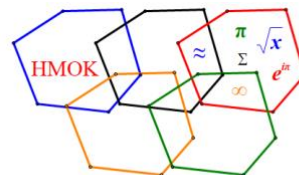


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 11. lipnja 2022.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Aljmez

Na planetu Aljmez dan se naziva NAD, sat se naziva TAS, minuta NIM, a sekunda KES. Jedan NAD traje deset TASA, jedan TAS traje deset NIMA, a jedan NIM osam KESa. Koliko zemaljskih sekundi traje 1 aljmeški KES, ako 1 NAD traje isto kao i 1 dan?

Rezultat: **108**

Rješenje.

$$1 \text{ NAD} = 10 \text{ TASA} = 100 \text{ NIMA} = 800 \text{ KESa}$$

$$1 \text{ dan} = 24 \text{ sata} = 1440 \text{ minuta} = 86400 \text{ sekunda}$$

Kako 1 NAD i 1 dan traju jednako, onda je $800 \text{ KESa} = 86400 \text{ sekunda}$ pa vrijedi:

$$1 \text{ KES} = 86400 : 800 = 864 : 8 = 108 \text{ sekundi}$$

2. Semafor

Semafor radi na sljedeći način: zeleno svjetlo svijetli 17 sekundi, žuto 4 sekunde, crveno 11 sekundi, žuto 4 sekunde, zatim ponovno zeleno 17 sekundi, žuto 4 sekunde, crveno 11 sekundi, žuto 4 sekunde i tako cijeli dan. Koliko će minuta tijekom jednog cijelog dana svijetliti zeleno?

Rezultat: **680**

Rješenje.

Jedan ciklus zeleno – žuto – crveno – žuto traje $17 + 4 + 11 + 4 = 36$ sekundi.

Kako 1 sat ima 3600 sekundi, u jednom se satu ciklus ponovi $3600 : 36 = 100$ puta.

Kako jedan dan ima 24 sata, onda u jednom danu ima 2400 ciklusa.

U svakom ciklusu zeleno svjetlo svijetli 17 sekundi pa u jednom danu svijetli $2400 \cdot 17 = 40800$ sekundi što je $40800 : 60 = 4080 : 6 = 680$ minuta.

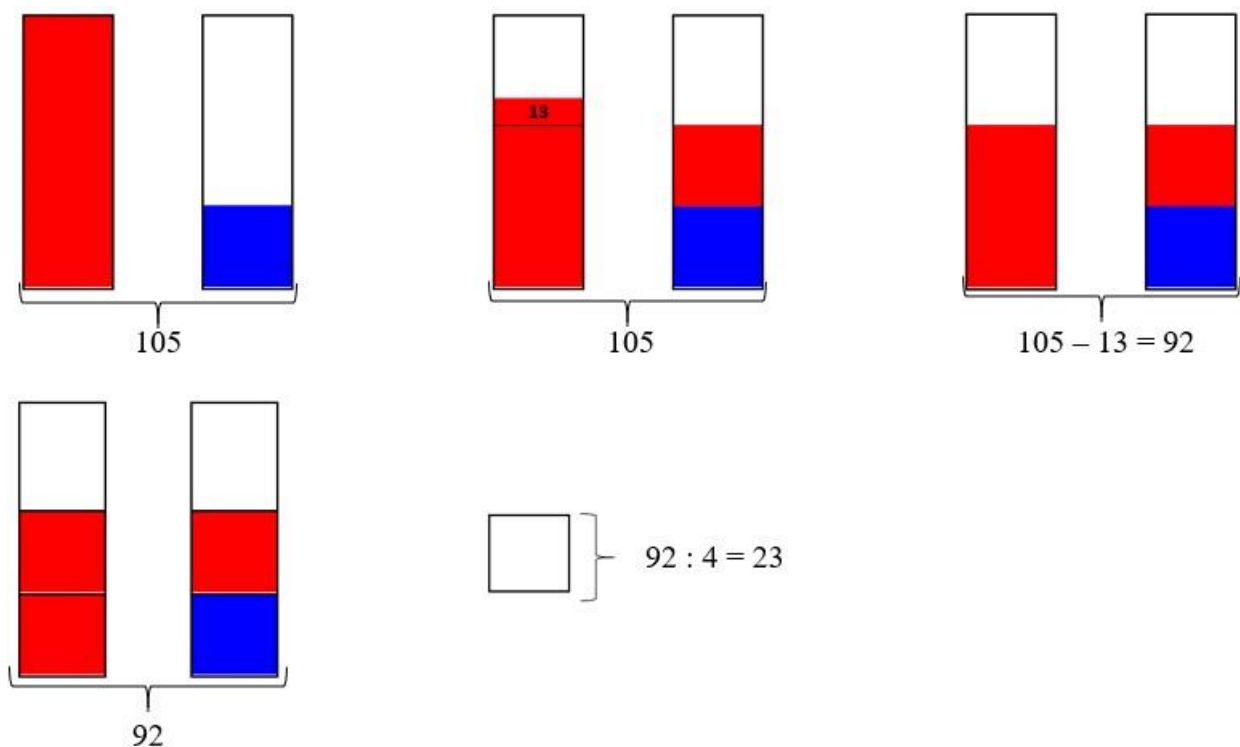
3. Kuglice

U crvenoj i plavoj kutiji nalazi se ukupno 105 kuglica. Nakon što je iz crvene kutije u plavu prebačeno onoliko kuglica koliko ih je u plavoj kutiji bilo na početku, u crvenoj je kutiji bilo 13 kuglica više nego u plavoj. Odredi peterostruku razliku početnog broja kuglica u crvenoj i plavoj kutiji.

Rezultat: **295**

Rješenje:

Prikažimo dane uvjete grafički.



U plavoj kutiji nalaze se 23 kuglice, a u crvenoj $105 - 23 = 82$ kuglice. Peterostruka razlika je $5 \cdot (82 - 23) = 5 \cdot 59 = 295$.

4. Rezanje užeta

Uže duljine 60 m razrežemo na jednake dijelove duljine 3 m. Od tako dobivenih užeta šest ih prerežemo na dijelove duljine 10 cm, šest na dijelove duljine 5 cm, a preostale na dijelove duljine 6 cm. Na koliko je mjesta prerezano uže?

Rezultat: **939**

Rješenje.

Ako su dijelovi duljine 3 m, onda ima $60 : 3 = 20$ dijelova, znači da je uže rezano na 19 mjesta, odnosno za taj dio je rezano 19 puta.

Šest dijelova duljine 3 m izrezano je na dijelove duljine 10 cm, što znači da je od svakog dijela duljine 3 m odnosno 300 cm dobiveno $300 : 10 = 30$ dijelova, što znači da je svaki takav dio rezan na 29 mjesta. Ukupno je rezano $6 \cdot 29 = 174$ puta.

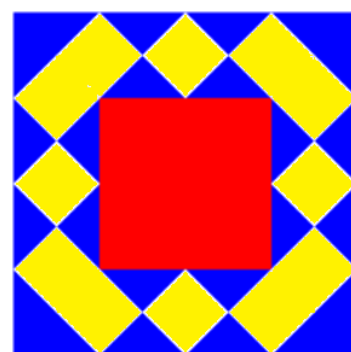
Šest dijelova duljine 3 m izrezano je na dijelove duljine 5 cm, što znači da je od svakog dijela duljine 3 m odnosno 300 cm dobiveno $300 : 5 = 60$ dijelova, što znači da je svaki takav dio rezan na 59 mjesta. Ukupno je rezano $6 \cdot 59 = 354$ puta.

Ostatak, odnosno $20 - 6 - 6 = 8$ dijelova duljine 3 m izrezano je na dijelove duljine 6 cm, što znači da je od svakog dijela duljine 3 m odnosno 300 cm dobiveno $300 : 6 = 50$ dijelova, što znači da je svaki takav dio rezan na 49 mjesta. Ukupno je rezano $8 \cdot 49 = 392$ puta.

