



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

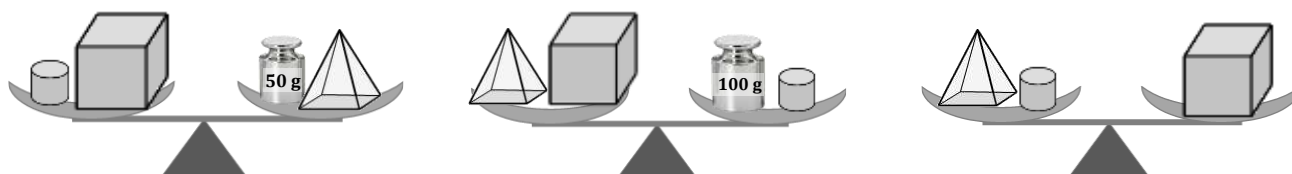
HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 12. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Vaga

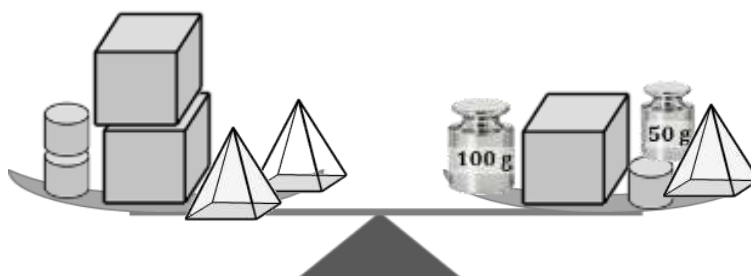
Marta se igra modelima kocke, valjka i piramide te utezima stavljajući ih na vagu. Na utezima je vidljiva njihova masa. Ako su vage na slikama u ravnoteži, odredi ukupnu masu kocke, valjka i piramide u gramima.



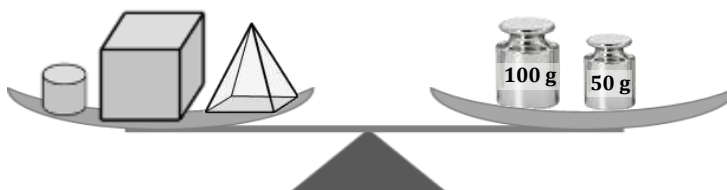
Rezultat: 150

Prvo rješenje.

Zamislamo da na lijevu stranu vage stavimo sve predmete koji su se nalazili na lijevoj strani vage na svim trima slikama, a na desnu stranu stavimo sve predmete koji su bili na desnim stranama vage. Tada bi se dobilo:



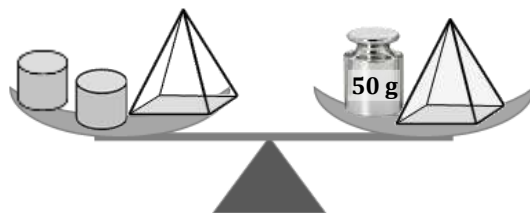
Skinemo li s jedne i druge strane po jednu kocku, valjak i piramidu, dobivamo:



Dakle, ukupna masa kocke, valjka i piramide iznosi 150 g.

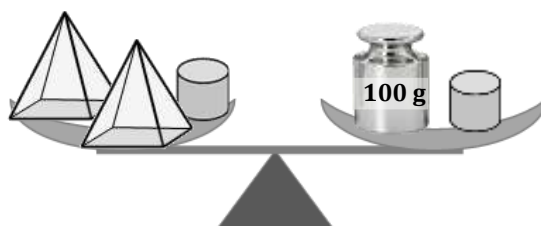
Drugo rješenje.

Na trećoj slici se vidi da kocka ima masu kao valjak i piramida zajedno. Stavimo li umjesto kocke na prvoj slici valjak i piramidu, vaga će ostati u ravnoteži i dobit ćemo sljedeće:

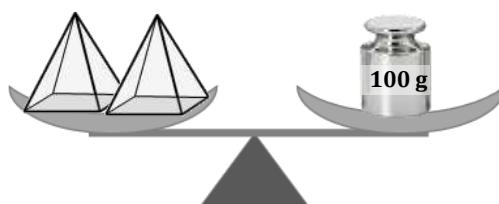


Ako maknemo piramidu s jedne i druge strane, vaga će ostati u ravnoteži. Tada lijevo ostaju 2 valjka, a desno uteg od 50 g, što znači da masa valjka iznosi 25 g.

