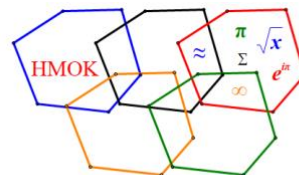


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

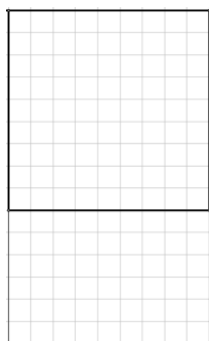
drugo kolo – četvrtak, 19. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Od pravokutnog lista papira dimenzija 54 cm i 15 cm Marko odreže najveći mogući kvadrat. Od ostatka papira ponovno odreže najveći mogući kvadrat i postupak nastavlja sve dok cijeli list ne izreže na kvadrate tj. dok preostali komad papira ne bude također kvadrat. Koliki je zbroj opsega svih tako dobivenih kvadrata?

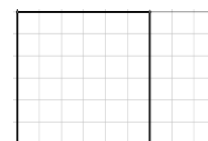
Rješenje.

Od pravokutnog papira dimenzija 54 cm i 15 cm Marko najprije reže tri kvadrata stranice duljine 15 cm.

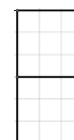


Nakon toga, od pravokutnog lista papira dimenzija $54 - 3 \cdot 15 = 9$, tj. 9 cm i 15 cm Marko reže jedan kvadrat sa stranicom duljine 9 cm.

Nakon toga, od pravokutnog lista papira dimenzija $15 - 9 = 6$, tj. 6 cm i 9 cm Marko reže jedan kvadrat sa stranicom duljine 6 cm.



Nakon toga, od pravokutnog lista papira dimenzija $9 - 6 = 3$, tj. 3 cm i 6 cm Marko reže dva kvadrata sa stranicom duljine 3 cm.



Zbroj opsega svih kvadrata iznosi $3 \cdot 60 + 36 + 24 + 2 \cdot 12 = 180 + 36 + 24 + 24 = 264$ cm.

2. U zaljevu su tri gusarska broda. Tijekom noći događaju se pljačke pa je prve noći trećina zlatnika s prvog broda prebačena na drugi brod. Druge noći je četvrtina zlatnika s drugog broda prebačena na treći brod, a treće je noći petina zlatnika s trećeg broda prebačena na prvi brod. Ujutro nakon treće pljačke na svakom je brodu točno 360 zlatnika. Koliko je zlatnika prije prve pljačke bilo na prvom brodu?

Rješenje.

Nakon sve tri pljačke na svakom je brodu po 360 zlatnika.

	Prvi brod	Drugi brod	Treći brod
Nakon tri pljačke	360	360	360

Kako je treće noći petina zlatnika s trećeg broda prebačena na prvi brod, na trećem brodu su ostale četiri petine zlatnika, što iznosi 360 zlatnika. Ako 360 zlatnika predstavlja četiri petine zlatnika s trećeg broda, znači da je jedna petina zlatnika s trećeg broda 90 zlatnika. Prije tog premještanja je na trećem brodu bilo $360 + 90 = 450$ zlatnika, a na prvom brodu $360 - 90 = 270$ zlatnika.

	Prvi brod	Drugi brod	Treći brod
Prije treće pljačke	270	360	450

Kako je druge noći četvrtina zlatnika s drugog broda prebačena na treći brod, na drugom je brodu prije toga bilo $360 + 360 : 3 = 3 \cdot 120 + 120 = 4 \cdot 120 = 480$ zlatnika. Na trećem je brodu prije toga bilo $450 - 120 = 330$ zlatnika.

	Prvi brod	Drugi brod	Treći brod
Prije druge pljačke	270	480	330

Kako je prve noći trećina zlatnika s prvog broda prebačena na drugi brod, na prvom je brodu prije toga bilo $270 + 270 : 2 = 2 \cdot 135 + 135 = 3 \cdot 135 = 405$ zlatnika. Na drugom je brodu prije toga bilo $480 - 135 = 345$ zlatnika.

	Prvi brod	Drugi brod	Treći brod
Prije prve pljačke	405	345	330

Na prvom je brodu, prije prve pljačke, bilo 405 zlatnika.

3. Sve karte za autobus na relaciji Rijeka-Zagreb koji kreće u 8 sati su prodane. Sjedala u autobusu označena su redom brojevima 1, 2, 3, i tako dalje do posljednjeg sjedala u autobusu. Greškom su za jedno sjedalo prodane dvije karte. Zbroj brojeva sjedala na svim prodanim kartama je 1219. Za koje su sjedalo prodane dvije karte?

Rješenje.

Najprije treba odrediti ukupan broj sjedala. Zbroj brojeva svih sjedala treba biti manji od 1219. Kako bismo procijenili broj sjedala zbrojimo prvih 50 brojeva:

$$1 + 2 + \dots + 49 + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + \dots + (25 + 26) = 25 \cdot 51 = 1275.$$

Taj je zbroj veći od 1219 pa zaključujemo da ima manje od 50 sjedala.

Zbroj prvih 48 brojeva iznosi

$$1 + 2 + \dots + 47 + 48 = (1 + 48) + (2 + 47) + \dots + (24 + 25) = 24 \cdot 49 = 1176.$$

Kad bi broj sjedala bio manji od 48, razlika broja 1219 i zbroja brojeva svih sjedala bila bi veća od najvećeg broja sjedala. Kad bi broj sjedala bio veći od 48, zbroj brojeva sjedala bi bio veći od 1219.

Dakle, u autobusu ima točno 48 sjedala. Zbroj brojeva sjedala na svim prodanim kartama, da nisu greškom prodane dvije karte za isto sjedalo, bio bi 1176.

Kako je $1219 - 1176 = 43$, greškom su prodane dvije karte za sjedalo 43.

4. Stotinu stolica složeno je ukrug i na njima redom pišu brojevi od 1 do 100. Ivica preskače prvih šest stolica i na sedmu stavlja bombon, zatim preskače sljedećih 6 i na stolicu s brojem 14 stavlja drugi bombon. Nastavlja tako i dalje ukrug, stavljajući po jedan bombon na svaku sedmu stolicu dok ne potroši 2023 bombona. Koji je broj stolice na koju je Ivica stavio posljednji bombon?