Ukupan broj rezanja je $19 + 174 + 354 + 392 = 939$.

5. Žuti sprej

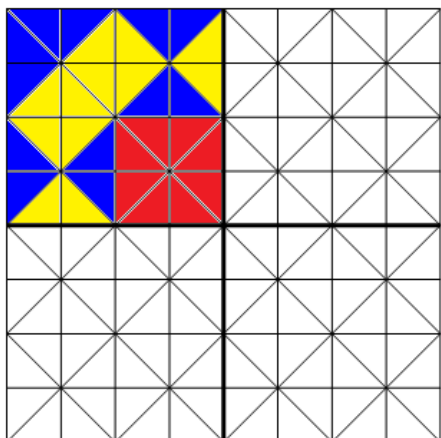
Mara je u veliki kvadrat ucrtala pravokutnike kao na slici. Površina crvenog kvadrata je 350 dm^2 . Žuta boja u spreju prodaje se u limenkama čija je cijena 40 kn. Svakom limenkom može se prekriti površina od 70 dm^2 . Koliko je kuna Mara platila žutu boju?



Rezultat: **320**

Rješenje.

Kako je kvadrat simetričan, u ovom je slučaju dovoljno promatrati njegovu četvrtinu.



Ako smjestimo dani kvadrat u trokutnu mrežu, vidimo da je površina koju čine plavi i žuti dijelovi zajedno tri puta veća od površine crvenog dijela. Također, površina žutog dijela jednaka je površini plavog dijela.

To znači da je površina plavog i žutog dijela $3 \cdot 350 = 1050 \text{ m}^2$ pa je površina žutog dijela $1050 : 2 = 525 \text{ dm}^2$.

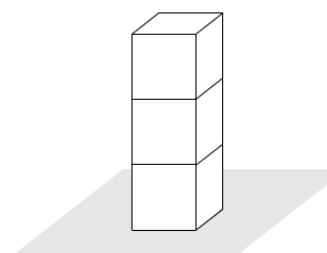
Jedna je limenka dovoljna za 70 dm^2 , a kako je $525 : 70 = 7$ i ostatak 35 potrebno je kupiti 8 limenki.

To znači da je Mara žutu boju platila $8 \cdot 40 = 320$ kn.

6. Tri kocke

45	56		
	92	108	
		68	75

Tri jednake kocke imaju mrežu kakva je prikazana na slici. Kocke su postavljene na stol, jedna na drugu. Koliki je najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama tako postavljenih kocki na stolu?



Rezultat: **890**

Rješenje.

Kada se takve tri kocke slože na stol, jedna na drugu, 5 strana nije vidljivo, a preostalih 13 je vidljivo. Kako bismo odredili najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama kocaka, odredimo najveći mogući zbroj brojeva na 5 strana koje nisu vidljive.

Kada se iz prikazane mreže napravi kocka, na njenim su nasuprotnim stranama parovi brojeva 45 i 108, 92 i 75, 56 i 68. Najveći mogući zbroj takvog para je $92 + 75 = 167$. Donje dvije kocke imaju nevidljive strane s brojevima 92 i 75, a gornja kocka na nevidljivoj strani ima broj 108.

Zbroj svih skrivenih brojeva je $167 + 167 + 108 = 442$.

Zbroj brojeva na svakoj kocki je $45 + 56 + 92 + 108 + 68 + 75 = 444$ pa je zbroj na tri kocke $3 \cdot 444 = 1332$.

Od zbroja svih brojeva oduzmimo zbroj skrivenih brojeva, $1332 - 442 = 890$.

Najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama kocki je 890.

7. Stonoga

Stonoga Milica ima točno stotinu nogu, 50 lijevih i 50 desnih. Svako jutro ona obuva 50 pari cipela i to tako da najprije obuče sve lijeve, a potom sve desne. Za obuvanje svake lijeve cipele treba joj jedna sekunda. No onda se umori pa joj za desne cipele treba više vremena. Za prvu treba dvije sekunde, za drugu četiri, za treću šest i tako do posljednje desne cipele, svaki puta dvije sekunde više nego za prethodnu. No navečer, kad izuva cipele, ukupno joj treba 10 puta manje vremena nego za obuvanje.

Koliko sekundi stonogi Milici treba za izuvanje svih cipela?

Rezultat: **260**

Rješenje.

Kako ima 50 lijevih cipela, treba joj 50 sekundi za obuti sve lijeve.

Za 1. desnu treba 2 sekunde,

za 2. desnu treba 4 sekunde,

za 3. desnu treba 6 sekundi,

za 4. desnu treba 8 sekundi,

...

za 50. desnu treba $2 \cdot 50 = 100$ sekundi.

Za sve desne cipele treba ukupno $2 + 4 + 6 + \dots + 100 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$ sekundi.

Za obuvanje joj treba $50 + 2550 = 2600$ sekundi, a za izuvanje $2600 : 10 = 260$ sekundi.

8. Vreća jabuka

Na pitanje koliko jabuka ima u vreći, prodavač je odgovorio: „Ako ih brojim po dvije, ili po tri, ili po četiri, ili po pet, ili po šest, uvijek jedna ostane. Ako ih brojim po sedam ne ostane mi niti jedna.“ Odredi najmanji broj jabuka koji se može nalaziti u vreći.

Rezultat: **301**

Rješenje.

Broj jabuka u vreći može se bez ostatka podijeliti sa 7, a pri dijeljenju s 2, 3, 4, 5 i 6 ostatak je 1.

To znači da se broj jabuka umanjen za 1 može podijeliti (bez ostatka) s 2, 3, 4, 5 i 6.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 4, može se i s 2.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 4 i 3 znači da se može podijeliti i sa 12.

Ako se može bez ostatka podijeliti s 12, može i sa 6.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 12 i 5 znači da se može podijeliti i sa 60.

To mogu biti brojevi 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, ...

Traženi broj je za 1 veći i mora se moći bez ostatka podijeliti sa 7.

$61 : 7 = 8$ i ostatak 5.

$121 : 7 = 17$ i ostatak 2

$181 : 7 = 25$ i ostatak 6

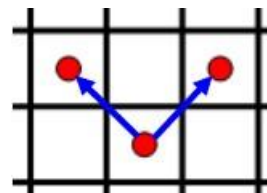
$241 : 7 = 34$ i ostatak 3

$301 : 7 = 43$

Najmanji broj jabuka koji se može nalaziti u vreći je 301.

9. Figurica

Figurica se nalazi na srednjem polju donjeg retka ploče 9×9 . U svakom potezu figurica se pomiče dijagonalno za jedno polje, tj. gore-lijevo ili gore-desno, kao što je prikazano na slici. Na koliko različitih načina možemo figuricu nizom od osam poteza premjestiti u gornji redak ploče?



Rezultat: **220**

Rješenje.

Na svako polje ćemo zapisati broj načina da figurica dođe do tog polja.

Promotrimo žuto označeno polje. Ako je figurica u nekom trenutku na tom polju, u prethodnom potezu je morala biti na jednom od dva zeleno označena polja u retku ispod nje. Zato ćemo u žuto polje upisati zbroj brojeva u zelenim poljima.

Početna pozicija figurice je označena znakom ●. S tog polja figurica može doći na dva polja u drugom retku, na svako od njih na samo jedan način, pa u ta polja upisujemo broj 1.

