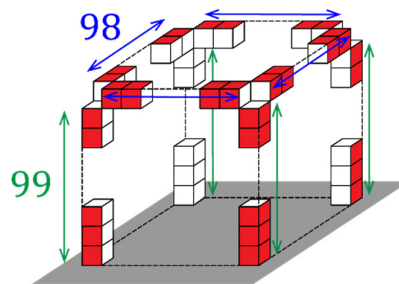
Rješenje.

Uzduž svakog od četiri brida gornje plohe kocke ima 98 kockica s dvjema crvenim stranama.

Uzduž svakog od četiri bočna brida kocke ima 99 kockica s dvjema crvenim stranama.

Broj kockica s točno dvije strane crvene boje iznosi

$$4 \cdot 98 + 4 \cdot 99 = 392 + 396 = 788.$$

**3. Gusari**

Kapetan gusarskog broda dijeli zlatnike s trinaesticom svojih gusara na sljedeći način:

prvo dijeljenje: jedan meni, po jedan svakome od vas

drugo dijeljenje: dva meni, po jedan svakome od vas

treće dijeljenje: tri meni, po jedan svakome od vas.

U svakom sljedećem dijeljenju kapetan sebi uzima jedan zlatnik više nego u prethodnom dijeljenju, a svakom od ostalih gusara daje po jedan zlatnik.

Koliko je dijeljenja potrebno da bi kapetan imao točno 187 500 zlatnika više nego svi njegovi gusari zajedno?

Rezultat: 625

Rješenje.

U n dijeljenja kapetan dobiva $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ zlatnika, a svaki gusar po n zlatnika.

Trebamo odrediti broj n za koji vrijedi $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 13n = 187\,500$.

Koristeći Gaussovu dosjetku dobivamo:

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} - 13n = 187\,500,$$

odakle sređivanjem slijedi

$$n \cdot (n + 1) - 26n = 375\,000,$$

$$n \cdot (n - 25) = 375\,000.$$

Broj 375 000 trebamo prikazati kao umnožak dva prirodna broja koja se razlikuju za 25.

Rastavimo na proste faktore $375\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^6 = 25 \cdot 25 \cdot (5^2 \cdot 2^3 \cdot 3)$.

Vidimo da je $375\,000 = 625 \cdot 600$, pa je rješenje dobivene jednadžbe je $n = 625$.

Potrebno je 625 dijeljenja da bi kapetan imao 187 500 zlatnika više nego svi njegovi gusari zajedno.

4. Dijeljenje s ostatkom

Odredi zbroj svih prirodnih brojeva čiji je količnik pri dijeljenju brojem 9 manji od ostatka.

Rezultat: 960

Rješenje.

Ostatak pri dijeljenju s 9 može biti 0, 1, 2, ..., 8, a količnik mora biti manji od ostatka. Zapišimo sve mogućnosti.

		količnik							
		0	1	2	3	4	5	6	7
ostatak	1	1							
	2	2	11						
	3	3	12	21					
	4	4	13	22	31				
	5	5	14	23	32	41			
	6	6	15	24	33	42	51		
	7	7	16	25	34	43	52	61	
	8	8	17	26	35	44	53	62	71
zbroj		36	98	141	165	170	156	123	71

Zbroj svih takvih brojeva je

$$36 + 98 + 141 + 165 + 170 + 156 + 123 + 71 = 960.$$

5. Cijeli brojevi

Neka su $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{1013}$ uzastopni cijeli brojevi, redom od najmanjeg do najvećeg. Ako vrijedi

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \dots - x_{1011} + x_{1012} - x_{1013} = 1013,$$

odredi apsolutnu vrijednost broja x_{1013} .

Rezultat: 507

Rješenje.

Od x_1 do x_{1012} imamo 1012 brojeva, odnosno 506 parova, pa jednakost iz zadatka možemo zapisati

$$(-x_1 + x_2) + (-x_3 + x_4) + \dots + (-x_{1011} + x_{1012}) - x_{1013} = 1013$$

Uzastopni cijeli brojevi razlikuju se za 1, pa vrijednost svake zagrade iznosi 1.