Prvo rješenje.

Ivica stavlja bombon na svaku sedmu stolicu. Budući da je $2023 \cdot 7 = 14\,161$, Ivica će 2023. bombon staviti na stolicu koja je 14 161. u nizu.

Kako je $14\,161 = 141 \cdot 100 + 61$, Ivica je 141 put obišao svih stotinu stolica te je posljednji bombon stavio na stolicu broj 61.

Drugo rješenje.

Ivica najprije stavlja bombone na stolice s brojevima 7, 14, 21, ..., 98 koji su višekratnici broja 7 i ima ih 14. Višekratnici broja 7 pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 0.

Nakon što stavi bombon na stolicu broj 98, sljedeći bombon stavlja na stolicu broj 5 pa 12 itd., tj. na stolice s brojevima koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 5. To su brojevi 5, 12, 19, ..., 96.

Nakon stolice broj 96, sljedeći bombon stavlja na stolicu broj 3 pa 10 itd. do broja 94, tj. na stolice s brojevima koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 3.

Nastavlja postupak i stavlja bombone:

- na stolice s brojevima 1, 8, ..., 99 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 1
- na stolice s brojevima 6, 13, ..., 97 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 6
- na stolice s brojevima 4, 11, ..., 95 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 4
- na stolice s brojevima 2, 9, ..., 100 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 2.

Time je Ivica potrošio prvih 100 bombona.

Zatim se ciklus ponavlja jer sljedeće bombone ponovno stavlja na stolice broj 7, 14 itd., kao na početku.

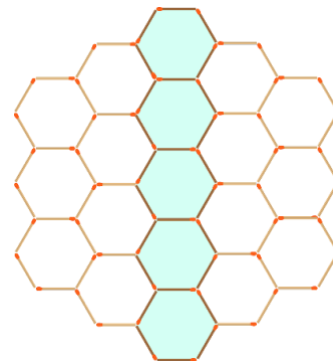
Svaki stoti bombon stavlja na stolicu broj 100 pa ponavlja ciklus, što znači da 2000. bombon stavlja na stolicu broj 100.

Treba odrediti na koju stolicu će staviti 23. bombon u ciklusu. Četrnaesti bombon stavio je na stolicu broj 98 pa treba odrediti deveti broj u nizu brojeva koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 5, a to je broj 61.

Ivica je posljednji bombon stavio na stolicu broj 61.

5. Raspoređivanjem šibica u šesterokutnu mrežu učenici slažu likove zvane *heks*. Na slici je prikazan heks koji na sredini ima pet šesterokuta (istaknutih na slici). Šibice se prodaju u kutijama koje sadrže po 45 šibica, a cijena jedne kutije je 1 euro i 25 centi.

Koliki je najmanji iznos koji učenici moraju potrošiti kako bi kupili dovoljno šibica za oblikovanje heksa koji na sredini ima 13 šesterokuta?



Prvo rješenje.

Možemo uočiti da su sve šibice raspoređene u tri smjera. Prebrojimo najprije vodoravne šibice.

Uočimo da su šesterokuti složeni u stupce, pri čemu je broj stupaca jednak broju šesterokuta u srednjem stupcu. U srednjem stupcu nalazi se 13 šesterokuta za koje je upotrijebljeno 14 vodoravnih šibica. U stupcima lijevo i desno od njega je po 12 šesterokuta za koje je upotrijebljeno po 13 vodoravnih šibica. Kako ima ukupno 13 stupaca, broj vodoravnih šibica je

$$14 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 140.$$

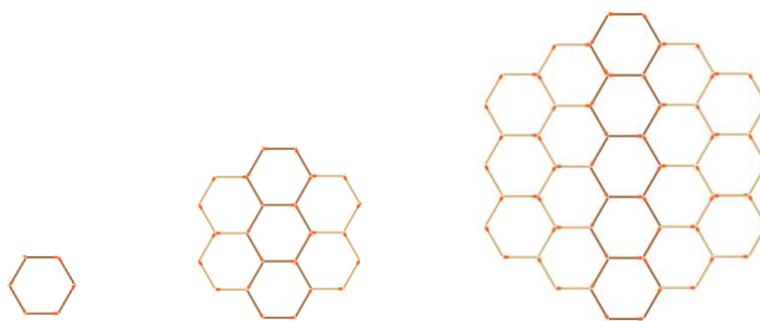
U svakom smjeru od tri smjera je jednak broj šibica, što znači da je ukupno $3 \cdot 140 = 420$ šibica.

U svakoj je kutiji 45 šibica, $420 : 45 = 9$ i ostatak 15, pa trebaju najmanje 10 kutija šibica.

Cijena jedne kutije je 1 euro i 25 centi pa će za 10 kutija potrošiti 12 eura i 50 centi.

Drugo rješenje.

Prva tri heksa su prikazana na slici.



Prvi heks na sredini ima 1 šesterokut, drugi ima 3 šesterokuta, a treći 5 šesterokuta.

Uočimo da je $1 = 2 \cdot 1 - 1$, $3 = 2 \cdot 2 - 1$, $5 = 2 \cdot 3 - 1$.

Niz možemo nastaviti tako da svaki sljedeći heks ima 2 šesterokuta više na sredini.

Heks koji ima 13 šesterokuta na sredini je sedmi u nizu jer je $13 = 2 \cdot 7 - 1$.

Uočimo da svaki sljedeći heks nastaje od prethodnog tako da dodamo novi „prsten“ šesterokuta od šibica.

Prvi heks se sastoji od jednog šesterokuta, drugi od $1 + 6 = 7$ šesterokuta, a treći od $1 + 6 + 12 = 19$ šesterokuta. Svaki sljedeći prsten ima 6 šesterokuta više od prethodnog, pa prstenovi imaju redom 1, 6, 12, 18, 24... šesterokuta.

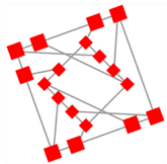
Sa slike vidimo da su za izgradnju prvog prstena oko središnjeg šesterokuta potrebne 24 nove šibice. Za izgradnju idućeg prstena potrebno je 42 šibice. Svaki idući prsten ima šest šesterokuta više od prethodnog, za svaki šesterokut je potrebno dodati tri šibice, te je za izgradnju tog prstena potrebno 18 šibica više.