20	55	70	55	20
5	15	20	15	5
1	4	6	4	1
	1	2	1	
		1		
		●		

Tablicu dalje popunjavamo po retcima, prema gore. Kada popunimo tablicu treba još samo zbrojiti sve brojeve u gornjem retku: $20 + 55 + 70 + 55 + 20 = 220$

10. Blagajnica

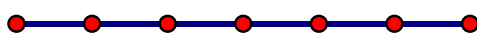
U blagajni blagajnice Đurđe nalaze se novčanice od 100 kuna i 10 kuna te kovanice od 5 kuna, 2 kune i 1 kune. Ukupna vrijednost novca u blagajni je 1844 kune. Broj novčanica od 100 kuna šestina je broja novčanica od 10 kuna, a broj kovanica od 5 kuna polovina je broja novčanica od 10 kuna. Broj kovanica od 1 kune trećina je broja kovanica od 2 kune i 5 kuna zajedno, a broj kovanica od 2 kune je za šest veći od broja kovanica od 5 kuna. Koliko je ukupno novčanica i kovanica u blagajni?

Rezultat: **158**

Rješenje.

Označimo broj novčanica od 100 kuna ovako: 

Iz uvjeta zadatka redom dobivamo:

 broj novčanica od 10 kuna

 broj kovanica od 5 kuna

 i još 6 broj kovanica od 2 kune

 i još 6 broj kovanica od 2 kuna i 5 kuna zajedno

 i još dvije broj kovanica od 1 kune

Ukupnu vrijednost novca u blagajni možemo prikazati ovako:

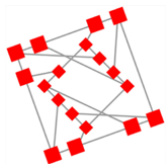
oznaka	vrijednost	ukupno
	100	100 
	10	60 
	5	15 
 i još 6	2	6  i još 12 kn
 i još 2	1	2  i još 2 kn
UKUPNO		183  i još 14 kn

Kako 183  i još 14 kuna vrijedi ukupno 1844 kune,
onda 183  vrijedi $1844 - 14 = 1830$ kn.

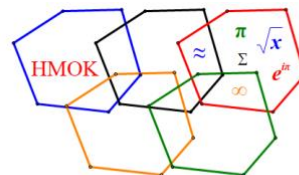
To znači da  vrijedi $1830 : 183 = 10$ kn.

U blagajni je bilo 10 novčanica od 100 kn, 60 novčanica od 10 kn, 30 kovanica od 5 kuna, 36 kovanica od 2 kune i 22 kovanice od 1 kune.

Ukupno je bilo $10 + 60 + 30 + 36 + 22 = 158$ novčanica i kovanica.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 11. lipnja 2022.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. Stonoga

Stonoga Milica ima točno stotinu nogu, 50 lijevih i 50 desnih. Svako jutro ona obuva 50 pari cipela i to tako da najprije obuče sve lijeve, a potom sve desne. Za obuvanje svake lijeve cipele treba joj jedna sekunda. No onda se umori pa joj za desne cipele treba više vremena. Za prvu treba jednu sekundu, za drugu tri, za treću pet i tako do posljednje desne cipele, svaki puta dvije sekunde više nego za prethodnu. No navečer, kad izuva cipele, ukupno joj treba triput manje vremena nego za obuvanje. Koliko sekundi stonogi Milici treba za izuvanje svih cipela?

Rezultat: **850**

Rješenje.

Stonogi za obuvanje svih lijevih cipela treba $(50 \cdot 1) \text{ s} = 50 \text{ s}$.

Za obuvanje svih desnih cipela treba joj $(1 + 3 + \dots + 99) \text{ s} = (25 \cdot 100) \text{ s} = 2500 \text{ s}$.

Stoga joj za obuvanje svih lijevih i svih desnih cipela treba, ukupno, $(50 + 2500) \text{ s} = 2550 \text{ s}$.

Za izuvanje cipela treba joj $(2550 : 3) \text{ s} = 850 \text{ s}$.

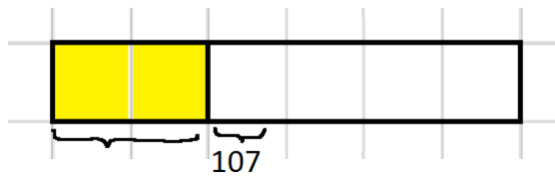
2. Ante i Borna

Ante je krenuo iz mjesta A u mjesto B , a Borna istim putem iz mjesta B u mjesto A . Nakon što je Ante prešao trećinu ukupne duljine puta i još 107 km, a Borna šestinu ukupne duljine puta i još 161 km, njihova je međusobna udaljenost 113 km. Kolika je, u kilometrima, udaljenost mjesta A i B ako se Ante i Borna još nisu mimoišli?

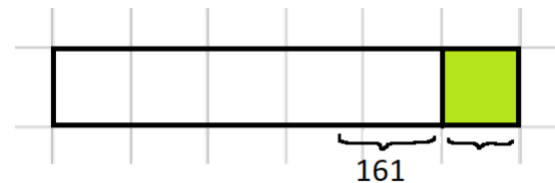
Rezultat: **762**

Rješenje.

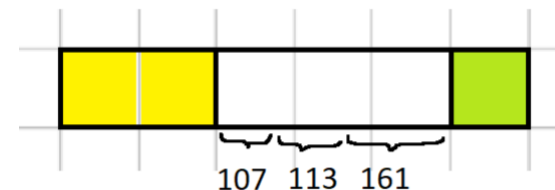
Ante je prešao



Borna je prešao



Nakon toga je njihova međusobna udaljenost 113 km



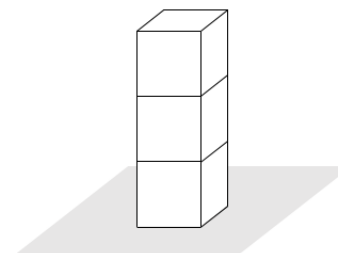
pa je zbroj udaljenosti $107 + 113 + 161 = 381$ km jednak polovini ukupne duljine puta.

Zato je udaljenost mjesta A i B jednaka $2 \cdot 381 = 762$ km.

3. Tri kocke

45	56		
	92	108	
		68	75

Tri jednake kocke imaju mrežu kakva je prikazana na slici. Kocke su postavljene na stol, jedna na drugu. Koliki je najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama tako postavljenih kocki na



stolu?

Rezultat: 890

Rješenje.

Kada se takve tri kocke slože na stol, jedna na drugu, 5 strana nije vidljivo, a preostalih 13 je vidljivo. Kako bismo odredili najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama kocaka, odredimo najveći mogući zbroj brojeva na 5 strana koje nisu vidljive.

Kada se iz prikazane mreže napravi kocka, na njenim su nasuprotnim stranama parovi brojeva 45 i 108, 92 i 75, 56 i 68. Najveći mogući zbroj takvog para je $92 + 75 = 167$. Donje dvije kocke imaju nevidljive strane s brojevima 92 i 75, a gornja kocka na nevidljivoj strani ima broj 108.

Zbroj svih skrivenih brojeva je $167 + 167 + 108 = 442$.

Zbroj brojeva na svakoj kocki je $45 + 56 + 92 + 108 + 68 + 75 = 444$ pa je zbroj na tri kocke $3 \cdot 444 = 1332$.

Od zbroja svih brojeva oduzmimo zbroj skrivenih brojeva, $1332 - 442 = 890$.

Najmanji mogući zbroj brojeva na svim vidljivim stranama kocki je 890.

4. Kut među kazaljka

Izračunaj veličinu manjega kuta između satne i minutne kazaljke ure u 13 sati 8 minuta i 18 sekundi. Veličinu kuta izrazi u kutnim minutama.

Rezultat: **939**

Rješenje.

Neka je početni položaj kazaljki ure onaj u podne kada se satna i minutna kazaljka poklapaju.

Satna kazaljka ure u jednom satu „prijede“ 30° .

Satna kazaljka ure u jednoj minuti „prijede“ $(30 : 60)^\circ$ pa u 8 minuta „prijede“ $(8 \cdot 30 : 60)^\circ = 4^\circ$.

Satna kazaljka ure u jednoj sekundi „prijede“ $(30 : 60 : 60)^\circ = (30 : 3600)^\circ$ pa u 18 sekundi „prijede“ $(18 \cdot 30 : 3600)^\circ = 0.15^\circ$.

