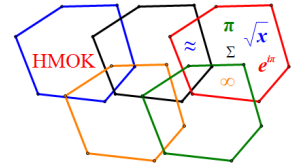


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Profesor Baltazar ima stroj koji je programiran na način:

- u stroj se upisuje prirodan broj n (nula nije prirodan broj),
- ako je broj n paran, stroj ga podijeli s 2 i ispiše rezultat, a
- ako je broj neparan, stroj ga pomnoži s 3, dobivenom broju doda 1 i ispiše rezultat.

Profesor Baltazar je u stroj upisao jedan broj, potom je ispisani rezultat ponovno upisao u taj stroj pa je taj postupak ponovio više puta. Nakon šestog upisivanja, stroj je ispisao broj 4. Odredi sve moguće početne vrijednosti koje je profesor Baltazar mogao upisati u stroj.

Rješenje.

Način rada stroja može se prikazati ovako:

ulaz	n	
	n je paran broj	n je neparan broj
izlaz	$n : 2$	$3 \cdot n + 1$

Ako je dobiven rezultat m , onda je ulaz mogao biti $2m$ ili $(m - 1) : 3$ ovisno o tome je li upisani broj paran ili neparan.

Rezultat 4 može se pojaviti ako je na ulazu bio broj $8 = 2 \cdot 4$ ili broj $1 = (4 - 1) : 3$.

Rezultat 8 možemo dobiti samo od broja 16, jer broj $8 - 1 = 7$ ne možemo podijeliti s 3 bez ostatka. Broj 1 možemo dobiti samo od broja 2, jer na ulazu ne može biti 0.

Rezultat 16 može se dobiti na dva načina, ako je na ulazu 32 ili 5.

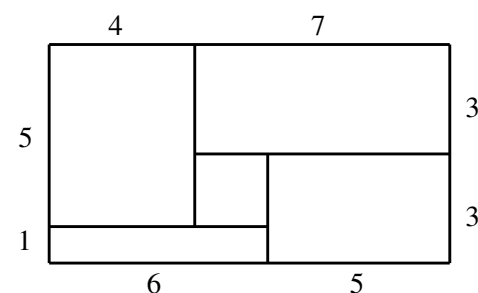
Sličnim razmišljanjem dobivamo „stablo“ mogućih međurezultata sve do polaznih brojeva.

Početne vrijednosti koje je profesor Baltazar mogao upisati u stroj su: 4, 5, 6, 32, 40, 42 i 256.

$$8x + 5 = 8013, 8x = 8008, \text{ odnosno } x = 1001.$$

3. Roza ima vrt koji je podijeljen na pravokutne dijelove kao na slici (označene su dimenzije u metrima). U svaki dio vrta planira posaditi različitu vrstu cvijeća. Posadit će begonije, ljiljane, dalije, ruže i irise i to po jednu biljku na svaki kvadratni metar vrta.

O cijenama se raspitala kod susjede Mirte. Lukovice irisa prodaju se samo u paketima po 5 komada, a sadnice ostalog cvijeća prodaju se po komadu. Mirta je tri sadnice begonija platila 39 kn, četiri sadnice ljiljana 73 kn, dvije sadnice dalija 75 kn, dvije sadnice ruža 83 kn, a paket od pet lukovica irisa 104 kn. Koliki je najmanji iznos koji Roza treba potrošiti za kupnju cvijeća, a da pritom u svom vrtu posadi sve kupljene sadnice i lukovice?

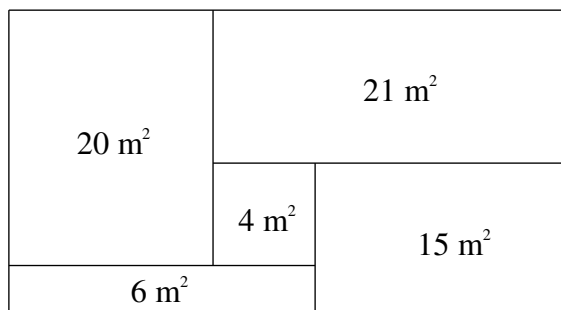


Rješenje.

Najprije treba odrediti površine svakog dijela vrta.

Dimenzije neoznačenog pravokutnika su $6 - 4 = 2$ m i $3 - 1 = 2$ m.

Površine pojedinih dijelova označene su na slici:



Irisi se prodaju u paketima po 5 komada pa ih Roza mora zasaditi na dio površine 15 m^2 ili 20 m^2 .

Odredimo cijene cvijeća (po komadu) i poredajmo ih od najmanje do najveće.

sadnica begonije	$39 \text{ kn} : 3 = 13 \text{ kn}$
sadnica ljiljana	$73 \text{ kn} : 4 = 18 \text{ kn i } 25 \text{ lp}$
sadnica dalija	$75 \text{ kn} : 2 = 37 \text{ kn i } 50 \text{ lp}$
sadnica ruže	$83 \text{ kn} : 2 = 41 \text{ kn i } 50 \text{ lp}$
lukovica irisa	$104 \text{ kn} : 5 = 20 \text{ kn i } 80 \text{ lp}$

Poredak vrsta cvijeća po cijenama (po komadu) od najmanje do najveće:

sadnica begonije, sadnica ljiljana, lukovica irisa, sadnica dalija, sadnica ruže.

Ukupni trošak će biti najmanji ako se na veće površine sadi jeftinije cvijeće, a na manje površine skuplje cvijeće. Najbolji bi odabir bio:

- begonije na površinu 21 m^2
- ljiljane na površinu 20 m^2
- irisi na površinu 15 m^2
- dalije na površinu 6 m^2
- ruže na površinu 4 m^2

Uočimo da su irisi na površini od 15 m^2 , pa će sve lukovice biti iskorištene.

	površina	Mirta	cijena za Rozin vrt
begonije	21 m ²	3 za 39 kn	$7 \cdot 39 = 273$ kn
ljiljani	20 m ²	4 za 73 kn	$5 \cdot 73 = 365$ kn
irisi	15 m ²	5 za 104 kn	$3 \cdot 104 = 312$ kn
dalije	6 m ²	2 za 75 kn	$3 \cdot 75 = 225$ kn
ruže	4 m ²	2 za 83 kn	$2 \cdot 83 = 166$ kn

ukupno: $273 + 365 + 312 + 225 + 166 = 1341$ kn

Roza će potrošiti najmanje 1341 kn.

4. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10 000 koji imaju točno tri jednake znamenke?

Prvo rješenje.

Takvi brojevi mogu biti troznamenkasti i četveroznamenkasti.

Troznamenkastih ima 9 (to su brojevi 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 i 999).

Četveroznamenkasti brojevi s tri jednake znamenke mogu biti oblika $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$ i $\overline{baaa}$.

Da bismo odredili koliko je brojeva oblika $\overline{aaab}$, uočimo da znamenke a i b moraju biti različite, a a ne može biti 0. To znači da znamenku a možemo odabrati na 9 načina (bilo koja znamenka osim 0), a zatim i znamenku b na 9 načina (bilo koja osim a). Dakle, brojeva oblika $\overline{aaab}$ ima $9 \cdot 9 = 81$.

Na isti način zaključujemo da i brojeva oblika $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$ ima po 81, a isto vrijedi i za brojeve oblika $\overline{baaa}$ samo što sada prvo biramo b (različito od 0), a zatim a (različito od b).

Ukupno postoje $4 \cdot 81 = 324$ četveroznamenkasta broja s tri jednake znamenke.

Ukupno postoje $324 + 9 = 333$ broja manja od 10 000 s tri jednake znamenke.

Drugo rješenje.

Takvi brojevi mogu biti troznamenkasti i četveroznamenkasti.

Troznamenkastih ima 9 (to su brojevi 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 i 999).

Ako četveroznamenkasti broj ima tri znamenke 1, onda te znamenke mogu biti raspoređene na četiri načina: $\overline{a111}$, $\overline{1a11}$, $\overline{11a1}$, $\overline{111a}$.

Brojeva oblika $\overline{a111}$ ima 8, jer a mora biti različit od 0 i 1.

Brojeva oblika $\overline{1a11}$ ima 9 jer a može biti bilo koja znamenka različita od 1.

Brojeva oblika $\overline{11a1}$ ima također 9 (a nije 1).

Brojeva oblika $\overline{111a}$ ima također 9 (a nije 1).

Za znamenku 1, takvih je brojeva $8 + 9 + 9 + 9 = 35$.