Dakle, prstenovi imaju redom 6, 24, 42, 60,... šibica.

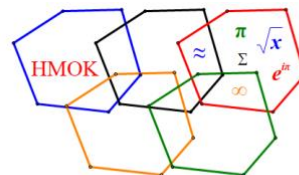
Ukupan broj šibica u sedmom heksu je $6 + 24 + 42 + 60 + 78 + 96 + 114 = 420$.

U svakoj je kutiji 45 šibica, $420 : 45 = 9$ i ostatak 15, pa trebaju najmanje 10 kutija šibica.

Cijena jedne kutije je 1 euro i 25 centi pa će za 10 kutija potrošiti 12 eura i 50 centi.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – četvrtak, 19. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. U akvariju oblika kvadra, duljine 75 cm, širine 28 cm i visine 40 cm, nalazi se voda do visine 25 cm. U akvarij uronimo kamen i voda se podigne za četvrtinu svoje visine. U akvarij potom stavimo i ribice koje zauzmu 1 % volumena akvarija. Dopuštena visina vode u akvariju mora biti za 10 % manja od visine akvarija kako ribice ne bi mogle iskočiti. Koliko litara vode još smijemo uliti u akvarij nakon što smo stavili kamen i ribice?

Prvo rješenje.

Ako u akvarij uronimo kamen voda se podigne za četvrtinu svoje visine tj. za $25 : 4 = 6.25$ cm pa je nova visina vode 31.25 cm.

Ako ribice zauzimaju 1 % volumena akvarija onda po visini zauzmu 100-ti dio od 40 cm ili 0.4 cm.

Nakon što su u akvarij položene i kamen i ribice visina vode doseže $31.25 + 0.4 = 31.65$ cm.

10 % visine akvarija iznosi $0.1 \cdot 40 = 4$ cm pa je maksimalna dopuštena visina vode u akvariju $40 - 4 = 36$ cm i do nje nedostaje $36 - 31.65 = 4.35$ cm.

Volumen vode koju smijemo uliti iznosi $V = a \cdot b \cdot c = 75 \cdot 28 \cdot 4.35 = 9135 \text{ cm}^3 = 9.135$ litara.

Drugo rješenje.

Označimo duljinu, širinu i visinu akvarija redom sa a , b , c , a visinu vode prije nego smo uronili kamen s h .

Volumen vode u akvariju iznosi $V_1 = a \cdot b \cdot h = 75 \cdot 28 \cdot 25 = 52\,500 \text{ cm}^3$.

Četvrtina visine vode iznosi $25 : 4 = 6.25$ cm.

Nakon što uronimo kamen volumen vode i kamena zajedno u akvariju iznosi $V_2 = a \cdot b \cdot (h + 6.25) = 75 \cdot 28 \cdot 31.25 = 65\,625 \text{ cm}^3$ pa je razlika zapravo volumen kamena $65\,625 - 52\,500 = 13\,125 \text{ cm}^3$.

Volumen akvarija iznosi $V = a \cdot b \cdot c = 75 \cdot 28 \cdot 40 = 84\,000 \text{ cm}^3$ pa ribice zauzimaju 100-ti dio tog volumena tj. 840 cm^3 .

10 % od 40 cm je desetina te duljine i iznosi 4 cm.

Stoga volumen do dopuštene granice iznosi $V_3 = a \cdot b \cdot (c - 4) = 75 \cdot 28 \cdot (40 - 4) = 75 \cdot 28 \cdot 36 = 75\,600 \text{ cm}^3$.

Smije se uliti još $75\,600 - (65\,625 + 840) = 9\,135 \text{ cm}^3 = 9.135$ litara vode.

2. Antea, Borna, Cvita i Damir sakupljaju poštanske marke. Broj Anteinih maraka je točno polovina broja maraka ostalo troje djece. Broj Borninih maraka je trećina broja maraka ostalo troje djece. Broj Cvitinih maraka je četvrtina broja maraka ostalo troje djece. Ako je Damir sakupio više od 160, a manje od 180 maraka koliko su maraka sakupili svi zajedno?

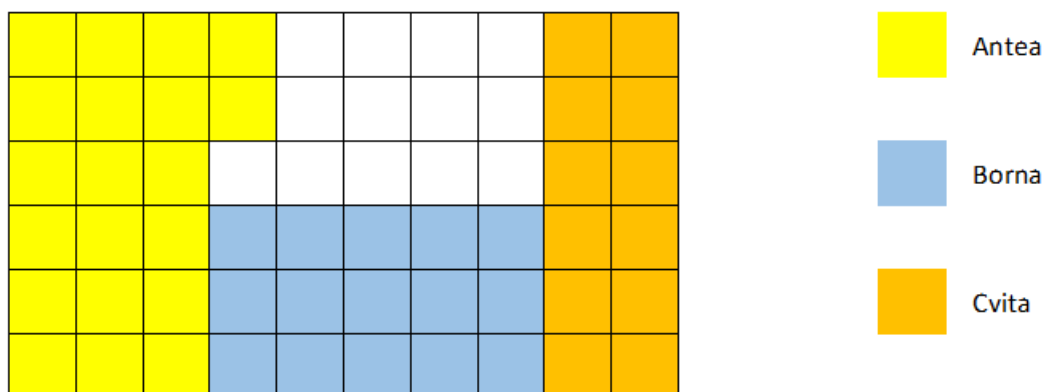
Prvo rješenje.

Kako je Antea skupila polovinu broja maraka ostalo troje djece, skupila je trećinu svih maraka.



Na sličan način zaključujemo da je Borna skupio četvrtinu, a Cvita petinu svih maraka. Ukupan broj maraka stoga je djeljiv s 3, s 4 i s 5, dakle mora biti višekratnik sva tri broja. Najmanji takav broj je 60.

Prikažimo uvjete zadatka grafički tako da ukupan broj maraka predstavimo sa 60 kvadratića:



Nakon što izdvojimo Anteine, Bornine i Cvitine marke, preostaje 13 kvadratića koji predstavljaju broj Damirovih maraka. Znamo da Damir ima između 160 i 180 maraka. Budući da vrijedi

$$160 : 13 = 12 \text{ i ostatak } 4,$$

$$180 : 13 = 13 \text{ i ostatak } 11,$$

zaključujemo da je jedini broj između 160 i 180 koji se može bez ostatka podijeliti s 13 broj $13 \cdot 13 = 169$.