Satna kazaljka ure od podneva do 13 sati 8 minuta i 18 sekundi ukupno „prijede“

$$(30 + 4 + 0.15)^\circ = 34.15^\circ.$$

Minutna kazaljka ure u jednoj minuti „prijede“ $(360 : 60)^\circ = 6^\circ$ pa u 8 minuta „prijede“ $(8 \cdot 6)^\circ = 48^\circ$.

Minutna kazaljka ure u jednoj sekundi „prijede“ $(360 : 60 : 60)^\circ = (360 : 3600)^\circ$ pa u 18 sekundi „prijede“ $(18 \cdot 360 : 3600)^\circ = 1.8^\circ$.

Minutna kazaljka ure od podneva do 13 sati 8 minuta i 18 sekundi ukupno „prijede“ $(48 + 1.8)^\circ = 49.8^\circ$.

Manja mjera kuta koji zatvaraju satna i minutna kazaljka ure u 13 sati 8 minuta i 18 sekundi je $(49.8 - 34.15)^\circ = 15.65^\circ = (15.65 \cdot 60)' = 939'$.

5. Vreća jabuka

Na pitanje koliko jabuka ima u vreći, prodavač je odgovorio: „Ako ih brojim po dvije, ili po tri, ili po četiri, ili po pet, ili po šest, uvijek jedna ostane. Ako ih brojim po sedam ne ostane mi niti jedna.“ Odredi najmanji mogući broj jabuka u vreći.

Rezultat: **301**

Rješenje.

Broj jabuka u vreći može se bez ostatka podijeliti sa 7, a pri dijeljenju s 2, 3, 4, 5 i 6 ostatak je 1.

To znači da se broj jabuka umanjen za 1 može podijeliti (bez ostatka) s 2, 3, 4, 5 i 6.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 4, može se i s 2.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 4 i 3 znači da se može podijeliti i sa 12.

Ako se može bez ostatka podijeliti s 12, može i sa 6.

Ako se bez ostatka može podijeliti s 12 i 5 znači da se može podijeliti i sa 60.

To mogu biti brojevi 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, ...

Traženi broj je za 1 veći i mora se moći bez ostatka podijeliti sa 7.

$$61 : 7 = 8 \text{ i ostatak } 5.$$

$$121 : 7 = 17 \text{ i ostatak } 2$$

$$181 : 7 = 25 \text{ i ostatak } 6$$

$$241 : 7 = 34 \text{ i ostatak } 3$$

$$301 : 7 = 43$$

Najmanji broj jabuka koji se može nalaziti u vreći je 301.

6. Parne i neparne

Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna? Nula je parna znamenka.

Rezultat: **675**

Prvo rješenje.

Neka je p parna, a n neparna znamenka troznamenkastog broja. Tada je $p \in \{0,2,4,6,8\}$ i $n \in \{1,3,5,7,9\}$. Kako barem jedna znamenka mora biti parna i barem jedna znamenka neparna, traženi troznamenkasti brojevi su oblika $\overline{pnn}$, $\overline{npn}$, $\overline{nnp}$, $\overline{ppn}$, $\overline{pnp}$, $\overline{npp}$.

Brojeva oblika $\overline{pnn}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{npn}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Brojeva oblika $\overline{nnp}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Brojeva oblika $\overline{ppn}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{pnp}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{npp}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Troznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna ima $100 + 125 + 125 + 100 + 100 + 125 = 675$.

Drugo rješenje.

Troznamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Neka je p parna, a n neparna znamenka. Tada je $p \in \{0,2,4,6,8\}$ i $n \in \{1,3,5,7,9\}$.

Troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke neparne ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke parne ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ jer je znamenka stotica različita od nule.

Ako iz skupa svih troznamenkastih brojeva isključimo one koji imaju sve parne ili sve neparne znamenke, preostat će brojevi koji imaju barem jednu parnu i barem jednu neparnu znamenku.

Njihov broj je $900 - 100 - 125 = 675$. Troznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna ima 675.

7. Površina pravokutnika

Kvadrat je podijeljen na osam pravokutnika kao na slici. Zbroj opsega tih osam pravokutnika je 288 cm. Odredi površinu istaknutog pravokutnika u kvadratnim centimetrima, ako je njegova dulja stranica triput dulja od kraće, a kraća stranica četiri puta kraća od stranice kvadrata.

Rezultat: **108**



Rješenje.

Na crtežu uočimo pravokutnike označene s 1, 2, 3, 4 i 5. Pravokutnici 1 i 2 imaju jednu zajedničku stranicu. Zbroj duljina desnih stranica pravokutnika 1, 2, 3 i 4 jednak je duljini stranice nacrtanog kvadrata. Stranica pravokutnika 1 dio je stranice pravokutnika 5, a zbroj duljine donjih stranice pravokutnika 1 i pravokutnika 5 jednak je duljini stranice nacrtanog kvadrata. Stranice pravokutnika koje se nalaze unutar kvadrata (na crtežu obojane crvenom, plavom, zelenom i smeđom bojim) u zbroju opsega pravokutnika koristimo dva puta.



Neka je a duljina stranice kvadrata. Tada je opseg svih pravokutnika jednak $4a + 2 \cdot 4a = 12a$, odakle dobivamo $a = 24$ cm. Duljina stranice kvadrata je 24 cm.

Neka je b duljina kraće, a c duljina dulje stranica istaknutog pravokutnika. Tada je

$$b = a : 4 = 24 : 4 = 6 \text{ cm} \quad \text{i} \quad c = b \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}.$$

Duljine stranica istaknutog pravokutnika su 6 cm i 18 cm, a njegova površina iznosi $6 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} = 108 \text{ cm}^2$.

8. Visine

U nekom razredu prosječna visina svih dvadeset i dvoje učenika bila je 163.5 cm. Uskoro je u razred upisan još jedan učenik pa se prosječna visina povećala za 0.3 cm, a već sljedećeg dana jedna se učenica ispisala i prosječna visina se opet povećala, ovaj put za 0.4 cm. Koliko je centimetara visoka učenica koja se ispisala?

Rezultat: **155**

Rješenje.

Označimo s $x_1, x_2, \dots, x_{22}$ visine svakog od 22 učenika. Vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{22}}{22} = 163.5 \text{ cm}$$

pa je zbroj visina svih učenika $x_1 + x_2 + \dots + x_{22} = 163.5 \cdot 22 = 3597$ cm.

Neka je x_{23} visina učenika koji se naknadno upisao u razred. Vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{22} + x_{23}}{23} = 163.5 + 0.3 = 163.8 \text{ cm.}$$

Uvrstimo li $x_1 + x_2 + \dots + x_{22} = 3597$ cm u taj izraz dobivamo:

$$\frac{3597 + x_{23}}{23} = 163.8$$

$$x_{23} = 170.4$$

Visina učenika koji se upisao je 170.4 cm.

Sada vrijedi da je zbroj visina svih 23 učenika:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{22} + x_{23} = 3597 + 170.4 = 3767.4 \text{ cm.}$$

Neka se iz razreda ispisala učenica s visinom x_1 . Iz razreda se mogao ispisati bilo koji od početnih 22 učenika. Učenik koji se naknadno upisao nije se mogao ispisati iz razreda jer bi se prosječna visina tada smanjila.