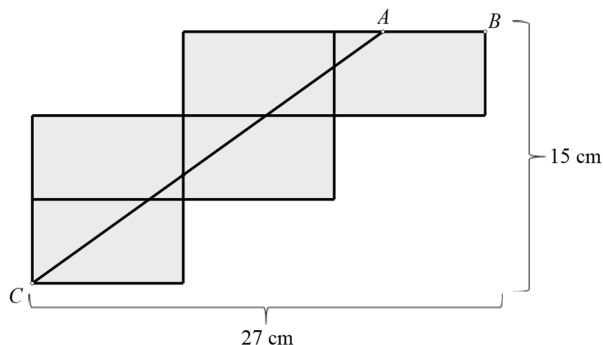
Analogno za svaku od znamenka 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ili 9 možemo zaključiti da takvih brojeva ima 35.

Ako četveroznamenkasti broj ima tri znamenke 0, onda to moraju biti znamenke stotica, desetica i jedinica, dok znamenka tisućica može biti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9. Takvih je brojeva ukupno 9.

Četveroznamenkastih brojeva koji imaju točno tri jednake znamenke ima $9 \cdot 35 + 9 = 324$.

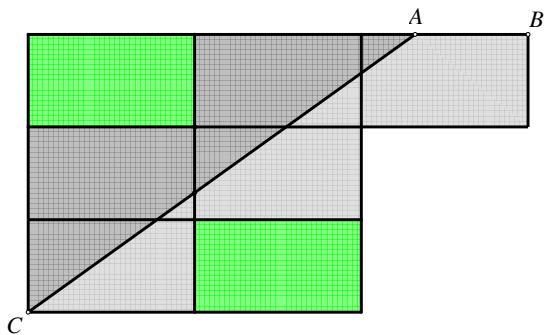
Ukupan broj brojeva manjih od 10 000 s tri jednake znamenke je $9 + 324 = 333$.

5. Pet jednakih pravokutnika raspoređeno je tako da tvore lik duljine 27 cm i širine 15 cm, kao što je prikazano na slici. Unutar dobivenog lika nacrtana je dužina $\overline{AC}$ koja taj lik dijeli na dva dijela jednakih površina. Odredi duljinu dužine $\overline{AB}$.



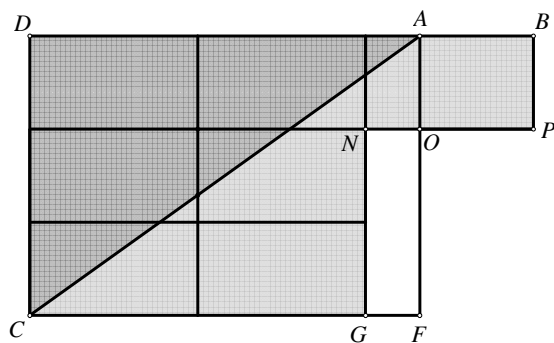
Prvo rješenje.

Dimenzije svakog od pravokutnika su $27 : 3 = 9$ cm i $15 : 3 = 5$ cm. Osjenčanom liku dočrtajmo dva pravokutnika na način prikazan na slici.



Kako su ti pravokutnici jednakih površina, dužina $\overline{AC}$ dijeli novodobiveni lik na dva dijela jednakih površina.

Nacrtajmo dužinu $\overline{AF}$ tako da $CFAD$ bude pravokutnik. Dužina $\overline{AC}$ dijeli taj pravokutnik na dva dijela jednakih površina.



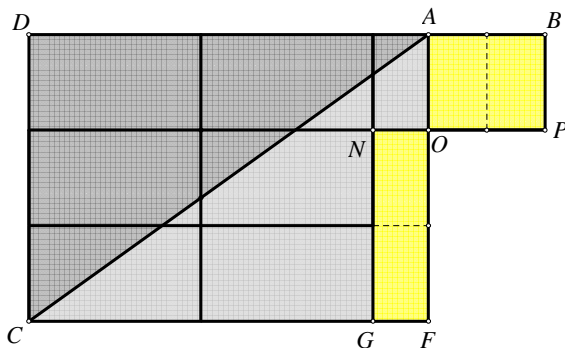
Kako su površine trokuta CFA i CAD jednake, zaključujemo da je površina trokuta CFA jednaka površini polovine novog lika koja je obojena svijetlosivom bojom.

To znači da je površina svijetlosivog dijela izvan pravokutnika $CFAD$ jednaka je površini bijelog dijela unutar tog pravokutnika. Drugim riječima, površine pravokutnika $GFON$ i $OPBA$ međusobno su jednake.

No, širina pravokutnika $OPBA$ upola je manja od širine pravokutnika $GFON$ ($|FO| = 2|AO|$), pa je njegova visina dvostruko veća ($|OP| = 2|NO|$).

$$\begin{aligned} \text{Vrijedi } |NO| + |OP| &= |NP| = 9 \text{ cm,} \\ |NO| + 2|NO| &= 9 \text{ cm} \\ 3|NO| &= 9 \text{ cm} \\ |NO| &= 3 \text{ cm} \\ |OP| &= 6 \text{ cm} \\ |AB| &= 6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi 6 cm.



Drugo rješenje.

Dimenzije svakog od pravokutnika su $27 : 3 = 9 \text{ cm} = 90 \text{ mm}$ i $15 : 3 = 5 \text{ cm} = 50 \text{ mm}$, pa je površina svakog 4500 mm^2 .

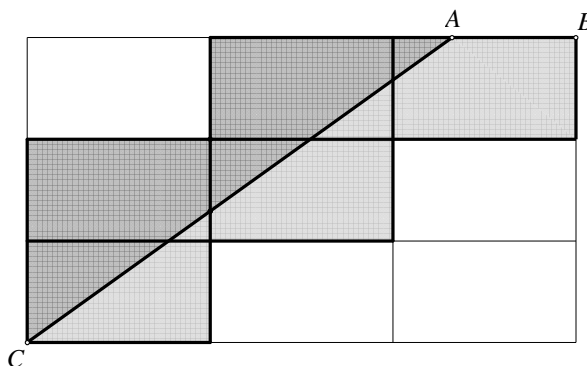
Smjestimo dobiveni lik u pravokutnu mrežu i osjenčamo dijelove jednakih površina. Odredimo površinu P svakog od tih dijelova.

Vrijedi:

$$2P = 5 \cdot 4500 \text{ mm}^2 = 22500 \text{ mm}^2$$

pa je

$$P = 11250 \text{ mm}^2$$



Uočimo sada pravokutni trokut koji se sastoji od tamnije osjenčanog dijela i jednog dodatnog pravokutnika. Njegova je površina

$$P + 4500 = 11250 + 4500 = 15750 \text{ mm}^2.$$

Označimo s x duljinu dužine $\overline{AD}$, vrijedi:

$$150 \cdot (180 + x) : 2 = 15750$$

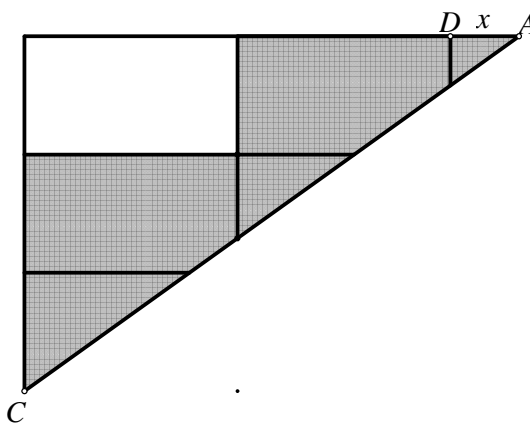
$$150 \cdot (180 + x) = 31500$$

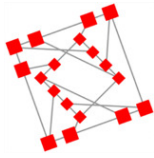
$$15 \cdot (180 + x) = 3150$$

$$180 + x = 210$$

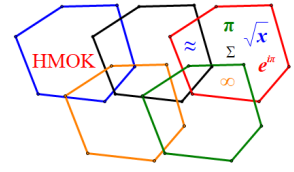
$$x = 30 \text{ mm} = 3 \text{ cm}$$

Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi $9 - 3 = 6 \text{ cm}$.





Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. U punoj šalici nalazi se 3 dl bijele kave. Omjer količina mlijeka i kave u toj smjesi je 3 : 2. Marko je popio šestinu bijele kave te je šalicu do vrha dopunio mlijekom. Nakon toga je popio petinu bijele kave te je šalicu ponovo dopunio do vrha tako da je ulio pet puta više mlijeka nego kave. Nakon što je treći puta popio dio bijele kave, šalica je do svoje trećine napunjena bijelom kavom. Koliko će mlijeka biti u šalici nakon što Marko opet do vrha šalice ulije mlijeko?

Prvo rješenje.