Ima 506 zagrada, pa vrijedi $506 - x_{1013} = 1013$.

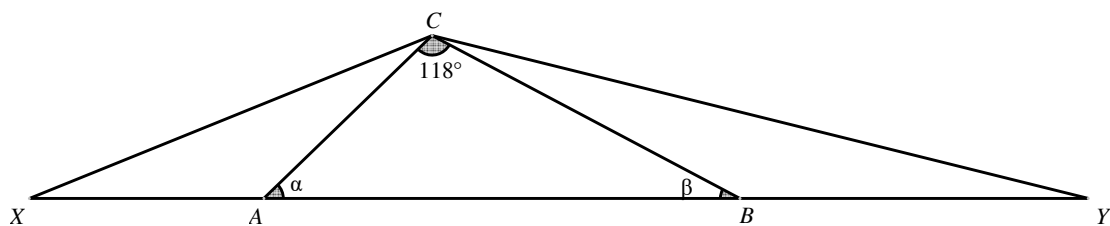
Stoga je $x_{1013} = -507$, odnosno $|x_{1013}| = 507$.

6. Trokut i kutovi

U trokutu ABC veličina najvećeg kuta iznosi 118° . Na produžetku najdulje stranice $\overline{AB}$ preko vrha A odabrana je točka X takva da je $|AX| = |AC|$, a na produžetku preko vrha B točka Y takva da je $|BY| = |BC|$. Kolika je veličina kuta $\angle XCY$ u kutnim stupnjevima?

Rezultat: 149

Rješenje. Označimo $\alpha = |\angle BAC|$, $\beta = |\angle CBA|$, $\gamma = |\angle ACB| = 118^\circ$



Iz uvjeta $|AC| = |AX|$ slijedi da je trokut $\triangle ACX$ jednakokratan pa je $|\angle AXC| = |\angle XCA|$

Kut α vanjski je kut trokuta $\triangle ACX$, pa vrijedi $\alpha = |\angle AXC| + |\angle XCA|$.

Stoga vrijedi $|\angle AXC| = |\angle XCA| = \frac{\alpha}{2}$.

Na isti se način pokaže da je $|\angle BCY| = |\angle CYB| = \frac{\beta}{2}$.

Zbroj kutova u trokutu je 180° , pa vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Iz toga slijedi $\alpha + \beta + 118^\circ = 180^\circ$, odnosno $\alpha + \beta = 62^\circ$.

Dijeljenjem s 2 dobivamo $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 31^\circ$.

Dakle, vrijedi

$$|\angle XCY| = |\angle XCA| + |\angle ACB| + |\angle BCY| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 31^\circ + 118^\circ = 149^\circ.$$

7. Osjenčana površina

Koliko kvadratnih centimetara iznosi osjenčana površina na slici ako su svi pravokutnici međusobno sukladni?

Rezultat: 900

Prvo rješenje.

Nadopunimo lik na slici do pravokutnika i istaknimo nadopunu žutom bojom. Nebojani trokut je pola površine pravokutnika, onda je i obojani dio pola njegove površine, tj. 2700 cm^2 .

Dimenzije malih pravokutnika su $108 : 6 = 18 \text{ cm}$ i $50 : 5 = 10 \text{ cm}$,

pa je površina svakog malog pravokutnika 180 cm^2 .

U svakom redu odozgo prema dolje po jedan je pravokutnik manje pa je površina žutog dijela jednaka površini $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ pravokutnika, odnosno 1800 cm^2 .

Zato je površina zelenog dijela $2700 - 1800 = 900 \text{ cm}^2$.

Drugo rješenje.

Dimenzija jednog pravokutnika je na slici je $(108 \text{ cm} : 6) \times (50 \text{ cm} : 5) = 18 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$.

Površina jednog pravokutnika je $P_1 = 18 \cdot 10 = 180 \text{ cm}^2$.