Imamo:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{22} + x_{23}) - x_1}{22} = 163.8 + 0.4 = 164.2 \text{ cm.}$$

Uvrstimo li $x_1 + x_2 + \dots + x_{23} = 3767.4$ cm dobivamo:

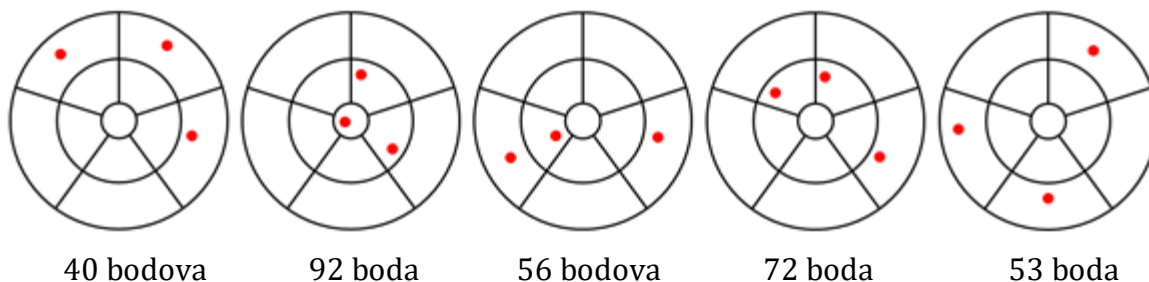
$$\frac{3767.4 - x_1}{22} = 164.2$$

$$x_1 = 155$$

Visina učenice koja se ispisala je 155 cm.

9. Pikado

Meta za pikado podijeljena je na 11 dijelova - 5 vanjskih dijelova, 5 unutarnjih dijelova i središnji krug, kao na slikama. Pogotci u različite vanjske dijelove mete donose različit broj bodova. Pogodak u unutarnji dio mete nosi dvostruko više bodova od pogotka u susjedni vanjski dio mete. Pogodak u središnji krug nosi 36 bodova.

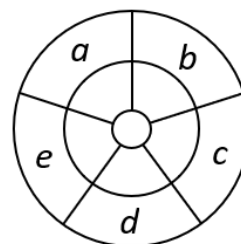


Dino trima strelicama gađa metu. Crteži prikazuju pogotke i broj bodova koje je Dino ostvario u pet različitih pokušaja. Koliki je najveći broj bodova koje Dino može ostvariti ako svakom od tri strelice pogodi različit dio mete?

Rješenje.

Označimo li broj bodova koji se dobije za pogodak u vanjski dio mete s a, b, c, d i e (vidi sliku) imamo:

1. bacanje $a + b + c = 40$
2. bacanje $2b + 2c + 36 = 92$
3. bacanje $e + 2e + c = 56$
4. bacanje $2a + 2b + c = 72$
5. bacanje $b + d + e = 53$.



Iz jednačbe $2b + 2c + 36 = 92$ dobivamo $2b + 2c = 92 - 36 = 56$.

Dijeljenjem jednačbe s 2 dobijemo $b + c = 28$.

Uvrštavanjem tog izraza u jednačbu $a + b + c = 40$ dobivamo $a + 28 = 40$, $a = 40 - 28 = 12$.

Uvrštavanjem $c = 28 - b$ i $a = 12$ u jednačbu $2a + 2b + c = 72$ imamo:

$$2 \cdot 12 + 2b + 28 - b = 72, \quad 24 + 2b + 28 - b = 72, \quad b + 52 = 72, \quad b = 72 - 52 = 20.$$

Vrijedi $c = 28 - 20 = 8$.

Iz jednačbe $e + 2e + c = 56$ dobivamo:

$$e + 2e + 8 = 56, \quad 3e = 56 - 8 = 48, \quad e = 48 : 3 = 16.$$

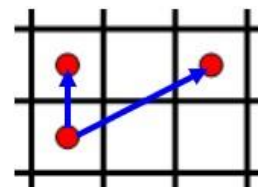
Iz jednačbe $b + d + e = 53$ dobivamo:

$$20 + d + 16 = 53, \quad d + 36 = 53, \quad d = 53 - 36 = 17.$$

Najveći broj bodova koje Dino može ostvariti ako svakom od triju strelica pogodi različit dio mete je $2 \cdot 20 + 2 \cdot 17 + 36 = 110$ bodova.

10. Figurica

Figurica se nalazi na krajnjem lijevom donjem polju ploče 9×9 . U svakom potezu figurica se pomiče za jedno polje gore ili za jedno polje gore i dva udesno, kao što je prikazano na slici. Na koliko različitih načina možemo figuricu nizom od osam poteza premjestiti u gornji redak ploče?



Rezultat: **163**

Rješenje.

Na svako polje ćemo zapisati broj načina da figurica dođe do tog polja. Promotrimo žuto označeno polje. Ako je figurica u nekom trenutku na tom polju, u prethodnom potezu je morala biti na jednom od dva zeleno označena polja u retku ispod nje. Zato ćemo u žuto polje upisati zbroj brojeva u zelenim poljima.

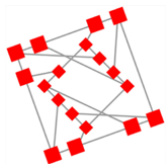
Početna pozicija figurice je označena znakom ●. S tog polja figurica može doći na dva polja u drugom retku, na svako od njih na samo jedan način, pa u ta polja upisujemo broj 1.

Tablicu dalje popunjavamo po retcima, prema gore.

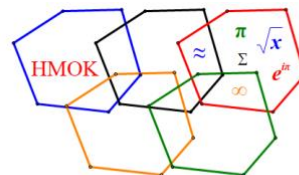
Kada popunimo tablicu treba još samo zbrojiti sve brojeve u gornjem retku:

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 = 163.$$

1		8		28		56		70
1		7		21		35		35
1		6		15		20		15
1		5		10		10		5
1		4		6		4		1
1		3		3		1		
1		2		1				
1		1						
●								



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 11. lipnja 2022.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Kazaljke

Izračunaj veličinu manjega kuta između satne i minutne kazaljke ure u 13 sati 8 minuta i 18 sekundi. Veličinu kuta izrazi u kutnim minutama.

Rezultat: **939**

Prvo rješenje.

minutna kazaljka za jedan sat opiše kut od 360°

za jednu minutu opiše kut od $6^\circ = 360'$

za jednu sekundu opiše kut od $6'$

satna kazaljka za jedan sat opiše kut od 30°

za jednu minutu opiše kut od $0.5^\circ = 30'$

za jednu sekundu opiše kut od $0.5'$

U 13 sati kazaljke zatvaraju kut od 30° jer je velika na broju 12, a mala na broju 1.

Za 8 minuta i 18 sekundi minutna kazaljka opiše kut od $8 \cdot 360' + 18 \cdot 6' = 2988'$.

Za 8 minuta i 18 sekundi satna kazaljka opiše kut od $8 \cdot 30' + 18 \cdot 0.5' = 249'$.

U 13 sati bila je razlika među kazaljicama 30° pa taj kut dodamo na $249'$

$$30^\circ + 249' = 30 \cdot 60' + 249' = 2049'$$

$$2988' - 2049' = 939'$$

Kazaljke zatvaraju kut od $939'$.

Drugo rješenje.

Minutna kazaljka u minuti prođe $360^\circ : 60 = 6^\circ$, a satna kazaljka u minuti prođe $30^\circ : 60 = 0.5^\circ$. U promatranom trenutku obje su kazaljke između oznaka „1“ i „2“.

Minutna kazaljka je oznaku „1“ prošla pred 3 min i 18 s i za to vrijeme se pomaknula za

$$\left(3 + \frac{18}{60}\right) \cdot 6^\circ = 19.8^\circ.$$

Satna je tu oznaku prošla pred 8 min i 18 s, te se pomaknula za

$$\left(8 + \frac{18}{60}\right) \cdot 0.5^\circ = 8.3 \cdot 0.5^\circ = 4.15^\circ.$$

Kut između kazaljki je $19.8^\circ - 4.15^\circ = 15.65^\circ = 939'$.

2. Najveći od uzastopnih

Zbroj 1259 uzastopnih cijelih brojeva iznosi 1259. Koliki je najveći pribrojnik?

Rezultat: **630**

Prvo rješenje.

Neka je najmanji broj označen s x .