Svaki kvadratić predstavlja 13 maraka. Svi zajedno sakupili su $13 \cdot 60 = 780$ maraka.

Drugo rješenje.

Označimo s a, b, c i d broj maraka koje su prikupili Antea, Borna, Cvita i Damir.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$$(1) \quad b + c + d = 2a, \text{ tj. } a + b + c + d = 3a,$$

$$(2) \quad a + c + d = 3b, \text{ tj. } a + b + c + d = 4b,$$

$$(3) \quad a + b + d = 4c, \text{ tj. } a + b + c + d = 5c.$$

Iz (1), (2) i (3) slijedi da je ukupni broj maraka $a + b + c + d = 3a = 4b = 5c$ pa je zato ukupni broj maraka djeljiv s 3, 4 i 5, odnosno djeljiv je sa 60.

Tako imamo:

$$a + b + c + d = 60k, \text{ za neki prirodni broj } k, \text{ odnosno } a = 20k, b = 15k, c = 12k.$$

Konačno,

$$d = 60k - 20k - 15k - 12k = 13k.$$

Kako znamo da je $160 < d < 180$, zaključujemo da je $d = 169$ tj. $k = 13$ pa je ukupni broj prikupljenih maraka

$$a + b + c + d = 60 \cdot 13 = 780.$$

Treće rješenje.

Ako je Antea skupila polovinu broja maraka ostalo troje djece, onda je skupila trećinu svih maraka.

ANTEA	OSTALI	
-------	--------	--

Na sličan način zaključujemo da je Bruno skupio četvrtinu, a Cvita petinu svih maraka.

ANTEA	BORNA	CVITA	DAMIR
-------	-------	-------	-------

Udio Damirovih maraka možemo dobiti tako da od jedno cijelo oduzmemo $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

Kako bismo zbrojili razlomke svedimo ih na ekvivalentne razlomke jednakih nazivnika.

Najmanji broj koji je višekratnik brojeva 3, 4 i 5 je upravo njihov umnožak $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Budući da vrijedi

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{47}{60},$$

Damirove marke čine $\frac{13}{60}$ svih maraka. Iz toga slijedi da broj Damirovih maraka treba biti djeljiv s 13.

Jedini broj između 160 i 180 djeljiv s 13 je 169, pa Damir ima 169 maraka.

Kako 169 čini $\frac{13}{60}$ svih maraka, slijedi da je $\frac{1}{60}$ svih maraka 13, pa je ukupni broj maraka $60 \cdot 13 = 780$.

3. Koliko ima prirodnih brojeva čiji je umnožak znamenaka 12, zbroj znamenaka 12 i djeljivi su brojem 12? Odredi najveći takav broj.

Rješenje.

Zapišimo broj 12 kao umnožak jednoznamenastih brojeva većih od 1: $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Kako zbroj znamenaka mora biti 12, postoje tri mogućnosti za znamenke takvog broja:

- 6, 2, 1, 1, 1, 1
- 4, 3, 1, 1, 1, 1
- 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1.

Broj čiji je zbroj znamenaka 12 djeljiv je s 3. Još treba postići da broj bude djeljiv s 4, pa ćemo posebno promatrati dvoznamenkasti završetak broja.

U prvom slučaju, posljednje dvije znamenke mogu biti 12 ili 16 (brojevi koji završavaju na 26 ili 62 nisu djeljivi s 4), dakle imamo dvije mogućnosti. Od preostale četiri znamenke, tri su znamenke 1 i jedna znamenka 2 ili 6, pa za njihov poredak postoje četiri mogućnosti (znamenku 2 ili 6 možemo staviti na bilo koje od prva četiri dekadski mjesta). Ukupno ima 8 takvih brojeva.

U drugom slučaju, jedina parna znamenka je 4, pa ona mora biti znamenka jedinica. No, dvoznamenkasti završetci 14 i 34 nisu djeljivi s 4. U ovom slučaju ne postoje brojevi koji ispunjavaju zadane uvjete.

U trećem slučaju, znamenka jedinica mora biti 2, a posljednje dvije znamenke mogu biti 12 ili 32 (ne može biti 22).

Ako su posljednje dvije znamenke 12, na prvih šest dekadskih mjesta treba rasporediti znamenke 3, 2, 1, 1, 1, 1. Znamenke 3 i 2 možemo rasporediti na $6 \cdot 5 = 30$ načina, dok su na ostalim mjestima znamenke 1.

Ako su posljednje dvije znamenke 32, na prvih šest mjesta treba rasporediti znamenke 2, 1, 1, 1, 1, 1. To možemo na šest načina.

U trećem slučaju je $30 + 6 = 36$ takvih brojeva.

Konačno, takvih je brojeva ukupno $8 + 36 = 44$. Najveći takav broj je 32111112.

Napomena. Ti brojevi su:

111612, 116112, 161112, 611112, 111216, 112116, 121116, 211116,
11112312, 11113212, 11121312, 11123112, 11131212, 11132112,
11211312, 11213112, 11231112, 11311212, 11312112, 11321112,
12111312, 12113112, 12131112, 12311112, 13111212, 13112112,
13121112, 13211112, 21111312, 21113112, 21131112, 21311112,
23111112, 31111212, 31112112, 31121112, 31211112, 32111112,
21111132, 12111132, 11211132, 11121132, 11112132 i 11111232.

4. U tablicu s 3 retka i n stupaca želimo upisati brojeve $1, 2, 3, \dots, n$ tako da u svakom od tri retka budu napisani svi ti brojevi te da zbroj brojeva u svakom stupcu bude jednak.

- a) Pokaži primjerom da je za $n = 9$ to moguće napraviti.
- b) Dokaži da n ne može biti paran broj.

Rješenje.

a) Zbroj svih brojeva u sva tri retka je $(1+2+\dots+9) \cdot 3 = 45 \cdot 3 = 135$.

U svim stupcima zbroj triju brojeva mora biti jednak pa zbroj u svakom stupcu iznosi $135 : 9 = 15$.

Postoji mnogo načina za konstruiranje primjera. Jedan primjer je:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	6	4	8	9	7	2	3	1
9	7	8	3	1	2	6	4	5

b) Neka je n bilo koji paran broj.