Zamijenimo li kocku na drugoj slici valjkom i piramidom, vaga će također ostati u ravnoteži i dobit ćemo sljedeće:



Maknemo li valjak s jedne i druge strane, na lijevoj će strani ostati dvije piramide, a na desnoj uteg od 100 g, što znači da masa piramide iznosi 50 g.



Kocka ima masu kao valjak i piramida zajedno, to jest masa kocke iznosi $25\text{ g} + 50\text{ g} = 75\text{ g}$.

Prema tome, masa valjka, piramide i kocke zajedno iznosi $25\text{ g} + 50\text{ g} + 75\text{ g} = 150\text{ g}$.

2. Umnoženi kvadrat

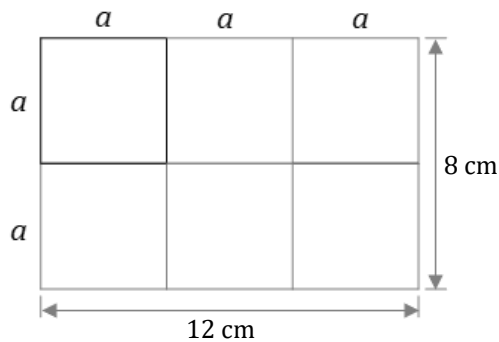
Ako duljinu jedne stranice kvadrata K uvećaš tri puta, a drugu dva puta, dobit ćeš pravokutnik P čija je površina 96 cm^2 . Za koliko je milimetara opseg pravokutnika P veći od opsega kvadrata K ?

Rezultat: 240

Rješenje.

Ako duljinu jedne stranice povećamo 3 puta, a duljinu druge 2 puta, površina će se povećati 6 puta.

Budući da površina dobivenog pravokutnika P iznosi 96 cm^2 , slijedi da površina kvadrata K iznosi $96:6=16\text{ cm}^2$. Stoga duljina stranice kvadrata K iznosi 4 cm, a njegov opseg 16 cm.



Duljine stranica pravokutnika P su $3a = 12 \text{ cm}$ i $2a = 8 \text{ cm}$, a njegov opseg iznosi $o = 40 \text{ cm}$.

Razlika opsega pravokutnika P i kvadrata K je $40 - 16 = 24 \text{ cm}$, tj. opseg pravokutnika P je za 240 mm veći od opsega kvadrata K .

3. Klupe

U parku je grupa učenika. Ako na svakoj klupi u parku sjedi po 7 učenika, bez mjesta će ostati 8 učenika. Ako bi učenici sjedili po 9 na klupi, četiri bi klupe ostale prazne. Koliko je učenika u parku?

Rezultat: 162

Prvo rješenje. Ako 8 učenika koji su ostali bez mjesta rasporedimo po 2 na klupe na kojima već sjedi po 7 učenika imat ćemo 4 klupe na kojima sjedi 9 umjesto 7 učenika.

Ispraznimo sada 4 klupe sa po 7 učenika. Tih 28 učenika možemo rasporediti po 2 na 14 klupa kojima već sjedi 7 učenika.

Dakle, ukupan broj učenika u parku je $4 \cdot 9 + 14 \cdot 9 = 162$.

Drugo rješenje. Neka je x broj klupa u parku.

Prema prvoj rečenici slijedi da je broj učenika $7 \cdot x + 8$.

Prema drugoj rečenici je broj učenika jednak $9 \cdot (x - 4)$. Stoga vrijedi

$$7 \cdot x + 8 = 9 \cdot (x - 4) = 9 \cdot x - 36.$$

Slijedi da je $9 \cdot x - 36 = 7x + 8$, tj. $2 \cdot x = 44$. Zaključujemo da su u parku 22 klupe.