Sljedeći broj je $x + 1$, pa $x + 2$, ..., i tako dalje do 1259. broja koji je $x + 1258$

$$x + x + 1 + x + 2 + \dots + x + 1258 = 1259x + 1 + 2 + \dots + 1258$$

$$= 1259x + \frac{1258 \cdot 1259}{2} = 1259x + 1259 \cdot 629$$

Vrijedi:

$$1259x + 1259 \cdot 629 = 1259 \quad /: 1259$$

$$x + 629 = 1$$

$$x = -628$$

Najveći pribrojnik je broj $x + 1258 = -628 + 1258 = 630$.

Drugo rješenje.

Neka je srednji broj po veličini označen s x

Prethode mu brojevi $x - 1, x - 2, \dots, x - 629$, a slijede $x + 1, x + 2, \dots, x + 629$

$$x - 629 + x - 628 + \dots + x - 1 + x + x + 1 + \dots + x + 628 + x + 629 = 1259x$$

Vrijedi: $1259x = 1259$ pa je $x = 1$.

Najveći pribrojnik je broj $x + 629 = 1 + 629 = 630$.

Treće rješenje.

Kad bismo svaki broj umanjili za 1, njihov zbroj bi bio 0.

Znajući da ih ima $1259 = 2 \cdot 629 + 1$, zaključili bismo da se radi o 629 negativnih brojeva, broju 0 i 629 pozitivnih brojeva, tj. najveći od tih brojeva bio bi 629.

To znači da je najveći promatrani broj za 1 veći, dakle 630.

3. Parne i neparne

Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna? Nula je parna znamenka.

Rezultat: **675**

Prvo rješenje.

Troznamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Neka je p parna, a n neparna znamenka troznamenkastog broja. Tada je $p \in \{0,2,4,6,8\}$ i $n \in \{1,3,5,7,9\}$.

Troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke parne ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ jer je znamenka stotica različita od nule. Troznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke neparne ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Ako iz skupa svih troznamenkastih brojeva isključimo one koji imaju sve parne ili sve neparne znamenke, preostat će brojevi koji imaju barem jednu parnu i barem jednu neparnu znamenku.

Njihov broj je $900 - 100 - 125 = 675$.

Troznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna ima 675.

Drugo rješenje.

Neka je p parna, a n neparna znamenka troznamenkastog broja. Tada je $p \in \{0,2,4,6,8\}$ i $n \in \{1,3,5,7,9\}$. Kako barem jedna znamenka mora biti parna i barem jedna znamenka neparna, traženi troznamenkasti brojevi su oblika $\overline{pnn}$, $\overline{npn}$, $\overline{nnp}$, $\overline{ppn}$, $\overline{pnp}$, $\overline{npp}$.

Brojeva oblika $\overline{pnn}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{npn}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Brojeva oblika $\overline{nnp}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Brojeva oblika $\overline{ppn}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{pnp}$ ima $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ (znamenka stotica je različita od nule).

Brojeva oblika $\overline{npp}$ ima $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Troznamenkastih brojeva kojima je barem jedna znamenka parna i barem jedna znamenka neparna ima $100 + 125 + 125 + 100 + 100 + 125 = 675$.

4. Zbroj opsega

Koliki je zbroj opsega svih međusobno nesukladnih trokuta kojima je opseg prirodan broj, a duljine dviju stranica im iznose 7 i 12?

Rezultat: **403**

Rješenje.

U svakom trokutu vrijedi: zbroj duljina dviju stranica veći je od duljine preostale stranice.

Zadane su stranice duljina 7 i 12. Treća stranica ne može biti duljine 5 niti kraća jer je $7 + 5 = 12$. Također, treća stranica ne može biti 19 niti dulja jer je $7 + 12 = 19$.

Duljina treće stranice je iz skupa $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$.

Postoji ukupno 13 takvih trokuta.

U zbroju opsega svih trokuta po 13 puta imamo stranice duljina 7 i 12 i po jednom svaku duljinu iz skupa $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$$6 + 7 + \dots + 17 + 18 = 156$$

$$13 \cdot (7 + 12) = 13 \cdot 19 = 247$$

$$247 + 156 = 403$$

Zbroj opsega svih takvih trokuta iznosi 403.

5. Visine

U nekom razredu prosječna visina svih dvadeset i dvoje učenika bila je 163.5 cm. Uskoro je u razred upisan još jedan učenik pa se prosječna visina povećala za 0.3 cm, a već sljedećeg dana jedna se učenica ispisala iz razreda i prosječna visina se opet povećala, ovaj put za 0.4 cm. Koliko je centimetara visoka učenica koja se ispisala?

Rezultat: **155**

Prvo rješenje.

Neka je a zbroj visina dvadeset i dvoje učenika.

Vrijedi: $\frac{a}{22} = 163.5$ pa je $a = 163.5 \cdot 22$ odnosno $a = 3597$.

Neka je y visina upisanog učenika.

Tada je zbroj visina svih dvadeset i troje učenika $y + 3597$, a prosječna visina $163.5 + 0.3 = 163.8$, pa vrijedi: $\frac{y+3597}{23} = 163.8$.

Odatle dobivamo $y + 3597 = 163.8 \cdot 23 = 3767.4$.

Neka je x visina učenice koja se ispisala.

Tada je zbroj visina preostalih dvadeset i dvoje učenika $3767.4 - x$,

a njihova prosječna visina $163.8 + 0.4 = 164.2$.

Zato vrijedi: $\frac{3767.4-x}{22} = 164.2$, pa slijedi

$$3767.4 - x = 164.2 \cdot 22 = 3612.4, \quad x = 3767.4 - 3612.4 = 155$$

Visina učenice koja se ispisala je 155 cm.

Drugo rješenje.

Zadatak možemo riješiti rješavanjem „unatrag“

Prosječna visina se povećala dva puta pa konačna iznosi $163.5 + 0.3 + 0.4 = 164.2$.

Neka je a zbroj visina dvadeset i dvoje učenika nakon što se ispisala učenica.

Vrijedi: $\frac{a}{22} = 164.2$, pa je $a = 164.2 \cdot 22 = 3612.4$

Neka je x visina učenice koja se ispisala.

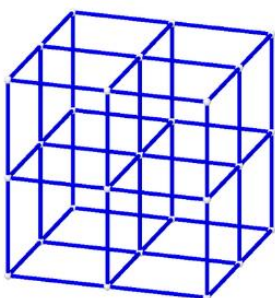
Kada je ta učenica bila u razredu, zbroj visina svih dvadeset i troje učenika bio je $x + 3612.4$, a prosječna visina $163.5 + 0.3 = 163.8$.

Vrijedi: $\frac{x+3612.4}{23} = 163.8$, pa slijedi $x + 3612.4 = 163.8 \cdot 23 = 3767.4$

i konačno $x = 3767.4 - 3612.4 = 155$

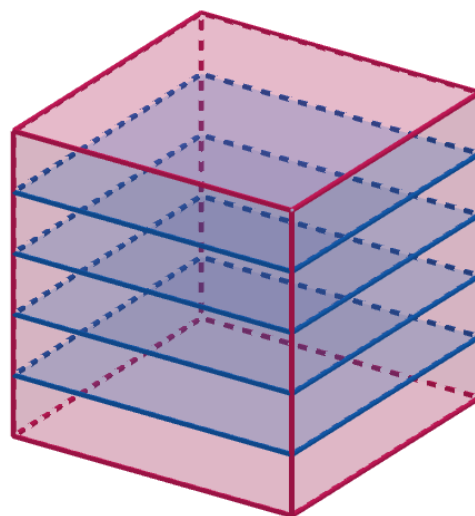
Visina učenice koja se ispisala je 155 cm.