Omjer količina mlijeka i kave u smjesi je 3 : 2 pa iz toga zaključujemo da je ukupno $3 + 2 = 5$

jednakih dijelova. Dakle, u šalici je $\frac{3}{5}$ mlijeka i $\frac{2}{5}$ kave.

$\frac{3}{5}$ od 3 dl je 1.8 dl, $3 \text{ dl} - 1.8 \text{ dl} = 1.2 \text{ dl}$.

Na početku je u šalici 1.8 dl mlijeka i 1.2 dl kave.

$\frac{1}{6}$ od 1.8 dl je 0.3 dl, $\frac{1}{6}$ od 1.2 dl je 0.2 dl.

Nakon prvog ispijanja u šalici ima $1.8 \text{ dl} - 0.3 \text{ dl} = 1.5 \text{ dl}$ mlijeka i $1.2 \text{ dl} - 0.2 \text{ dl} = 1 \text{ dl}$ kave.

Do pune šalice nedostaje još $3 \text{ dl} - (1.5 \text{ dl} + 1 \text{ dl}) = 0.5 \text{ dl}$ tekućine.

Kada se šalica dopuni s 0.5 dl mlijeka u šalici je 2 dl mlijeka i 1 dl kave.

$\frac{1}{5}$ od 2 dl je 0.4 dl, $\frac{1}{5}$ od 1 dl je 0.2 dl.

Nakon drugog ispijanja u šalici ima $2 \text{ dl} - 0.4 \text{ dl} = 1.6 \text{ dl}$ mlijeka i $1 \text{ dl} - 0.2 \text{ dl} = 0.8 \text{ dl}$ kave.

Do pune šalice nedostaje još $3 \text{ dl} - (1.6 \text{ dl} + 0.8 \text{ dl}) = 0.6 \text{ dl}$ tekućine.

Kako je u šalicu uliveno pet puta više mlijeka nego kave, to znači da je uliveno 0.5 dl mlijeka i 0.1 dl kave. U šalici je, nakon dopunjavanja, 2.1 dl mlijeka i 0.9 dl kave.

Ako je šalica do svoje trećine napunjena bijelom kavom, to znači da je popijeno $\frac{2}{3}$ bijele kave, dok je u šalici ostala $\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{3}$ od 2.1 dl je 0.7 dl, $\frac{1}{3}$ od 0.9 dl je 0.3 dl.

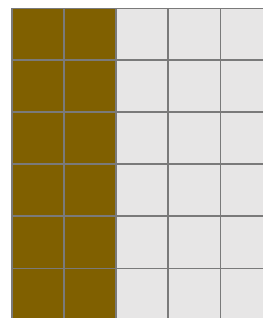
Nakon trećeg ispijanja u šalici ima 0.7 dl mlijeka i 0.3 dl kave. Dakle, u šalici je 1 dl bijele kave i treba uliti 2 dl mlijeka da bi šalica bila puna.

Nakon dolijevanja mlijeka u šalici će biti $0.7 \text{ dl} + 2 \text{ dl} = 2.7 \text{ dl}$ mlijeka.

Drugo rješenje.

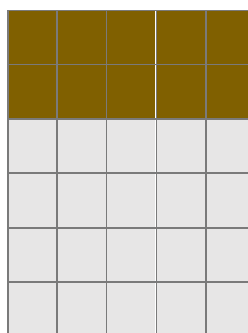
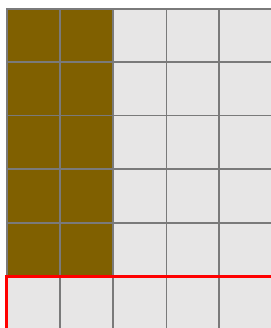
Ukupnu količinu bijele kave treba podijeliti na 5 jednakih dijelova kako bismo označili da su tri dijela mlijeka, te dva dijela kave. Tu količinu kasnije želimo dijeliti na šest dijelova, pa ćemo zato šalicu prikazati kao pravokutnik dimenzija 5×6 . Jedan kvadratić prikazuje $3 \text{ dl} : 30 = 0.1 \text{ dl}$.

Na slici desno je prikazan sadržaj šalice na početku.

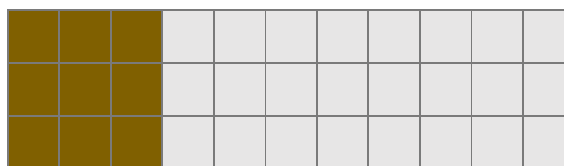
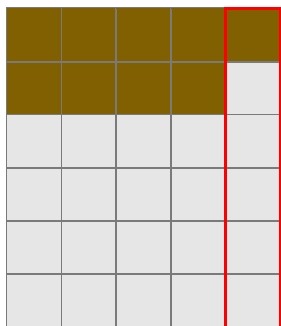


Nakon ispijanja jedne šestine bijele kave, šalina je dopunjena mlijekom.

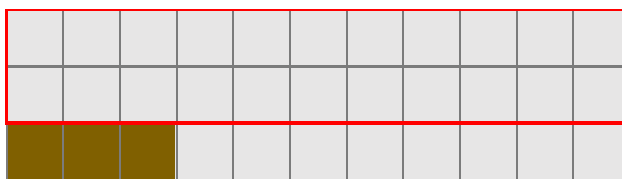
Jedan redak predstavlja šestinu šalice i njega ćemo cijelog ispuniti mlijekom (slika dolje lijevo). Budući da se kava i mlijeko ravnomjerno raspoređuju u šalici, situaciju možemo prikazati kao na slici dolje desno.



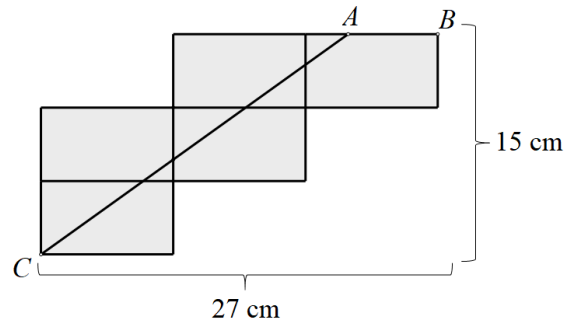
Sada je Marko popio petinu bijele kave, a dopunio ju je s pet puta više mlijeka nego kave. Jedan stupac prikazuje jednu petinu šalice, a prilikom dopunjavanja njega trebamo ispuniti tako da pet kvadratića zauzima mlijeko, a jedan kvadratić kava (slika dolje lijevo). Istu situaciju možemo prikazati pomoću pravokutnika dimenzija 3×10 (slika dolje desno) jer će tako kava i mlijeko biti ravnomjerno raspoređeni i moći ćemo odvojiti jednu trećinu.



Treći put Marko je u šalici ostavio jednu trećinu bijele kave i dopunio do vrha mlijekom. Jedan redak prikazuje trećinu šalice, pa dva cijela retka zamijenimo mlijekom i tako dobivamo konačnu situaciju. Prebrajanjem kvadratića zaključujemo da je u šalici 2.7 dl mlijeka i 0.3 dl kave.



2. Pet međusobno sukladnih pravokutnika raspoređeno je tako da tvore lik duljine 27 cm i širine 15 cm, kao što je prikazano na slici. Unutar dobivenog lika nacrtana je dužina $\overline{AC}$ koja taj lik dijeli na dva dijela jednakih površina. Odredi duljinu dužine $\overline{AB}$.



Prvo rješenje.

Duljine stranica pravokutnika su $27 : 3 = 9$ cm i $15 : 3 = 5$ cm. Njegova površina je $9 \cdot 5 = 45$ cm². Površina lika koji se sastoji od pet takvih pravokutnika je $5 \cdot 45 = 225$ cm², a pola te površine iznosi $225 : 2 = 112.5$ cm².

Neka je $|AB| = x$.

Kada bi se dio lika iznad dužine $\overline{AC}$ nadopunio još jednim takvim pravokutnikom, dobio bi se pravokutan trokut površine $112.5 + 45 = 157.5$ cm² s katetama duljina 15 i $27 - x$.

Površina tog pravokutnog trokuta jednaka je polovini površine pravokutnika sa stranicama istih duljina pa imamo

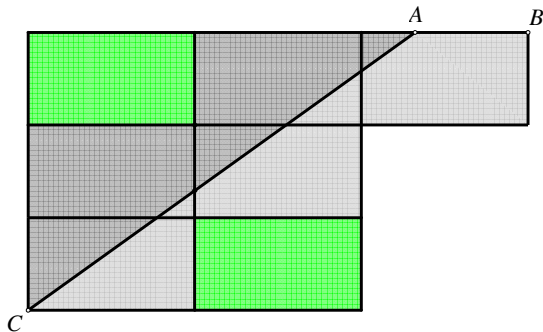
$$\begin{aligned} 15 \cdot (27 - x) : 2 &= 157.5 \\ 15 \cdot (27 - x) &= 315 \\ 27 - x &= 21 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Duljina dužine $\overline{AB}$ je 6 cm.