Površina svih 20 pravokutnika je $P_{20} = 20 \cdot P_1 = 20 \cdot 180 = 3600 \text{ cm}^2$.

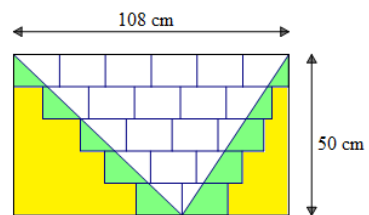
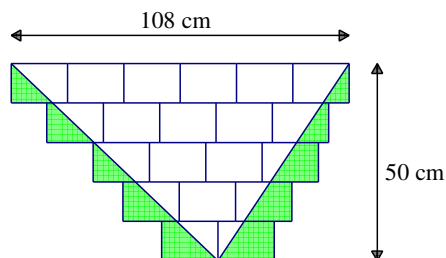
Na crtežu uočimo bijeli trokut kojemu je osnovica duljine 108 cm , a duljina visine na osnovici je 50 cm .

Površina tog trokuta iznosi:

$$P_A = \frac{108 \cdot 50}{2} = 54 \cdot 50 = 2700 \text{ cm}^2.$$

Površina zelenog dijela crteža jednaka je razlici površine 20 pravokutnika i površine trokuta, dakle:

$$3600 \text{ cm}^2 - 2700 \text{ cm}^2 = 900 \text{ cm}^2.$$



8. Razlika najvećeg i najmanjeg

Kada u prazna polja na slici upišemo pet međusobno različitih znamenaka od kojih nijedna nije 0, dobivamo izraz u kojem se zbrajaju i množe prirodni brojevi. Kolika je razlika najveće moguće i najmanje moguće vrijednosti takvog izraza?

$$\square\square + \square\square \cdot \square$$

Rezultat: 790

Rješenje.

Jasno je da ćemo najmanju moguću vrijednost postići sa znamenkama 1, 2, 3, 4 i 5, a najveću sa znamenkama 5, 6, 7, 8 i 9.

Brojevni izraz će biti manji ako je u dvoznamenkastim brojevima znamenka desetica manja od znamenke jedinica, te ako je jednoznamenkasti broj u umnošku što manji. Zato množimo brojem 1, a u dvoznamenkastim brojevima biramo za znamenku desetica 2 i 3, a za znamenku jedinica 4 i 5.

Najmanju moguću vrijednost možemo dobiti na više načina:

$$25 + 34 \cdot 1 = 24 + 35 \cdot 1 = 34 + 25 \cdot 1 = 35 + 24 \cdot 1 = 59.$$

Brojevni izraz će biti veći ako se množe veći brojevi i ako je u dvoznamenkastim brojevima znamenka desetica veća od znamenke jedinica.

Promotrimo gdje u izrazu $\square\square + \square\square \cdot \square$ treba biti znamenka 9 da bi rezultat bio najveći mogući.

Ona nije znamenka jedinica dvoznamenkastog broja. Također, nije ni znamenka desetica prvog dvoznamenkastog broja. Ako bi 9 bila znamenka desetica drugog dvoznamenkastog broja koji množimo jednoznamenkastim brojem, onda bi zamjenom tog jednoznamenkastog broja i znamenke 9 povećali rezultat. Na primjer, $97 \cdot 6 < 67 \cdot 9$. Zaključujemo da drugi dvoznamenkasti broj množimo brojem 9.

Sada promotrimo gdje treba biti znamenka 8. Ona mora biti znamenka desetica jednog od dvoznamenkastih brojeva i to onog koje se množi brojem 9. Tako smo došli do: $\square\square + 8\square \cdot 9$.