6. Kocka od štapića



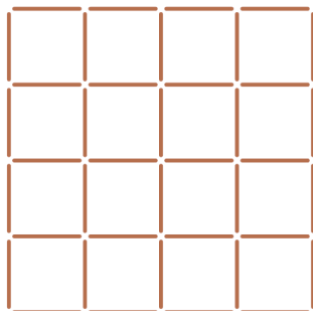
Rezultat: 756

Od štapića se izrađuju kocke. Za kocku $1 \times 1 \times 1$ potrebno je 12 štapića. Da bismo tu kocku dopunili do kocke $2 \times 2 \times 2$ potrebna su dodatna 42 štapića (vidi sliku). Koliko je dodatnih štapića potrebno da bismo kocku $8 \times 8 \times 8$ dopunili do kocke $9 \times 9 \times 9$?



Prvo rješenje.

Promotrimo kocku dimenzija $n \times n \times n$ i odredimo od koliko je ona štapića napravljena. Uočimo da su neki štapići postavljeni vertikalno, a ostali su raspoređeni u horizontalnim ravninama.



Tih ravnina ima $n + 1$. U svakoj od njih štapići formiraju kvadrat $n \times n$. Uočavamo štapiće u dva smjera, u svakom smjeru je $n + 1$ niz od po n štapića. Dakle, svaki od kvadrata $n \times n$ sačinjen je od $2n \cdot (n + 1)$ štapića. Ukupno je u horizontalnim ravninama $2n \cdot (n + 1)^2$ štapića.

Još trebamo prebrojati vertikalne štapiće. Uočimo da se nad svakom točkom kvadrata u donjoj ravnini nalazi vertikalna od n štapića. To znači da je vertikalnih štapića ukupno $(n + 1)^2 \cdot n$.

Dakle, kocka $n \times n \times n$ napravljena je od $3n \cdot (n + 1)^2$ štapića.

Kocka $8 \times 8 \times 8$ sastoji se od $3 \cdot 8 \cdot 9^2 = 1944$, a štapića, a kocka $9 \times 9 \times 9$ od $3 \cdot 9 \cdot 10^2 = 2700$.

Za dopunu je potrebno $2700 - 1944 = 756$ štapića.

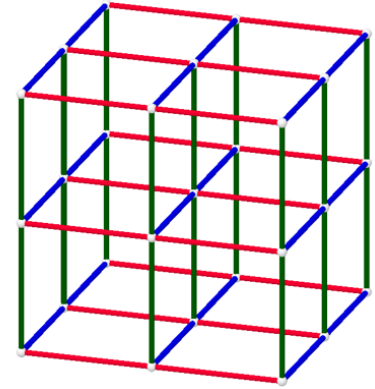
Drugo rješenje.

Kocka ima 12 bridova pa je za kocku dimenzija $1 \times 1 \times 1$ potrebno 12 štapića. Za kocku dimenzija $2 \times 2 \times 2$ potrebno je $12 + 42 = 54$ štapića. Oni su raspoređeni ovako:

- 12 bridova, za svaki brid 2 štapića, ukupno 24 štapića
- 6 strana, na svakoj strani dodatna $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ štapića (bez bridova), ukupno 24 štapića
- štapići unutar kocke koji povezuju nasuprotne strane, 3 para nasuprotnih strana povezanih s $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ štapića, ukupno 6 štapića

Za kocku dimenzija $8 \times 8 \times 8$ potrebno je 1944 štapića:

- 12 bridova, za svaki brid 8 štapića, ukupno 96 štapića
- 6 strana, na svakoj strani dodatna $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ štapića (bez bridova), ukupno 672 štapića
- štapići unutar kocke koji povezuju nasuprotne strane, 3 para nasuprotnih strana povezanih s $8 \cdot 7 \cdot 7 = 392$ štapića, ukupno 1176 štapića



Za kocku dimenzija $9 \times 9 \times 9$ potrebno je 2700 štapića:

- 12 bridova, za svaki brid 9 štapića, ukupno 108 štapića
- 6 strana, na svakoj strani dodatna $2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$ štapića (bez bridova), ukupno 864 štapića
- štapići unutar kocke koji povezuju nasuprotne strane, 3 para nasuprotnih strana povezanih s $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ štapića, ukupno 1728 štapića

Konačno, $2700 - 1944 = 756$, što znači da je za nadopunjavanje kocke potrebno 756 štapića.

7. Prirodni razlomak

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je razlomak

$$\frac{6n + 900}{2n - 3}$$

prirodan broj?

Rezultat: 672

Rješenje.

Vrijedi

$$\frac{6n + 900}{2n - 3} = \frac{3(2n - 3) + 909}{2n - 3} = 3 + \frac{909}{2n - 3}$$

Dani razlomak $\frac{6n+900}{2n-3}$ je prirodan točno onda kada je prirodan razlomak $\frac{909}{2n-3}$.

Razlomak $\frac{909}{2n-3}$ je prirodan ako je $(2n - 3)$ djelitelj broja 909.

Kako je $909 = 3 \cdot 3 \cdot 101$, djelitelji broja 909 su: 1, 3, 9, 101, 303, 909.

Zato postoji šest mogućnosti:

$$2n - 3 = 1 \quad n = 2$$

$$2n - 3 = 3 \quad n = 3$$

$$2n - 3 = 9 \quad n = 6$$

$$2n - 3 = 101 \quad n = 52$$

$$2n - 3 = 303 \quad n = 153$$

$$2n - 3 = 909 \quad n = 456$$

$$2 + 3 + 6 + 52 + 153 + 456 = 672$$

Zbroj svih traženih brojeva iznosi 672.

8. Drvene brojke

Mali Marko se igra brojkama izrađenima od drva. On ima dvije brojke 1, sedam brojki 2 i jednu brojku 3. Želi ih nanizati jednu do druge tako da brojke 1 i 3 ne budu susjedne. Koliko različitih deseteroznamenastih brojeva Marko može dobiti na taj način?

Rezultat: **224**

Prvo rješenje.

Tekst rješenja Ako se brojka 3 nalazi na prvom mjestu, nakon nje treba biti 2. Sljedećih 8 mjesta popunjavaju dvije brojke 1 i ostalih 6 dvojki. Dovoljno je pogledati na koliko načina možemo smjestiti 2 dvojke na 2 od mogućih 8 mjesta. To je moguće na $8 \cdot 7 : 2 = 28$ načina.

Ako se brojka 3 nalazi na drugom mjestu, ispred i iza njega treba biti po jedna dvojka. Preostalih 5 dvojki i dvije jedinice treba razmjestiti na ostalih 7 mjesta. Dovoljno je odrediti na koliko se načina mogu smjestiti 2 jedinice na 2 od mogućih 7 mjesta, a to je na $7 \cdot 6 : 2 = 21$ način.

Ako se brojka 3 nalazi na 3., 4., ..., 9. mjestu, bit će jednako toliko načina.

Ako se brojka 3 nalazi na posljednjem, desetom mjestu, broj načina je jednak kao i kad je na 1. mjestu.

Ukupan broj načina je, dakle, $2 \cdot 28 + 8 \cdot 21 = 56 + 168 = 224$.

Drugo rješenje.

Ako se brojka 3 nalazi na prvom mjestu, nakon nje treba biti 2. Sljedećih 8 mjesta popunjavaju dvije brojke 1 i ostalih 6 dvojki. Dovoljno je pogledati na koliko načina možemo smjestiti 2 dvojke na 2 od mogućih 8 mjesta. To je moguće na $8 \cdot 7 : 2 = 28$ načina.

Jednako je toliko, tj. 28 načina u kojima se brojka 3 nalazi na posljednjem mjestu.

Ako se brojka 3 nalazi na drugom mjestu, ispred i iza njega treba biti po jedna dvojka. U tom slučaju niz 232 promatramo kao jednu cjelinu koja se ne razdvaja. Uz taj niz 232, treba smjestiti još 2 jedinice i preostalih 5 dvojki.