Drugo rješenje.

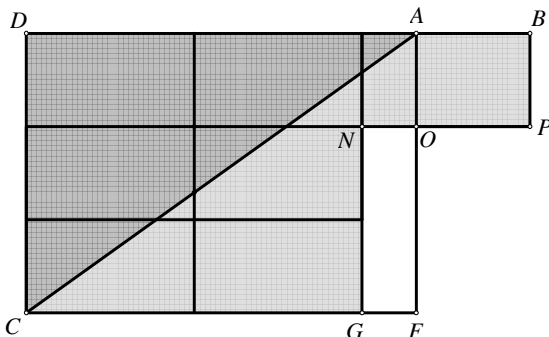
Dimenzije svakog od pravokutnika su $27 : 3 = 9$ cm i $15 : 3 = 5$ cm.

Osjenčanom liku docrtajmo dva pravokutnika na način prikazan na slici.



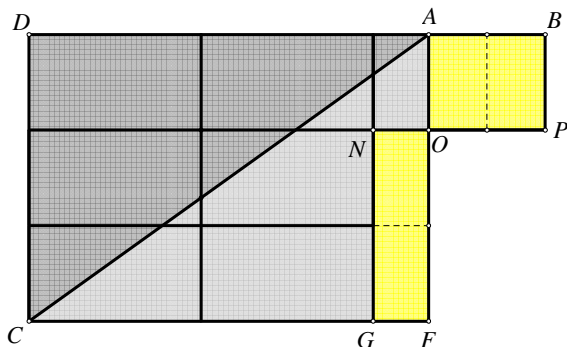
Kako su ti pravokutnici jednakih površina, dužina $\overline{AC}$ dijeli novodobiveni lik na dva dijela jednakih površina.

Nacrtajmo dužinu $\overline{AF}$ tako da $CFAD$ bude pravokutnik. Dužina $\overline{AC}$ dijeli taj pravokutnik na dva dijela jednakih površina.



Kako su površine trokuta CFA i CAD jednake, zaključujemo da je površina trokuta CFA jednaka površini polovine novog lika koja je obojena svijetlosivom bojom.

To znači da je površina svijetlosivog dijela izvan pravokutnika $CFAD$ jednaka je površini bijelog dijela unutar tog pravokutnika. Drugim riječima, površine pravokutnika $GFON$ i $OPBA$ međusobno su jednake.



No, širina pravokutnika $OPBA$ upola je manja od širine pravokutnika $GFON$ ($|FO| = 2|AO|$), pa je njegova visina dvostruko veća ($|OP| = 2|NO|$).

$$\begin{aligned} \text{Vrijedi } |NO| + |OP| &= |NP| = 9 \text{ cm,} \\ |NO| + 2|NO| &= 3|NO| = 9 \text{ cm} \\ |NO| &= 3 \text{ cm, } |OP| = 6 \text{ cm} \\ |AB| &= |OP| = 6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi 6 cm.

3. Na sportskom natjecanju višečlano povjerenstvo ocjenjuje nastupe triju učenica: Ane, Eme i Sare. Svaki član povjerenstva će rangirati učenice od prvog do trećeg mjesta te za prvo mjesto dodijeliti a bodova, za drugo mjesto b bodova, a za treće mjesto c bodova. Pritom su a , b i c unaprijed određeni prirodni brojevi takvi da je $a > b > c$. Nakon toga bodovi svih članova povjerenstva su zbrojeni te je Ana osvojila 17 bodova, Sara 10 bodova, a Ema 8 bodova. Odredi kako su pojedini članovi povjerenstva rangirali učenice.

Rješenje.

Uočimo da je svaki član povjerenstva dodijelio ukupno $a + b + c$ bodova i da taj broj iznosi barem $1 + 2 + 3 = 6$. Ukupan broj bodova koji su dodijelili svi članovi povjerenstva je $17 + 10 + 8 = 35$.

Taj broj jednak je umnošku broja $(a + b + c)$ i broja članova povjerenstva.

Broj 35 rastavimo na proste faktore $35 = 7 \cdot 5$.

Kako je $a + b + c > 6$, mora biti $a + b + c = 7$, a povjerenstvo se sastoji od 5 članova.

Broj 7 može se u obliku zbroja triju različitih prirodnih brojeva napisati samo na jedan način

$$7 = 1 + 2 + 4, \text{ dakle } a = 4, b = 2 \text{ i } c = 1.$$

Članovi povjerenstva su za prvo mjesto dodijelili 4 boda, za drugo mjesto 2 boda, a za treće mjesto 1 bod. Provjerimo kako su učenice mogle ostvariti navedeni ukupni broj bodova.

Ana je dobila 17 bodova. Jedina je mogućnost

$$17 = 4 + 4 + 4 + 4 + 1$$

što znači da je Ana od četiri člana povjerenstva dobila po 4 boda, a od jednog člana 1 bod.

Da joj je manje od četiri člana dalo 4 boda, imala bi najviše $4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 16$ bodova.

Ovaj zaključak ujedno znači da je samo jedna od ostalih učenica dobila 4 boda i to samo od jednog člana povjerenstva.

Sara je 10 bodova mogla ostvariti na dva načina:

$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Ema je 8 bodova mogla ostvariti također na dva načina:

$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Kombiniranjem dobivamo dva načina na koje je pet članova povjerenstva moglo rangirati učenice.

1. način

Ana	4	4	4	4	1
Sara	2	2	2	2	2
Ema	1	1	1	1	4

Ovo znači da je četvoro članova povjerenstva ocijenilo da je Ana prva, Sara druga, a Ema treća, dok je jedan član povjerenstva ocijenio da je Ema prva, Sara druga, a Ana treća.

2. način

Ana	4	4	4	4	1
Sara	2	2	1	1	4
Ema	1	1	2	2	2

Ovo znači da je dvoje članova rangiralo učenice u poretku 1. Ana – 2. Sara – 3. Ema, dvoje u poretku 1. Ana – 2. Ema – 3. Sara, a jedan u poretku 1. Sara – 2. Ema – 3. Ana.

4. Odredi, ako postoje, sve četveroznamenaste prirodne brojeve koji su djeljivi brojem zapisanim istim znamenkama u obrnutom poretku i pri tom dijeljenju količnik iznosi:

- a) tri,
- b) četiri.

(Moguće je da broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku počinje nulom ili nulama, tako bi se npr. od broja 3210 dobio broj 0123 tj. 123.)

Rješenje.

Neka je $\overline{abcd}$ je četveroznamenasti broj pa je $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $a \neq 0$.

Tada je $\overline{dcba}$ broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku.

a) Ako je $\overline{abcd} : \overline{dcba} = 3$, tada je $\overline{dcba} \cdot 3 = \overline{abcd}$.

Razmotrimo sve mogućnosti za znamenku a :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3a$	3	6	9	12	15	18	21	24	27
d	3	6	9	2	5	8	1	4	7
		$d > 3$	$d > 3$		$d > 3$	$d > 3$		$d > 3$	$d > 3$
$3d$	9			6			3		
	$3d > a$			$3d > a$					
							??		

Broj $\overline{dcba}$ ne može biti veći od 3333 jer je $3334 \cdot 3$ peteroznamenasti broj. Dakle $d \leq 3$ pa otpadaju mogućnosti $a \in \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$.

Promatrajući znamenke tisućica zaključujemo da mora biti $d \cdot 3 \leq a$ pa otpada i $a = 1$ i $a = 4$.

U preostalom slučaju, $a = 7$, $d = 1$, broj $\overline{abcd} = \overline{7bc1}$ veći je od 7000, dok je broj $\overline{dcba} = \overline{1cb7}$ manji od 2000, pa je umnožak $\overline{dcba} \cdot 3$ manji od 6000. Zato ni u tom slučaju nema rješenja.

Dakle, ne postoji četveroznamenasti broj koji je djeljiv brojem zapisanim istim znamenkama u obrnutom poretku i pri tom dijeljenju količnik iznosi 3.

b) Ako je $\overline{abcd} : \overline{dcba} = 4$, tada je $\overline{dcba} \cdot 4 = \overline{abcd}$.

Razmotrimo sve mogućnosti za znamenku a :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$4a$	4	8	12	16	20	24	28	32	36
d	4	8	2	6	0	4	8	2	6
	$d > 2$	$d > 2$		$d > 2$		$d > 2$	$d > 2$		$d > 2$
$4d$			8		0			8	
			$4d > a$						
					??			??	