Kako se u sva tri retka moraju upisati isti brojevi $1, 2, 3, \dots, n$, zbroj svih brojeva u svakom retku iznosi
$$n \cdot (n + 1) : 2,$$

a u sva tri retka zajedno $3 \cdot n \cdot (n + 1) : 2$.

U svakom od n stupaca zbroj triju brojeva mora biti jednak pa zbroj u svakom stupcu iznosi
$$3 \cdot (n + 1) : 2.$$

Kako je n paran broj, broj $n + 1$ je neparan.

Umnožak dva neparna broja je neparan broj, pa je i broj $3 \cdot (n + 1)$ neparan.

Stoga, količnik $3 \cdot (n + 1) : 2$ nije prirodan broj te zaključujemo da nije moguće u tablicu upisati brojeve na željeni način ako je n paran broj.

5. Na svečanosti povodom Dana grada postavljena je tribina na kojoj su sjedala pravilno raspoređena u 12 redova i određenom broju stupaca. Svaki gledatelj na glavi ima ili kapu ili šešir. Gradonačelnik je uočio da je u svakom od 12 redova tribine točno 6 gledatelja s kapom, a u svakom stupcu tribine točno 5 gledatelja sa šeširom. Na tribini je ukupno 5 praznih mjesta.

- Koliko je gledatelja na tribini?
- Prikaži primjer rasporeda sjedenja koji odgovara uvjetima zadatka.

Rješenje.

a) Neka je s broj stupaca. Ukupan broj mjesta je tada $12s$.

S druge strane, ukupan broj mjesta jednak je zbroju broja mjesta gledatelja s kapama kojih je 72, broja mjesta gledatelja sa šeširima kojih je $5s$ i broja praznih mjesta kojih je 5.

Dakle, vrijedi $12s = 72 + 5s + 5$, odnosno $7s = 77$, tj. $s = 11$.

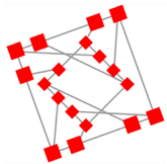
Na tribini je 11 stupaca i $12 \cdot 11 - 5 = 127$ gledatelja.

b) Primjer jednog rasporeda sjedenja koje zadovoljava tražene uvjete:

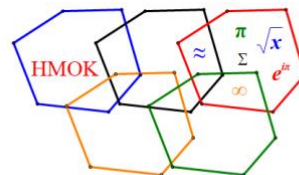
K	K	K	K	K	K	Š	Š	Š	Š	Š
Š	K	K	K	K	K	K	Š	Š	Š	Š
Š	Š	K	K	K	K	K	K	Š	Š	Š
Š	Š	Š	K	K	K	K	K	K	Š	Š
Š	Š	Š	Š	K	K	K	K	K	K	Š
Š	Š	Š	Š	Š	K	K	K	K	K	K
K	Š	Š	Š	Š	Š	K	K	K	K	K
K	K	Š	Š	Š	Š	Š	K	K	K	K
K	K	K	Š	Š	Š	Š	Š	K	K	K
K	K	K	K	Š	Š	Š	Š	Š	K	K
K	K	K	K	K	Š	Š	Š	Š	Š	K
K	K	K	K	K	K					

Slovom K smo označili gledatelje s kapama, slovom Š gledatelje sa šeširima, a ostala su mjesta prazna.

Primijetimo da nakon rasporeda prvih jedanaest redova kako je gore prikazano, u zadnjem redu možemo rasporediti gledatelje s kapama na bilo kojih 6 mjesta, dok ostala ostaju prazna.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – četvrtak, 19. listopada 2023.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Odredi prirodan broj $\overline{abcd}$ tako da za njegove znamenke vrijedi
 $a \cdot d + c \cdot d = 72$, $a \cdot c + c \cdot d = 56$ i $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0$.

Prvo rješenje.

Iz uvjeta $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0$ slijedi da je barem jedan od faktora jednak 0. Ako je $d = 0$, onda bi prva jednakost glasila $0 = 72$, što nije moguće. Ako je $c = 0$, onda bi druga zadana jednakost glasila $0 = 56$, što isto nije moguće.

Ako je $a = 0$, onda vrijedi $c \cdot d = 72$ i $c \cdot d = 56$, što je također nemoguće. To znači da je nužno $b = 0$.

Zapišimo izraze na lijevim stranama prve dvije zadane jednakosti u obliku umnoška:

$$d \cdot (a + c) = 72 \quad \text{i} \quad c \cdot (a + d) = 56.$$

Zapišimo u tablicu sve mogućnosti za c , a i d za koje vrijedi druga jednakost, te provjerimo u kojim od tih mogućnosti vrijedi i prva jednakost.

c	$a + d$	a	d	$d \cdot (a + c)$
1	56	/	/	/
2	28	/	/	/
4	14	5	9	81
4	14	6	8	80
4	14	7	7	77
4	14	8	6	72
4	14	9	5	65
7	8	1	7	56
7	8	2	6	54
7	8	3	5	50

c	$a + d$	a	d	$d \cdot (a + c)$
7	8	4	4	44
7	8	5	3	36
7	8	6	2	26
7	8	7	1	14
8	7	1	6	54
8	7	2	5	50
8	7	3	4	44
8	7	4	3	36
8	7	5	2	26
8	7	6	1	14

Jedina mogućnost koja zadovoljava oba uvjeta je $a = 8$, $c = 4$ i $d = 6$, tj. traženi broj je 8 046.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo $b = 0$.

Oduzimanjem prve dvije zadane jednakosti dobivamo $a \cdot d - a \cdot c = 16$, odnosno $a \cdot (d - c) = 16$.

Budući da su a, c, d znamenke, a i $d - c$ moraju biti manji od 10.

Razlikujemo tri slučaja:

1) $a = 2, d - c = 8$

Budući da su c i d znamenke, moguće je samo da je $d = 9$ i $c = 1$ ili $d = 8$ i $c = 0$. Već znamo da c ne može biti 0, a ako je $d = 9$ i $c = 1$, onda izraz $a \cdot d + c \cdot d$ iznosi $2 \cdot 9 + 1 \cdot 9 = 27$, što nije u skladu s prvom zadanom jednakosti. Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.