Ako niz 232 smjestimo na početak, ostaje još 2 jedinice i 5 dvojki koje možemo smjestiti na $7 \cdot 6 : 2 = 21$ način (dovoljno je odrediti na koliko načina se mogu smjestiti 2 jedinice na 2 od mogućih 7 mjesta). Za bilo koji od 21 načina smještanja 2 jedinice i 5 dvojki niz 232 možemo pomicati na osam mogućih položaja: na početak, između prve i druge brojke, između druge i treće,..., nakon sedme brojke. Tako se dobiva $8 \cdot 21 = 168$ načina u kojima brojka 3 nije ni na prvom ni na posljednjem mjestu.

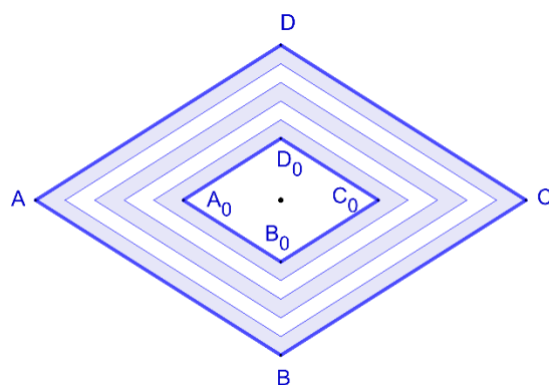
Ukupno je to $28 + 28 + 168 = 224$ načina.

9. Rombovi

Romb $A_0B_0C_0D_0$ nalazi se unutar romba $ABCD$ tako da su im stranice usporedne, a središta u istoj točki. Dužine $\overline{AA_0}$, $\overline{BB_0}$, $\overline{CC_0}$ i $\overline{DD_0}$ podijeljene su na pet sukladnih dijelova. Dobivene točke spojene su dužinama usporednim sa stranicama danih rombova i tako su nastala četiri nova romba.

Površina romba $ABCD$ je 2250 cm^2 , a površina romba $A_0B_0C_0D_0$ iznosi 810 cm^2 .

Kolika je ukupna obojena površina na slici?



Rezultat: 864

Prvo rješenje.

Zbog simetričnosti promatrat ćemo četvrtinu tražene površine, kao što prikazuje slika. Uočavamo 6 pravokutnih trokuta, čije površine označimo, počevši od najmanje, s $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$.

Uz oznake kao na slici, vrijedi:

$$P_0 = \frac{1}{2} a \cdot b,$$

$$P_1 = \frac{1}{2} (a + x) \cdot (b + y) = \frac{1}{2} (ab + ay + xb + xy)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (a + 2x) \cdot (b + 2y) = \frac{1}{2} (ab + 2ay + 2xb + 4xy)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (a + 3x) \cdot (b + 3y) = \frac{1}{2} (ab + 3ay + 3xb + 9xy)$$

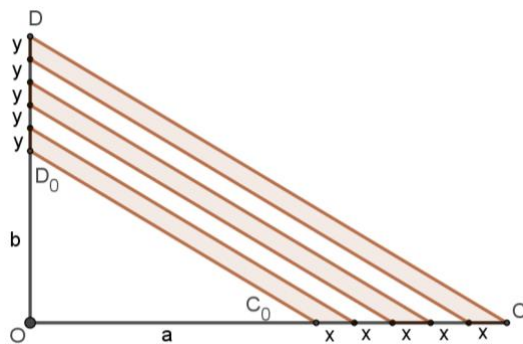
$$P_4 = \dots = \frac{1}{2} (ab + 4ay + 4xb + 16xy)$$

$$P_5 = \dots = \frac{1}{2} (ab + 5ay + 5xb + 25xy)$$

Površina najmanjeg obojenog četverokuta je $P_1 - P_0 = \frac{1}{2} (ay + xb + xy)$

Površina sljedećeg po veličini obojenog četverokuta je $P_3 - P_2 = \frac{1}{2} (ay + xb + 5xy)$

Površina najvećeg obojenog četverokuta je $P_5 - P_4 = \frac{1}{2} (ay + xb + 9xy)$



Zbroj svih triju površina je $\frac{1}{2}(3ay + 3xb + 15xy) = \frac{3}{2}(ay + xb + 5xy)$

Budući da je,

$$P_5 - P_0 = \frac{1}{2}(ab + 5ay + 5xb + 25xy) - \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}(5ay + 5xb + 25xy) \\ = \frac{5}{2}(ay + xb + 5xy),$$

može se uočiti da je zbroj triju obojenih četverokuta zapravo jednak $\frac{3}{5}(P_5 - P_0)$.

Iz zadanih površina najvećeg i najmanjeg romba izračunajmo razliku površina najvećeg i najmanjeg trokuta:

$$P_5 - P_0 = \frac{1}{4}(2250 - 810) = 360 \text{ cm}^2$$

Zato je $\frac{3}{5}(P_5 - P_0) = 216 \text{ cm}^2$. Ukupna obojena površina iznosi $4 \cdot 216 = 864 \text{ cm}^2$.

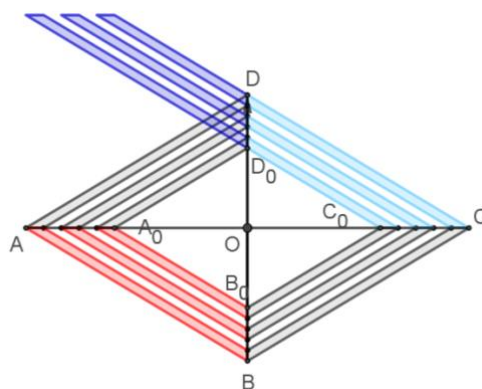
Drugo rješenje.

Pomaknemo li trapez ABB_0A_0 s obojanim crvenim „trakama“ na mjesto tamnoplavih traka na slici, te tako nadopunimo svijetloplave trake, dobivamo 3 sukladna paralelograma, sastavljena od svijetloplavog i tamnoplavog dijela, između kojih se nalaze još dva takva bijela paralelograma.

Jasno je da plavi dio čini $\frac{3}{5}$ površine koja čini polovinu razlike površina najvećeg i najmanjeg romba.

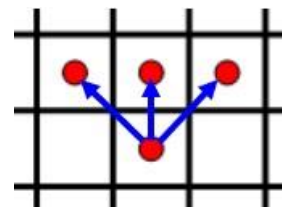
Isto tako vrijedi za preostala dva dijela u kojima sivi dio čini $\frac{3}{5}$ preostale površine.

Prema tome, ukupna obojana površina čini $\frac{3}{5}$ razlike površina početnih rombova, a to je $\frac{3}{5} \cdot (2250 - 810) = 864 \text{ cm}^2$.



10. Figurica

Figurica se nalazi na srednjem polju donjeg retka ploče 7×7 . U svakom potezu figurica se pomiče za jedno polje prema gore ili gore-lijevo ili gore-desno, kao što je prikazano na slici. Na koliko različitih načina možemo figuricu nizom od šest poteza premjestiti u gornji redak ploče?



Rezultat: **659**

Rješenje.

Na svako polje ćemo zapisati broj načina da figurica dođe do tog polja. Promotrimo žuto označeno polje. Ako je figurica u nekom trenutku na tom polju, u prethodnom potezu je morala biti na jednom od tri plavo označena polja u retku ispod nje. Zato ćemo u žuto polje upisati zbroj brojeva u plavim poljima.

Počinjemo sa srednjim poljem donjeg retka, tj. s početnim položajem figurice, gdje upisujemo broj 1. Tablicu dalje popunjavamo po retcima, od donjeg prema gore.

Kada popunimo tablicu treba još samo zbrojiti sve brojeve u gornjem retku:

$$44 + 89 + 126 + 141 + 126 + 89 + 44 = 659.$$

44	89	126	141	126	89	44
14	30	45	51	45	30	14
4	10	16	19	16	10	4
1	3	6	7	6	3	1
	1	2	3	2	1	
		1	1	1		
			1			