Znamenka 7 je ili na prvom ili na zadnjem slobodnom mjestu, pa usporedimo vrijednosti izraza:

$$76 + 85 \cdot 9 = 76 + 765 = 841,$$

$$75 + 86 \cdot 9 = 75 + 774 = 849,$$

$$65 + 87 \cdot 9 = 65 + 783 = 848.$$

Najveća moguća vrijednost izraza je 849,

a razlika između najveće moguće i najmanje moguće vrijednosti

$$849 - 59 = 790.$$

9. Kuglice

U kutiji se nalaze samo crvene i plave kuglice. Kad bi se iz kutije izvuklo pet crvenih kuglica, jedna sedmina preostalih kuglica u kutiji bila bi crvena. Kad bi se iz kutije umjesto pet crvenih izvuklo deset plavih kuglica, jedna petina preostalih kuglica u kutiji bila bi crvena. Koliko je ukupno kuglica u kutiji?

Rezultat: 110

Rješenje. Neka je c broj crvenih, a p broj plavih kuglica u kutiji.

Kad bi se iz kutije izvuklo pet crvenih kuglica, jedna sedmina preostalih kuglica u kutiji bila bi crvena. To znači da bi broj plavih kuglica p bio šest puta veći od broja crvenih kuglica $c - 5$, tj. vrijedi

$$p = 6 \cdot (c - 5).$$

Kad bi se iz kutije umjesto pet crvenih izvuklo deset plavih kuglica, jedna petina preostalih kuglica u kutiji bila bi crvena. To znači da bi broj plavih kuglica $p - 10$ bio četiri puta veći od broja crvenih kuglica, tj. vrijedi

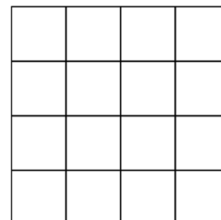
$$p - 10 = 4 \cdot c.$$

Iz $p = 6 \cdot (c - 5)$ i $p = 4 \cdot c + 10$ dobijemo $6 \cdot (c - 5) = 4 \cdot c + 10$, pa je $c = 20$, a $p = 90$.

U kutiji ima $20 + 90 = 110$ kuglica.

10. Četiri boje

Svako od polja kvadrata 4×4 , kao na slici, treba obojiti jednom od četiri boje. Na koliko je načina to moguće napraviti tako da bilo koja četiri polja sa zajedničkim vrhom budu obojena različitim bojama?



Rezultat: 168

Rješenje.

Označimo boje s a, b, c, d i fiksirajmo raspored boja u gornjem lijevom 2×2 kvadratu.

S obzirom da 4 različite boje možemo rasporediti na ta četiri polja na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina, na kraju ćemo dobiveni broj mogućnosti bojanja preostalih dijelova tablice pomnožiti s 24.

a	b		
c	d		

Pogledajmo na koji sve način možemo nastaviti s bojanjem do ispunjavanja 3×3 kvadrata.

Prva dva retka u trećem stupcu moraju sadržavati boje a i c , a treći redak mora započinjati bojama a i b .

To nas vodi na sljedeće tri mogućnosti:

1. slučaj

a	b	a	
c	d	c	
a	b		

2. slučaj

a	b	c	
c	d	a	
a	b		

3. slučaj

a	b	a	
c	d	c	
b	a		

U svakom od ova tri slučaja boja polja u trećem retku i trećem stupcu je jednoznačno određena uvjetima zadatka pa imamo:

1. slučaj

a	b	a	
c	d	c	
a	b	a	

2. slučaj

a	b	c	
c	d	a	
a	b	c	

3. slučaj

a	b	a	
c	d	c	
b	a	b	

Zadovoljavajući uvjete zadatka bojanje u 1. slučaju možemo završiti na tri načina.

a	b	a	b
c	d	c	d
a	b	a	b
c	d	c	d

a	b	a	b
c	d	c	d
a	b	a	b
d	c	d	c

a	b	a	d
c	d	c	b
a	b	a	d
c	d	c	b

U 2. slučaju bojanje možemo završiti na dva načina.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>

U 3. slučaju bojanje možemo završiti na dva načina.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c</i>

Dakle, ukupan je broj bojanja $24 \cdot (3 + 2 + 2) = 168$.