Broj $\overline{dcba}$ ne može biti veći od 2499 jer je $2500 \cdot 4$ peteroznamenasti broj. Dakle $d \leq 2$ pa otpadaju mogućnosti $a \in \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$.

Promatrajući znamenke tisućica zaključujemo da mora biti $d \cdot 4 \leq a$ pa otpada i $a = 3$.

Preostale su dvije mogućnosti.

Ako je $a = 5, d = 0$, broj $\overline{abcd} = \overline{5bc0}$ veći je od 5000, dok je broj $\overline{dcba} = \overline{0cb5} = \overline{cb5}$ manji od 1000, pa je umnožak $\overline{dcba} \cdot 4$ manji od 4000. Zato u ovom slučaju nema rješenja.

Ako je $a = 8, d = 2$, promatrani umnožak je $\overline{2cb8} \cdot 4 = \overline{8bc2}$.

To možemo zapisati i ovako:

$$(2000 + 100c + 10b + 8) \cdot 4 = 8000 + 100b + 10c + 2$$

pa sređivanjem dobivamo

$$8000 + 400c + 40b + 32 = 8000 + 100b + 10c + 2$$

$$390c + 30 = 60b$$

$$13c + 1 = 2b.$$

Kako b ne može biti veći od 9, vrijednost izraza $13c + 1$ mora biti paran broj koji nije veći od 18 pa c može biti samo 0 ili 1. Ako je $c = 0$, onda $13c + 1$ nije paran broj.

Ako je $c = 1$, onda je $2b = 13c + 1 = 14$ pa je $b = 7$.

Dobili smo broj 8712. Provjerimo: $2178 \cdot 4 = 8712$.

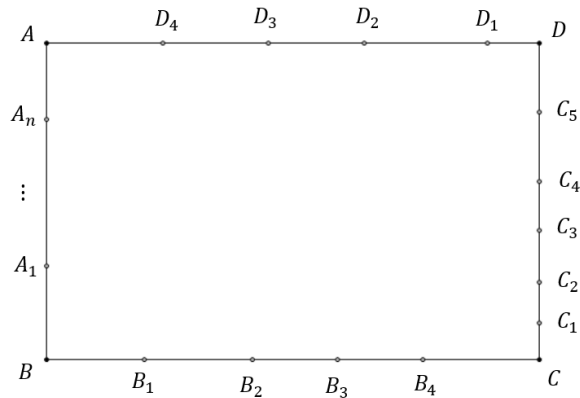
Broj 8712 je jedini četveroznamenasti broj koji je djeljiv brojem zapisanim istim znamenkama u obrnutom poretку i pri tom dijeljenju količnik iznosi 4.

Slučaj $a = 8, d = 2$ se može riješiti i ispitivanjem svih mogućnosti za $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

5. Na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ odabrano je nekoliko točaka, na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ po četiri točke, a na stranici $\overline{CD}$ pet točaka. Nijedna od odabranih točaka nije vrh danog pravokutnika. Koristeći odabrane točke kao vrhove može se nacrtati točno 4040 četverokuta kojima najviše jedan vrh pripada dužini $\overline{AB}$. Koliko je točaka odabrano na stranici $\overline{AB}$?

Rješenje.

Neka je n broj točaka koje su odabrane na stranici $\overline{AB}$.



Kako najviše jedan vrh takvog četverokuta pripada dužini $\overline{AB}$, promotrimo dva slučaja:

- dužini $\overline{AB}$ ne pripada niti jedan vrh četverokuta.
- dužini $\overline{AB}$ pripada točno jedan vrh četverokuta.

Uočimo da na jednoj stranici pravokutnika mogu biti najviše dva vrha četverokuta.

Dva vrha na stranici $\overline{BC}$ ili na stranici $\overline{DA}$ možemo odabrati na $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ načina, a dva vrha na stranici $\overline{CD}$ na $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ načina.

a) dužini $\overline{AB}$ ne pripada niti jedan vrh četverokuta.

Vrhovi četverokuta mogu biti raspoređeni:

a1) po dva vrha na dvjema stranicama pravokutnika

- po dva vrha na $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$
takvih je četverokuta $6 \cdot 10 = 60$
- po dva vrha na $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$
takvih je četverokuta $6 \cdot 6 = 36$
- po dva vrha na $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$
takvih je četverokuta $10 \cdot 6 = 60$

a2) dva vrha na jednoj stranici i po jedan vrh na ostalim stranicama

- dva vrha na $\overline{BC}$, po jedan vrh na $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$
takvih je četverokuta $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
- dva vrha na $\overline{CD}$, po jedan vrh na $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$
takvih je četverokuta $10 \cdot 4 \cdot 4 = 160$
- dva vrha na $\overline{DA}$, po jedan vrh na $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$
takvih je četverokuta $6 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Ako dužini $\overline{AB}$ ne pripada niti jedan vrh četverokuta, četverokut se može nacrtati na

$$60 + 36 + 60 + 120 + 160 + 120 = 556$$

različitih načina.

b) dužini $\overline{AB}$ pripada točno jedan vrh četverokuta

Vrhovi četverokuta mogu biti raspoređeni:

b1) po jedan vrh na svakoj stranici

- na svakoj stranici je po jedan vrh

$$\text{takvih četverokuta ima } n \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 80 n$$

b2) dva vrha na jednoj stranici, jedan na stranici $\overline{AB}$ i jedan na jednoj od preostalih stranica

- dva vrha na stranici $\overline{BC}$, jedan na stranici $\overline{AB}$ i jedan na stranici $\overline{CD}$ ili $\overline{DA}$

$$\text{takvih četverokuta ima } 6 \cdot n \cdot (5 + 4) = 54 n$$

- dva vrha na stranici $\overline{CD}$, jedan na stranici $\overline{AB}$ i jedan na stranici $\overline{BC}$ ili $\overline{DA}$

$$\text{takvih četverokuta ima } 10 \cdot n \cdot (4 + 4) = 80 n$$

- dva vrha na stranici $\overline{DA}$, jedan na stranici $\overline{AB}$ i jedan na stranici $\overline{BC}$ ili $\overline{CD}$

$$\text{takvih četverokuta ima } 6 \cdot n \cdot (4 + 5) = 54 n$$

Ako dužini $\overline{AB}$ pripada točno jedan vrh četverokuta, četverokut se može nacrtati na

$$54 n + 80 n + 54 n + 80 n = 268 n$$

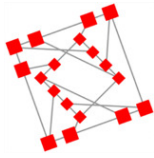
različitih načina.

Ukupan broj četverokuta koji se mogu nacrtati na opisani način je 4040 pa je

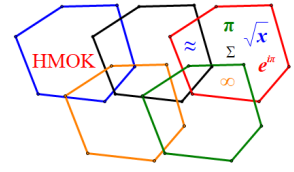
$$556 + 268 \cdot n = 4040.$$

Sređivanjem dobivamo $268 \cdot n = 3484$ te konačno $n = 13$.

Na dužini $\overline{AB}$ odabrano je 13 točaka.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Na sportskom natjecanju višečlano povjerenstvo ocjenjuje nastupe triju učenica: Ane, Eme i Sare. Svaki član povjerenstva će rangirati učenice od prvog do trećeg mjesta te za prvo mjesto dodijeliti a bodova, za drugo mjesto b bodova, a za treće mjesto c bodova. Pritom su a , b i c unaprijed određeni prirodni brojevi takvi da je $a > b > c$. Nakon toga bodovi svih članova povjerenstva su zbrojeni te je Ana osvojila 17 bodova, Sara 10 bodova, a Ema 8 bodova. Odredi kako su pojedini članovi povjerenstva rangirali učenice.

Rješenje.

Uočimo da je svaki član povjerenstva dodijelio ukupno $a + b + c$ bodova i da taj broj iznosi barem $1 + 2 + 3 = 6$.

Ukupan broj bodova koji su dodijelili svi članovi povjerenstva je $17 + 10 + 8 = 35$.

Taj broj jednak je umnošku broja $(a + b + c)$ i broja članova povjerenstva.

Broj 35 rastavimo na proste faktore: $35 = 7 \cdot 5$.

Kako je $a + b + c > 6$, mora biti $a + b + c = 7$, a povjerenstvo se sastoji od 5 članova.

Broj 7 može se u obliku zbroja triju različitih prirodnih brojeva napisati samo na jedan način: $7 = 1 + 2 + 4$, dakle $a = 4$, $b = 2$ i $c = 1$.

Članovi povjerenstva su za prvo mjesto dodijelili 4 boda, za drugo mjesto 2 boda, a za treće mjesto 1 bod. Provjerimo kako su učenice mogle ostvariti navedeni ukupni broj bodova.