2) $a = 4, d - c = 4$

Budući da je d najviše 9, zaključujemo da je c najviše 5. Redom uvrštavamo vrijednosti za c , te računamo vrijednost nepoznanice d i izraza $a \cdot d + c \cdot d$.

c	$d = c + 4$	$a \cdot d + c \cdot d$
1	5	$2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 15$
2	6	$2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24$
3	7	$2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 35$
4	8	$2 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 48$
5	9	$2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 63$

Budući da u zadnjem stupcu ni u kojem slučaju nismo dobili vrijednost 72, zaključujemo da nema rješenja.

3) $a = 8, d - c = 2$

U ovom slučaju opet uvrštavamo vrijednosti za c , te računamo vrijednost nepoznanice d i izraza $a \cdot d + c \cdot d$.

c	$d = c + 2$	$a \cdot d + c \cdot d$
1	3	$8 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 27$
2	4	$8 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 40$
3	5	$8 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 55$
4	6	$8 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 72$
5	7	$8 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 91$
6	8	$8 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 112$
7	9	$8 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 135$

Dobili smo rješenje $a = 8, c = 4$ i $d = 6$, tj. traženi broj je 8 046.

2. Stranice $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ jednakokračnog trapeza $ABCD$ međusobno su sukladne. Nad njegovim krakovima s vanjske strane nacrtani su kvadrati $ADEF$ i $CBGH$. Ako je tupi kut trapeza sedam puta veći od njegovog šiljastog kuta, odredi mjeru kuta koji zatvaraju pravci EF i GH .

Prvo rješenje.

Ako je α veličina šiljastog, a β veličina tupog kuta trapeza $ABCD$, prema uvjetu zadatka vrijedi $\beta = 7\alpha$. Zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta je 360° , a u jednakokračnom trapezu šiljasti kutovi su međusobno sukladni i tupi kutovi su međusobno sukladni pa vrijedi:

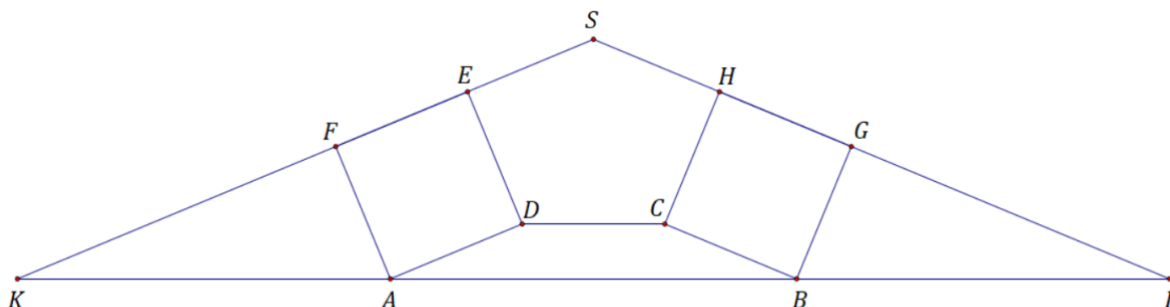
$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + 7\alpha = 180^\circ$$

$$8\alpha = 180^\circ$$

odakle dobivamo $\alpha = 22.5^\circ$ i $\beta = 157.5^\circ$.



Neka se pravci EF i GH sijeku u točki S . Neka pravac na kojem leži osnovica $\overline{AB}$ siječe pravac EF u točki K , a pravac GH u točki L . Želimo odrediti kut $|\angle KSL|$.

U $\triangle AFK$ vrijedi $|\angle KFA| = 90^\circ$ i $|\angle FAK| = 180^\circ - |\angle DAF| - |\angle BAD| = 180^\circ - 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$.

Stoga zaključujemo $|\angle AKF| = 180^\circ - |\angle KFA| - |\angle FAK| = 22.5^\circ$.

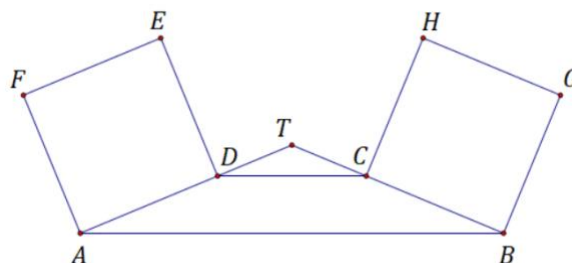
Na sličan način računamo $|\angle GBL| = 22.5^\circ$. Dakle, $|\angle LKS| = |\angle SLK| = 22.5^\circ$.

Slijedi da je $|\angle KSL| = 180^\circ - 22.5^\circ - 22.5^\circ = 135^\circ$. Traženi kut između pravaca je 45° .

Napomena. Umjesto računanja kutova u trokutu AFK , možemo uočiti da su pravci AD i KS paralelni (jer pravac KS sadrži stranicu $\overline{EF}$ koja je nasuprotna stranici $\overline{AD}$), pa zaključiti da vrijedi $|\angle AKF| = |\angle BAD| = 22.5^\circ$ zbog jednakosti veličina kutova uz presječnicu.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, uvedemo oznake α i β , te dobivamo $\alpha = 22.5^\circ$ i $\beta = 157.5^\circ$.



Pravci EF i GH paralelni su (redom) pravcima AD i BC . Stoga je kut između pravaca EF i GH iste veličine kao kut između pravaca AD i BC . Neka se pravci AD i BC sijeku u točki T .

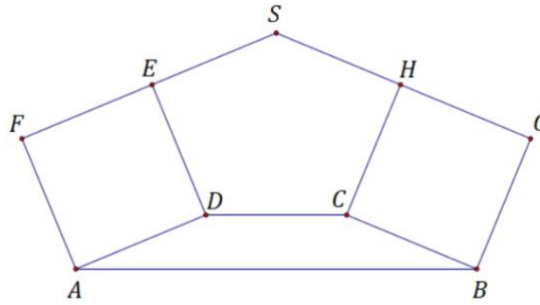
Trokuti ABT i CDT su jednakokračni, te imaju iste veličine kutova jer su pravci AB i CD paralelni.

Dakle, vrijedi $|\angle CDT| = |\angle TCD| = \alpha = 22.5^\circ$. Stoga računamo $|\angle DTC| = 180^\circ - 22.5^\circ - 22.5^\circ = 135^\circ$.

Traženi kut između pravaca je 45° .