U parku je bilo $7 \cdot 22 + 8 = 162$ učenika.

4. Zamišljeni broj

Grga je zamislio troznamenkasti broj, a njegovi ga prijatelji pokušavaju pogoditi.

Ovo su njihovi pokušaji:

Boris: 218

Robert: 571

Marko: 732

Darko: 853

Grga im je rekao: „Jedan od vas je pogodio sve znamenke, a ostali samo po jednu, no nijedna od pogođenih znamenaka nije na pravom mjestu.“ Na to mu prijatelji kažu: „Na temelju ovih informacija ne možemo odrediti koji si broj zamislio jer postoji više takvih brojeva.“ Odredi zbroj svih tih mogućih brojeva.

Rezultat: 712

Rješenje.

Pretpostavimo da je Boris pogodio sve znamenke.

Tada znamenka 2 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica (jer Marko nije pogodio točno mjesto nijedne znamenke) pa mora biti na mjestu desetica.

Znamenka 1 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica (jer je Robert pretpostavio da je 1 na mjestu jedinica) pa mora biti na mjestu stotica.

Znamenka 8 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica (Darkova pretpostavka) pa mora biti na mjestu desetica.

No, na mjestu desetica ne mogu biti dvije znamenke (2 i 8) pa je ovo nemoguće.

Boris nije pogodio sve tri znamenke.

Pretpostavimo da je Robert pogodio sve znamenke. Tada na sličan način zaključujemo da:

5 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,

7 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica,

a to je nemoguće.

Pretpostavimo da je Marko pogodio sve znamenke. Tada zaključujemo:

7 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,

3 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu stotica,

2 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu desetica.

To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 327.

Pretpostavimo da je Darko pogodio sve znamenke. Tada:

8 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu desetica,

5 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica,

3 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu stotica.

To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 385.

Zbroj svih mogućih brojeva iznosi $327 + 385 = 712$.

5. Kartice

U kutiji je bilo sedam kartica na kojima su napisani brojevi od 3 do 9 (na svakoj kartici po jedan broj).

Mirko je iz kutije nasumično uzeo tri kartice, a Slavko dvije kartice, dok su dvije kartice ostale u kutiji.

Mirko je pogledao svoje kartice i rekao Slavku: „Znam da je zbroj brojeva na tvojim karticama paran.“ Koliki je umnožak svih brojeva na Mirkovim karticama?

Rezultat: 192

Rješenje.

Zbroj dvaju brojeva na karticama koje je uzeo Slavko može biti paran samo ako su oba broja iste parnosti. Među svim brojevima na karticama dana su četiri neparna i tri parna broja.

Ako Mirko ima barem jedan neparan broj među svojim karticama, tj. ako nema sva tri parna broja, onda ne može biti siguran da Slavko nije uzeo jedan paran i jedan neparan broj.

Dakle, Mirko u rukama ima kartice s brojevima 4, 6 i 8, a njihov umnožak $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$.

6. Metlomet

Na turniru u novom sportu metlometu natječe se 19 ekipa koje su svaka sa svakom odigrale po jednu utakmicu. U slučaju pobjede jedne od ekipa, ona dobiva 4 boda, a poražena ne dobiva niti jedan bod. U slučaju neriješenog rezultata, svaka od te dvije ekipe dobiva po jedan bod. Sve ekipe na turniru su osvojile ukupno 600 bodova. Koliko je utakmica završilo pobjedom jedne od ekipa?

Rezultat: 129

Rješenje.

Pokažimo da je ukupno odigrano 171 utakmica. To možemo pokazati na više različitih načina.

Prvi način. Zamislimo da svake dvije ekipe igraju dvaput, jednom je jedna ekipa domaćin, a drugi put druga. Domaćina možemo odabrati na 19 načina, a gostujuću ekipu na 18 načina. To znači da je dvostruki broj utakmica jednak $19 \cdot 18 = 342$, pa je broj utakmica $342 : 2 = 171$.