Ana je dobila 17 bodova. Jedina je mogućnost

$$17 = 4 + 4 + 4 + 4 + 1$$

što znači da je Ana od četiri člana povjerenstva dobila po 4 boda, a od jednog člana 1 bod.

Da joj je manje od četiri člana dalo 4 boda, imala bi najviše $4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 16$ bodova.

Ovaj zaključak ujedno znači da je samo jedna od ostalih učenica dobila 4 boda i to samo od jednog člana povjerenstva.

Sara je 10 bodova mogla ostvariti na dva načina:

$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Ema je 8 bodova mogla ostvariti također na dva načina:

$$8 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Kombiniranjem dobivamo dva načina na koje je pet članova povjerenstva moglo rangirati učenice.

1. način

Ana	4	4	4	4	1
Sara	2	2	2	2	2
Ema	1	1	1	1	4

Ovo znači da je četvoro članova povjerenstva ocijenilo da je Ana prva, Sara druga, a Ema treća, dok je jedan član povjerenstva ocijenio da je Ema prva, Sara druga, a Ana treća.

2. način

Ana	4	4	4	4	1
Sara	2	2	1	1	4
Ema	1	1	2	2	2

Ovo znači da je dvoje članova rangiralo učenice u poretku 1. Ana – 2. Sara – 3. Ema, dvoje u poretku 1. Ana – 2. Ema – 3. Sara, a jedan u poretku 1. Sara – 2. Ema – 3. Ana.

2. Zbroj 16 uzastopnih prirodnih brojeva među kojima je i broj n , petnaest je puta veći od broja n . Odredi sve brojeve n za koje je to moguće.

Prvo rješenje.

Najmanji od 16 uzastopnih brojeva označimo s x . Tada vrijedi:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 15) = 15(x + k),$$

gdje je $n = x + k$ za neki $k \in \{0, 1, \dots, 15\}$. Kako je $1 + 2 + \dots + 15 = 120$, sređivanjem dobivamo $16x + 120 = 15x + 15k$ odnosno $x = 15k - 120 = 15(k - 8)$.

Da bi x bio prirodan broj, razlika $k - 8$ treba biti pozitivan cijeli broj, što znači da treba biti $k > 8$.

Ispitajmo sve mogućnosti:

za $k = 9$ vrijedi $x = 15(9 - 8) = 15$, $n = x + k = 24$, te je $15 + 16 + \dots + 30 = 15 \cdot 24$

za $k = 10$ vrijedi $x = 15(10 - 8) = 30$, $n = x + k = 40$, te je $30 + 31 + \dots + 45 = 15 \cdot 40$

za $k = 11$ vrijedi $x = 15(11 - 8) = 45$, $n = x + k = 56$, te je $45 + 46 + \dots + 60 = 15 \cdot 56$

za $k = 12$ vrijedi $x = 15(12 - 8) = 60$, $n = x + k = 72$, te je $60 + 61 + \dots + 75 = 15 \cdot 72$

za $k = 13$ vrijedi $x = 15(13 - 8) = 75$, $n = x + k = 88$, te je $75 + 76 + \dots + 90 = 15 \cdot 88$

za $k = 14$ vrijedi $x = 15(14 - 8) = 90$, $n = x + k = 104$, te je $90 + 91 + \dots + 105 = 15 \cdot 104$

za $k = 15$ vrijedi $x = 15(15 - 8) = 105$, $n = x + k = 120$, te je $105 + 106 + \dots + 120 = 15 \cdot 120$

Traženi brojevi su 24, 40, 56, 72, 88, 104 i 120.

Drugo rješenje.

Najmanji od 16 uzastopnih brojeva označimo s x . Tada vrijedi:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 15) = 15n,$$

gdje je n neki od brojeva iz skupa $\{x, x + 1, \dots, x + 15\}$.

Sređivanjem dobivamo

$$16x + 120 = 15n.$$

To možemo zapisati u obliku $x + 15x + 120 = 15n$, odakle vidimo da broj x mora biti djeljiv s 15.

Za $x = 15$, na dobivena jednakost postaje $360 = 15n$, pa je $n = 24$. Zaista, zbroj 16 uzastopnih brojeva 15, 16, ..., 30 iznosi $16 \cdot (15 + 30) : 2 = 360 = 24 \cdot 15$. Uočavamo da je 24 jedan od tih brojeva.

Za x dalje uzimamo višekratnike broja 15:

$x = 30,$	$600 = 15n,$	$n = 40,$	$30 + 31 + \dots + 45 = 15 \cdot 40$
$x = 45,$	$840 = 15n,$	$n = 56,$	$45 + 46 + \dots + 60 = 15 \cdot 56$
$x = 60,$	$1080 = 15n,$	$n = 72,$	$60 + 61 + \dots + 75 = 15 \cdot 72$
$x = 75,$	$1320 = 15n,$	$n = 88,$	$75 + 76 + \dots + 90 = 15 \cdot 88$
$x = 90,$	$1560 = 15n,$	$n = 104,$	$90 + 91 + \dots + 105 = 15 \cdot 104$
$x = 105,$	$1800 = 15n,$	$n = 120,$	$105 + 106 + \dots + 120 = 15 \cdot 120$

Lako uočavamo da su svi dobiveni brojevi rješenja, dakle n može biti 24, 40, 56, 72, 88, 104 i 120.

Međutim, za $x = 120$, imamo $2040 = 15n$, $n = 136$, te je $120 + 121 + \dots + 135 = 15 \cdot 136$.

Kako je 136 veći od svih brojeva u ovom zbroju, taj slučaj ne daje rješenje.

Pokažimo općenito da za $x > 120$ nema rješenja.

Na lijevoj strani jednakosti

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 15) = 15n$$

nalazi se zbroj 16 uzastopnih brojeva, a najveći od njih ne smije biti manji od n .

Dakle $x + 15 \geq n$, pa je $x \geq n - 15$, $x + 1 \geq n - 14$, ... odnosno

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 15) \geq (n - 15) + (n - 14) + (n - 13) + \dots + n$$

Zbroj na desnoj strani ove nejednakosti je $16n - 120$. Zato mora vrijediti $15n \geq 16n - 120$, no ovo znači da je $n \leq 120$, a stoga i $x \leq 120$. Nema rješenja za koje je $x > 120$.

Napomena

Zadatak se može riješiti na sličan način ako uočimo da iz $16x + 120 = 15n$ slijedi da je broj n djeljiv s 8, ali nije djeljiv sa 16, pa uvrštavamo redom $n = 8, 24, 40, \dots$. Za $n = 8$ dobiveni x nije prirodan broj, a za $n > 120$ broj n neće biti jedan od promatranih 16 uzastopnih brojeva.

3. U trokutu ABC vrijedi

$$|\angle BAC| = 40^\circ, |\angle CBA| = 20^\circ \text{ i } |AB| - |BC| = 10.$$

Simetrala kuta $\angle ACB$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki M . Odredi duljinu dužine $\overline{CM}$.

Prvo rješenje.

Neka je E točka na dužini $\overline{AB}$ takva da je $|BE| = |BC|$.

Vrijedi $|AB| - |BC| = |AB| - |BE| = |AE|$, pa je $|AE| = 10$ cm.

Poznata su dva kuta u trokutu ABC , pa je treći kut $|\angle ACB| = 120^\circ$.

Kako je CM simetrala tog kuta vrijedi $|\angle ACM| = |\angle MCB| = 60^\circ$.

Zbog izbora točke E , trokut EBC je jednakokračan te je $|\angle BEC| = |\angle ECB| = 80^\circ$.

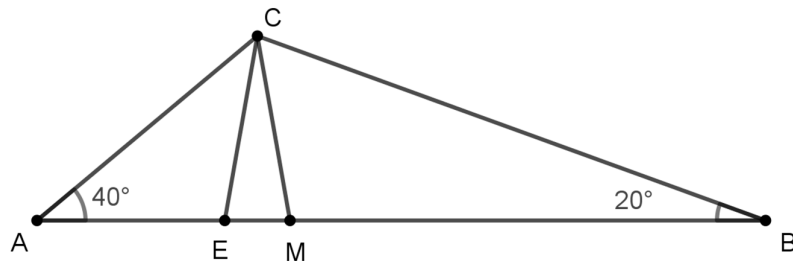
Dalje je

$$|\angle ECM| = |\angle ECB| - |\angle MCB| = 20^\circ.$$

$$|\angle CME| = 80^\circ$$

Kako je $|\angle CME| = |\angle MEC|$, trokut EMC jednakokračan te je $|EC| = |MC|$.