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju, uvedemo oznake α i β , te dobivamo $\alpha = 22.5^\circ$ i $\beta = 157.5^\circ$.



Neka se pravci EF i GH sijeku u točki S .

U peterokutu $DCHSE$ vrijedi $|\angle DES| = |\angle SHC| = 90^\circ$.

Nadalje, $|\angle CDE| = |\angle HCD| = 360^\circ - 157.5^\circ - 90^\circ = 112.5^\circ$.

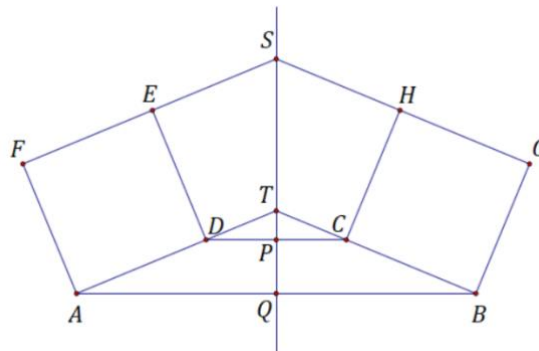
Budući da je zbroj veličina kutova u peterokutu 540° , slijedi da je traženi kut

$$|\angle ESH| = 540^\circ - 112.5^\circ - 112.5^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 135^\circ.$$

Traženi kut između pravaca je 45° .

Četvrto rješenje.

Kao u prvom rješenju, uvedemo oznake α i β , te dobivamo $\alpha = 22.5^\circ$ i $\beta = 157.5^\circ$.



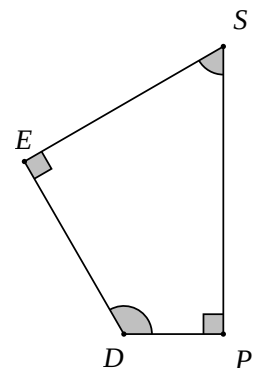
Budući da je trapez $ABCD$ jednakokračan, osnovice imaju zajedničku simetralu.

Obzirom na taj pravac, trapez je osnosimetričan, te su kvadrati $ADEF$ i $BCHG$ međusobno osnosimetrične slike. Stoga se pravci EF i GH sijeku na tom istom pravcu, tj. peterokut $DCHSE$ je osnosimetričan s obzirom na pravac PS , gdje je P polovište dužine $\overline{CD}$.

U četverokutu $DPSE$ kutovi s vrhovima P i E su pravi, a kut s vrhom D ima veličinu $360^\circ - (157.5^\circ + 90^\circ) = 112.5^\circ$, pa je veličina kuta s vrhom S u tom četverokutu $360^\circ - (2 \cdot 90^\circ + 112.5^\circ) = 360^\circ - 292.5^\circ = 67.5^\circ$.

Konačno, $|\angle ESH| = 2 \cdot 67.5^\circ = 135^\circ$.

Traženi kut između pravaca je 45° .



3. Koliko ima prirodnih brojeva čiji je umnožak znamenaka 12, zbroj znamenaka 12 i djeljivi su brojem 12? Odredi najveći takav broj.

Rješenje.

Zapišimo broj 12 kao umnožak jednoznamenkastih brojeva većih od 1: $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Kako zbroj znamenaka mora biti 12, postoje tri mogućnosti za znamenke takvog broja:

- 6, 2, 1, 1, 1, 1
- 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1
- 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1.

Broj čiji je zbroj znamenaka 12 djeljiv je s 3. Još treba postići da broj bude djeljiv s 4, pa ćemo posebno promatrati dvoznamenkasti završetak broja.

U prvom slučaju, posljednje dvije znamenke mogu biti 12 ili 16 (brojevi koji završavaju na 26 ili 62 nisu djeljivi s 4), dakle imamo dvije mogućnosti. Od preostale četiri znamenke, tri su znamenke 1 i jedna znamenka 2 ili 6, pa za njihov poredak postoje četiri mogućnosti (znamenku 2 ili 6 možemo staviti na bilo koje od prva četiri dekadskih mjesta). Ukupno ima 8 takvih brojeva.

U drugom slučaju, jedina parna znamenka je 4, pa ona mora biti znamenka jedinica. No, dvoznamenkasti završetci 14 i 34 nisu djeljivi s 4. U ovom slučaju ne postoje brojevi koji ispunjavaju zadane uvjete.

U trećem slučaju, znamenka jedinica mora biti 2, a posljednje dvije znamenke mogu biti 12 ili 32 (ne može biti 22).

Ako su posljednje dvije znamenke 12, na prvih šest dekadskih mjesta treba rasporediti znamenke 3, 2, 1, 1, 1, 1. Znamenke 3 i 2 možemo rasporediti na $6 \cdot 5 = 30$ načina, dok su na ostalim mjestima znamenke 1.

Ako su posljednje dvije znamenke 32, na prvih šest mjesta treba rasporediti znamenke 2, 1, 1, 1, 1, 1. To možemo na šest načina.

U trećem slučaju je $30 + 6 = 36$ takvih brojeva.

Konačno, takvih je brojeva ukupno $8 + 36 = 44$. Najveći takav broj je 32111112.

Napomena. Ti brojevi su:

111612, 116112, 161112, 611112, 111216, 112116, 121116, 211116,
11112312, 11113212, 11121312, 11123112, 11131212, 11132112,
11211312, 11213112, 11231112, 11311212, 11312112, 11321112,
12111312, 12113112, 12131112, 12311112, 13111212, 13112112,
13121112, 13211112, 21111312, 21113112, 21131112, 21311112,
23111112, 31111212, 31112112, 31121112, 31211112, 32111112,
21111132, 12111132, 11211132, 11121132, 11112132 i 11111232.

4. U prazna polja tablice kao na slici treba upisati osam međusobno različitih jednoznamenkastih prirodnih brojeva tako da zbroj brojeva u svakom retku, osim u najnižem, bude za jedan veći od zbroja brojeva u retku ispod njega. Na koliko je načina moguće popuniti tablicu?

Rješenje.

Od 9 mogućih jednoznamenkastih brojeva u tablici jedan nećemo upotrijebiti. Najveći mogući zbroj svih upotrijebljenih jednoznamenkastih prirodnih brojeva dobio bi se izostavljanjem broja 1. Tada bi zbroj svih 8 znamenaka bio

$$2 + 3 + \dots + 8 + 9 = 44.$$

Najmanji zbroj bi bio bez broja 9, što bi iznosilo 36.