Također je $|\angle ACE| = |\angle ACM| - |\angle ECM| = 40^\circ$, to jest $|\angle ACE| = |\angle EAC|$. Zato je i trokut AEC jednakokračan pa vrijedi $|AE| = |EC|$.

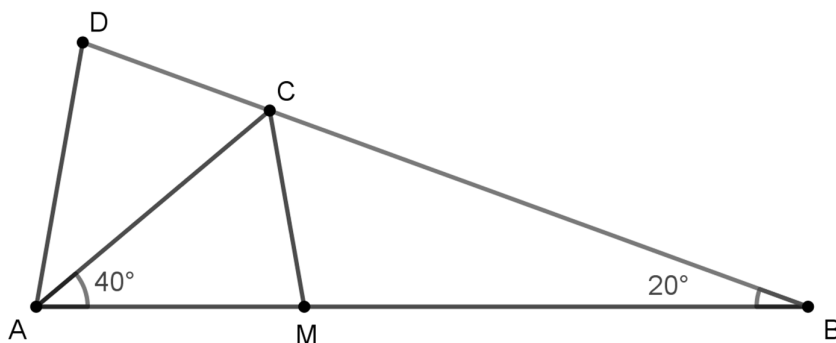


Povežemo li dokazane jednakosti dobivamo $|MC| = |EC| = |AE| = 10$ cm.

Drugo rješenje.

Neka je D točka na polupravcu BC takva da je $|DB| = |AB|$.

Vrijedi $|CD| = |BD| - |BC| = |AB| - |BC| = 10$ cm. Trokut ABD je jednakokračan s poznatim kutom u vrhu B , pa dobivamo $\angle BAD = \angle ADB = 80^\circ$.



Kut $\angle DCA$ je vanjski kut trokuta ABC , pa je $|\angle DCA| = 40^\circ + 20^\circ$. Zato je $|\angle ACB| = 120^\circ$. Kako je CM simetrala tog kuta vrijedi $|\angle ACM| = 60^\circ$.

Odredimo kutove trokuta ACD . Već znamo $|\angle ADC| = 80^\circ$ i $|\angle DCA| = 60^\circ$ pa je $|\angle CAD| = 40^\circ$. Primijetimo da je $|\angle CAD| = |\angle MAC|$ i $|\angle DCA| = |\angle ACM|$, pa su trokuti ACD i AMC sa zajedničkom stranicom $\overline{AC}$ sukladni.

Iz toga slijedi $|CM| = |CD| = 10$ cm.

4. Neka su a, b, c i d prirodni brojevi takvi da je $a > b > c > d$. Označimo

$$S = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d).$$

a) Je li broj S uvijek djeljiv s 3?

b) Je li broj S uvijek djeljiv s 4?

Prvo rješenje.

a) Pri dijeljenju prirodnog broja brojem 3, ostatak može biti 0, 1 ili 2. Kako imamo četiri broja a, b, c i d , a tri ostatka, neka dva broja od tih brojeva pri dijeljenju s 3 imaju isti ostatak (Dirichletov princip). Oduzimanjem tih dvaju brojeva dobije se razlika koja je djeljiva s 3.

Pokažimo da je zaista tako.

Pretpostavimo da brojevi a i b daju isti ostatak o pri dijeljenju s 3, pri čemu je $o \in \{0,1,2\}$.

To znači da je $a = 3k + o$ i $b = 3l + o$, za neke $k, l \in \mathbb{N}_0$. Tada za njihovu razliku vrijedi

$$a - b = (3k + o) - (3l + o) = 3k - 3l = 3(k - l),$$
 a to je broj djeljiv s tri.

Kako je ta razlika sigurno jedan od faktora broja S , zaključujemo da je broj S uvijek djeljiv s 3.

b) Pri dijeljenju prirodnog broja brojem 4, ostatak može biti 0, 1, 2 ili 3.

Ako među brojevima a, b, c i d postoje dva koji imaju isti ostatak, onda je njihova razlika djeljiva s 4.

Slično kao u a) dijelu, ako je $a = 4k + o$, $b = 4l + o$, gdje je o ostatak, a $k, l \in \mathbb{N}_0$, onda vrijedi

$$a - b = (4k + o) - (4l + o) = 4(k - l).$$

Umnožak S djeljiv je razlikom $a - b$, pa je i S djeljiv s 4.

No, ako ne postoje takva dva broja, to znači da brojevi a, b, c i d imaju različite ostatke pri dijeljenju s 4. U tom slučaju, promotrimo najprije brojeve koji imaju parne ostatke (0 i 2). Ta dva broja su parna, pa je njihova razlika paran broj. Također, oba broja koji imaju neparne ostatke (1 i 3) su neparna, a njihova razlika je paran broj. Obje razlike se javljaju među faktorima broja S , pa je S djeljiv s $2 \cdot 2 = 4$.

Time smo pokazali da je broj S uvijek djeljiv brojem 4.

Drugo rješenje b) dijela zadatka.

b) Ako među brojevima a, b, c i d postoje najmanje tri parna broja, neka su to npr. brojevi a, b i c . Tada su razlike $a - b$ i $b - c$ parne, a to znači da je umnožak S djeljiv s $2 \cdot 2 = 4$.

Ako među brojevima a, b, c i d postoje najmanje tri neparna broja, neka su to npr. brojevi a, b i c . Tada su razlike $a - b$ i $b - c$ parne, a to znači da je umnožak S djeljiv s $2 \cdot 2 = 4$.

Ako ne postoje niti tri parna, niti tri neparna broja, to znači da su dva broja parna, a dva neparna. Neka su npr. a i d parni brojevi, a b i c neparni brojevi. Tada su razlike $a - d$ i $b - c$ parne, a to znači da je umnožak S i u ovom slučaju djeljiv s $2 \cdot 2 = 4$.

5. Na kraju školske godine ravnatelj Srećko proveo je među učenicima anketu o gubljenju osobnih predmeta. Od 1000 učenika njegove škole svaki je ove školske godine izgubio barem jedan od tri predmeta: bilježnicu, ključeve ili pernicu. Njih 700 je izgubilo bilježnicu, 750 ih je izgubilo ključeve, a 800 pernicu.

Koliko je najmanje učenika ove školske godine izgubilo i bilježnicu i ključeve i pernicu?

Komentar prije rješenja.

Odgovor na postavljeno pitanje je 250. Naravno, odgovor treba argumentirati.

U ovom slučaju, ta se argumentacija sastoji od dva dijela. Potrebno je:

- dokazati da nije moguće da sva tri predmeta izgubi manje od 250 učenika te
- primjerom pokazati da je zaista moguće da sva tri predmeta izgubi točno 250 učenika.

Uočite u svakom od sljedećih rješenja ta dva dijela.

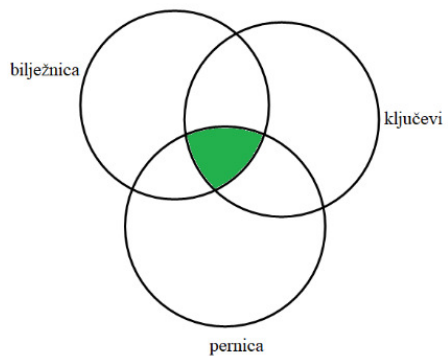
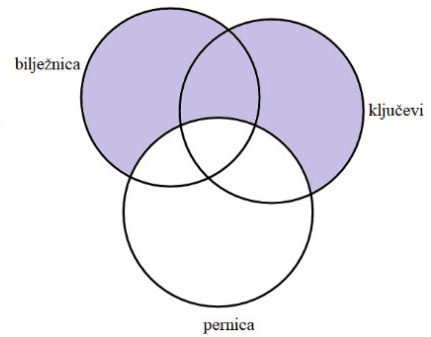
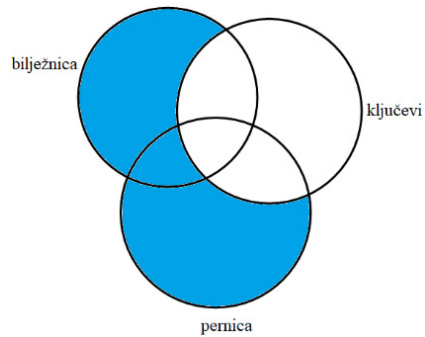
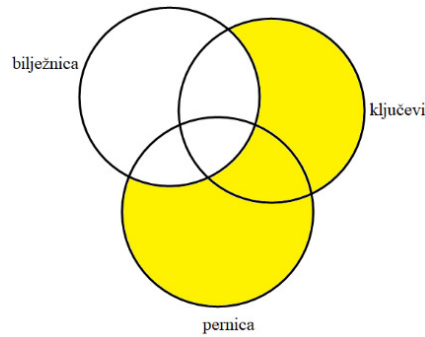
Prvo rješenje.