Zaključujemo da je zbroj svih 8 brojeva veći ili jednak 36, a manji ili jednak 44.

Kako su zbrojevi brojeva u retcima četiri uzastopna broja, označimo ih $n, n + 1, n + 2, n + 3$, gdje je n prirodan broj, njihov zbroj je $4n + 6$. Jedini brojevi tog oblika između 36 i 44 su 38 i 42.

Ako je zbroj svih 8 brojeva 38, znači da je u tom slučaju izostavljen broj 7 jer je zbroj svih 9 brojeva jednak 45. Tada je $4n + 6 = 38$, pa je $n = 8$, te su zbrojevi brojeva po retcima 8, 9, 10 i 11.

Ispitajmo sve mogućnosti za navedeni slučaj tako da prvo ispišemo mogućnosti za svaki zbroj.

zbroj	mogućnosti
8	2+6, 3+5
9	1+8, 3+6, 4+5
10	1+9, 2+8, 4+6
11	2+9, 3+8, 5+6

Odmah možemo eliminirati zbrojeve $9 = 3+6$ i $11=5+6$ jer bez tih pribrojnika nije moguće dobiti zbroj 8, a zatim i zbroj $10=2+8$ jer bez tih pribrojnika nije moguće dobiti zbroj 11.

Budući da isti broj ne možemo upisati na više mjesta u tablici dobivamo dvije mogućnosti za zbrojeve u tablici:

zbroj	I	II
11	3 + 8	2 + 9
10	1 + 9	4 + 6
9	4 + 5	1 + 8
8	2 + 6	3 + 5

Ako je zbroj svih 8 brojeva 42, tada je izostavljen broj 3. Tada je $4n + 6 = 42$, pa je $n = 9$.

Zbrojevi brojeva po retcima su 9, 10, 11 i 12.

Ispitajmo sve mogućnosti za navedeni slučaj tako da prvo ispišemo mogućnosti za svaki zbroj.

zbroj	mogućnosti
9	1+8, 2+7, 4+5
10	1+9, 2+8, 4+6
11	2+9, 4+7, 5+6
12	4+8, 5+7

Možemo eliminirati zbrojeve $4+5$, $4+7$ i $2+8$.

Budući da isti broj ne možemo upisati na više mjesta u tablici dobivamo dvije mogućnosti za zbrojeve u tablici:

zbroj	III	IV
12	$5 + 7$	$4 + 8$
10	$2 + 9$	$5 + 6$
9	$4 + 6$	$1 + 9$
8	$1 + 8$	$2 + 7$

Kako nije važno u koji stupac upisujemo koji pribrojnik, za svaki redak imamo dva načina za upisivanje.

Stoga, za svaku navedenu mogućnost, tablicu možemo popuniti na: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ načina.

Ukupan broj načina kako možemo popuniti tablicu je $4 \cdot 16 = 64$.

5. Na svečanosti povodom Dana grada postavljena je tribina na kojoj su sjedala pravilno raspoređena u redove i stupce (broj sjedala u svim redovima je isti, broj sjedala u svim stupcima je isti). Svaki gledatelj na glavi ima ili kapu ili šešir. Gradonačelnik je uočio da je u svakom redu točno 8 gledatelja s kapom, a u svakom stupcu točno 9 gledatelja sa šeširom. Na tribini je ukupno 12 praznih mjesta.

- Koliko najmanje mjesta može biti na tribini?
- Prikaži primjer rasporeda sjedenja koji odgovara uvjetima zadatka.

Rješenje.

a) Označimo s a broj redova, te s b broj stupaca te tribine.

Ukupan broj mjesta na tribini je ab , ukupan broj gledatelja s kapama je $8a$, a ukupan broj gledatelja sa šeširima je $9b$. Vrijedi

$$ab = 8a + 9b + 12.$$

Sada je

$$ab - 8a = 9b + 12$$

$$a(b - 8) = 9b + 12$$

$$a = \frac{9b + 12}{b - 8} = \frac{9(b - 8) + 84}{b - 8} = 9 + \frac{84}{b - 8}$$

Djelitelji broja 84 su: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84, i to su mogućnosti za broj $b - 8$.

Za svaki djeljitelj računamo pripadne vrijednosti za b , a i ab .

$b - 8$	b	$\frac{84}{b - 8}$	a	ab
1	9	84	93	837
2	10	42	51	510
3	11	28	37	407
4	12	21	30	360
6	14	14	23	322
7	15	12	21	315
12	20	7	16	320
14	22	6	15	330
21	29	4	13	377
28	36	3	12	432
42	50	2	11	550
84	92	1	10	920

Na tribini ima najmanje 315 mjesta.

Napomena. Dobivenu jednadžbu moguće je riješiti i na ovaj način:

$$ab - 8a - 9b = 12$$

$$a(b - 8) - 9(b - 8) = 84$$

$$(a - 9)(b - 8) = 84$$

Zapišimo broj 84 u obliku umnoška dva prirodna broja:

$$84 = 1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12$$

$b - 8$	$a - 9$	b	a	ab
1	84	9	93	837
2	42	10	51	510
3	28	11	37	407
4	21	12	30	360
6	14	14	23	322
7	12	15	21	315
12	7	20	16	320
14	6	22	15	330
21	4	29	13	377
28	3	36	12	432
42	2	50	11	550
84	1	92	10	920

Na tribini može biti najmanje 315 mjesta.

b) Primjer rasporeda sjedenja za 315 mjesta na tribini:

U svakom redu ima 8 kapa, u svakom stupcu 9 šešira te ostaje 12 praznih mjesta.

1	2	3	4	5	6	7	8	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	2	2	2	2	2	2
2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	3	3	3	3	3
3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	4	4	4	4
4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	5	5	5
5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	6	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	7
7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
9	8	7	6	5	4	3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	8	7	6	5	4	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	9	8	7	6	5	2	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	9	8	7	6	3	3	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	9	8	7	4	4	4	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	9	8	5	5	5	5	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	9	6	6	6	6	6	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	8	8	8	8	8	8	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	9	9	9	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	8						
1	2	3	4	5	6	7	9	8						