Ako je 700 učenika te škole izgubilo bilježnicu, onda njih 300 nije izgubilo bilježnicu (žuto obojano).

Ako je 750 učenika te škole izgubilo ključeve, onda njih 250 nije izgubilo ključeve (plavo).

Ako je 800 učenika te škole izgubilo pernicu, onda njih 200 nije izgubilo pernicu (ljubičasto).

Neka je x broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta (zeleno).



Ta četiri skupa (obojana žutom, plavom, ljubičastom i zelenom bojom) zajedno obuhvaćaju sve učenike, jer nema učenika koji nije izgubio ni bilježnicu, ni ključeve, ni pernicu. Zato je zbroj brojeva učenika u ta četiri skupa veći ili jednak ukupnom broju učenika te škole pa vrijedi:

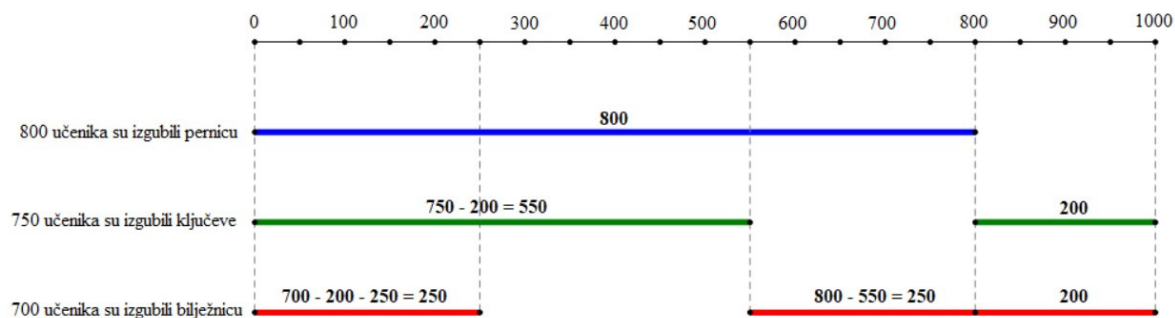
$$300 + 250 + 200 + x \geq 1000$$

$$750 + x \geq 1000$$

$$x \geq 250$$

To znači da je najmanji mogući broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta veći ili jednak 250.

Pokažimo primjerom da je taj broj upravo 250.



Ovdje je shematski prikazano 250 učenika koji su izgubili sva tri predmeta, 300 učenika koji su izgubili pernicu i ključeve, 250 učenika koji su izgubili pernicu i bilježnicu, te 200 učenika koji su izgubili ključeve i bilježnicu.

To znači da je moguća situacija u kojoj je točno 250 učenika izgubilo sva tri predmeta.

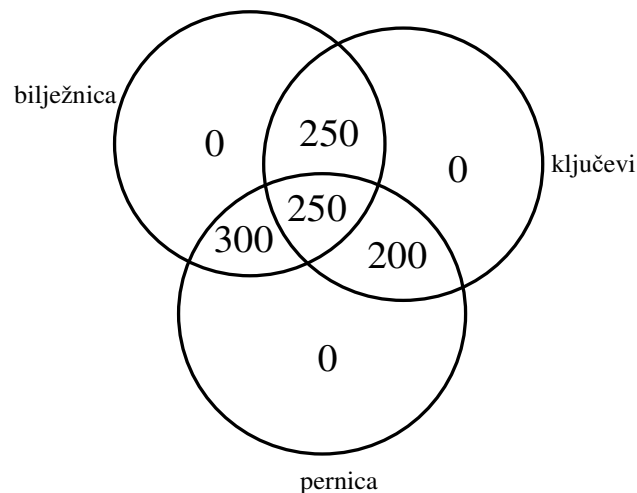
Drugo rješenje.

Dokažimo da u školi ima najmanje 250 učenika koji su izgubili sva tri predmeta.

Pretpostavimo da nije tako. Tada bi bilo najviše 249 učenika koji su izgubili po tri predmeta, a ostali učenici, njih barem 751 izgubili bi po najviše dva predmeta. Tada bi bilo najviše $2 \cdot 751 + 3 \cdot 249 = 2249$ izgubljenih predmeta.

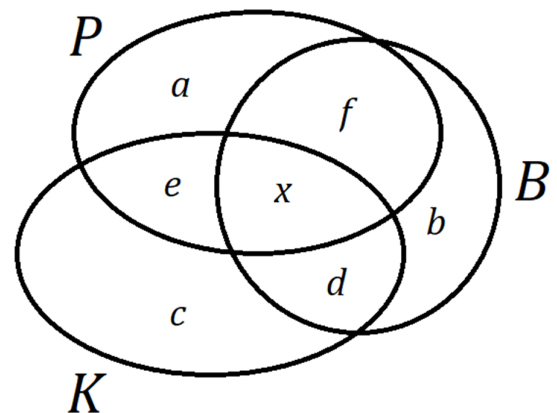
No, izgubljenih predmeta je ukupno $700 + 750 + 800 = 2250$. Kako je $2250 > 2249$, dobili smo kontradikciju, a to znači da je početna pretpostavka bila pogrešna. Zaista je barem 250 učenika izgubilo sva tri predmeta.

Još je potrebno pokazati da je moguće da 250 učenika izgubi sva tri predmeta, a to možemo npr. pomoću Vennovog dijagrama:



Treće rješenje.

Označimo s B skup učenika koji su izgubili bilježnicu, s K skup učenika koji su izgubili ključeve i s P skup učenika koji su izgubili pernicu. Nadalje, označimo s a broj učenika koji su izgubili samo pernicu, s b broj učenika koji su izgubili samo bilježnicu, a s c broj učenika koji su izgubili samo ključeve. Također, neka je d broj učenika koji su izgubili bilježnicu i ključeve, e broj učenika koji su izgubili ključeve i pernicu, f broj učenika koji su izgubili pernicu i bilježnicu, a x broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta.



Tada vrijedi:

$$a + b + c + d + e + f + x = 1000$$

$$b + d + f + x = 700$$

$$c + d + e + x = 750$$

$$a + e + f + x = 800$$

Zbrojimo li posljednje tri jednačbe, dobivamo:

$$a + b + c + 2(d + e + f) + 3x = 2250.$$

Kako je $a + b + c + d + e + f + x = 1000$, slijedi $d + e + f + 2x = 1250$.

S obzirom da je $d + e + f + x \leq 1000$, znači da x ne može biti manje od 250.

Broj x bi bio 250 u slučaju da je $d + e + f + x = 1000$, tj. u slučaju da je $a = b = c = 0$.

Tada gornje jednadžbe postaju:

$$d + f + x = 700, \quad d + e + x = 750, \quad e + f + x = 800.$$

Ispitajmo je li moguće da bude $x = 250$.

Tada bi vrijedilo $d + e + f = 1000 - 250 = 750$, te

$$d + f = 700 - 250 = 450,$$

$$d + e = 750 - 250 = 500,$$

$$e + f = 800 - 250 = 550.$$

Zato je

$$d = (d + e + f) - (e + f) = 750 - 550 = 200,$$

$$e = (d + e + f) - (d + f) = 750 - 450 = 300,$$

$$f = (d + e + f) - (d + e) = 750 - 500 = 250.$$

Zaključujemo da je najmanje 250 učenika izgubilo sva tri predmeta.

(Primjećujete li gdje se krije primjer u ovom rješenju?)

Četvrto rješenje.

Označimo s x broj učenika koji su izgubili točno jedan predmet, s y broj učenika koji su izgubili točno dva predmeta, a sa z broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta. Trebamo odrediti najmanju moguću vrijednost broja z .

Vrijedi:

$$x + y + z = 1000$$

$$x + 2y + 3z = 2250$$

Kako je

$$2250 = x + 2y + 3z = (x + y + z) + y + 2z = 1000 + y + 2z,$$

zaključujemo da je $y + 2z = 1250$.

Kako $x + y + z = 1000$, zbroj $y + z$ može biti najviše 1000. Zato iz $1250 = y + 2z = (y + z) + z$ zaključujemo da je $z = 1250 - (y + z)$ najmanje $1250 - 1000 = 250$.

Sada treba provjeriti da je moguće da broj učenika koji su izgubili sva tri predmeta bude jednak 250.

U tom slučaju mora biti $y + z = 1000$, što znači da nema učenika koji su izgubili samo jedan predmet već je svaki učenik izgubio barem dva predmeta. Da je moguće ispuniti sve uvjete, vidi se iz Vennovog dijagrama.