Drugi način. Prva ekipa je igrala sa 18 preostalih ekipa. Za drugu ekipu smo već brojali da je igrala sa prvom ekipom, pa moramo brojati njene utakmice sa preostalih 17 ekipa. Za treću ekipu smo već brojali utakmice s prve dvije ekipe, pa dodajemo utakmice sa preostalih 16 ekipa. Tako nastavljamo dalje i zaključujemo da je ukupan broj utakmica $18 + 17 + 16 + \dots + 3 + 2 + 1 = 171$.

Ako bi u svim utakmicama jedna ekipa pobijedila, onda bi ukupan broj bodova iznosio $171 \cdot 4 = 684$, što bi bilo 84 boda više nego što je zadano u zadatku. To znači da umjesto po 4 boda, neke utakmice donose po 2 boda (po 1 svakoj ekipi). Dakle, u 42 utakmice je ostvareno ukupno 2 boda, a ne 4 boda, tj. 42 utakmice su završile neriješeno.

Broj utakmica koje su završile pobjedom jedne ekipe je $171 - 42 = 129$.

7. Silazne znamenke

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je znamenka stotica veća od znamenke desetica, a znamenka desetica veća od znamenke jedinica?

Rezultat: 120

Prvo rješenje.

Tri različite znamenke možemo odabrati na $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ načina jer prvu znamenku možemo odabrati na 10 načina, drugu koja će biti različita od nje na 9 načina, a treću koja će biti različita od prve dvije na 8 načina.

Uočimo da imamo šest različitih načina da poredamo te tri znamenke a, b, c : $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. No, točno u jednom od tih šest poredaka su znamenke silazne.

Stoga je ukupni broj traženih troznamenkastih brojeva $720 : 6 = 120$.

Drugo rješenje.

Zbog preglednosti zapišimo rješenje u tablicu:

Znamenka stotica	Znamenka desetica	Znamenka jedinica	Broj brojeva
9	8 7 6 5 4 3 2 1	7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 5, 4, 3, 2, 1, 0 4, 3, 2, 1, 0 3, 2, 1, 0 2, 1, 0 1, 0 0	8 7 6 5 4 3 2 1
8	7 6 ... 1	6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 5, 4, 3, 2, 1, 0 ... 0	7 6 ... 1
7	6 5 ... 1	5, 4, 3, 2, 1, 0 4, 3, 2, 1, 0 ... 0	6 5 ... 1
6	5 4 ... 1	4, 3, 2, 1, 0 3, 2, 1, 0 ... 0	5 4 ... 1
5	4 3 2 1	3, 2, 1, 0 2, 1, 0 2, 1 0	4 3 2 1
4	3 2 1	2, 1, 0 1, 0 0	3 2 1
3	2 1	1, 0 0	2 1
2	1	0	1
Ne može biti manje od 2 jer znamenka desetica treba biti manja nje, a znamenka jedinica manja od znamenke desetica			

Stoga je ukupno rješenje

$$(1+2+3+4+5+6+7+8) + (1+2+3+4+5+6+7) + (1+2+3+4+5+6) + (1+2+3+4+5) + (1+2+3+4) + (1+2+3) + (1+2) + 1 = 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 120.$$

8. Biciklist i pješak

Biciklist i pješak, međusobno udaljeni 1 km, kreću istovremeno jedan prema drugom. Biciklist prijeđe 300 metara u minuti, a pješak 90 metara u minuti. Koliko će metara biti međusobno udaljeni 1 minutu i 48 sekundi nakon polaska?

Rezultat: 298

Prvo rješenje.

Biciklist i pješak su udaljeni 1 km = 1000 m. Od tog broja ćemo oduzeti broj metara koji biciklist i pješak prijeđu u 1 minutu i 48 sekundi = 108 sekundi.

Biciklist prijeđe 300 metara u 60 sekundi, pa zaključujemo da prijeđe 5 metara u 1 sekundi.

Dakle, u 108 sekundi biciklist prijeđe $5 \cdot 108 = 540$ metara.

Pješak prijeđe 90 metara u 60 sekundi, pa zaključujemo da prijeđe 3 metra u 2 sekunde.

Budući da je $108 : 2 = 54$, u 108 sekundi pješak prijeđe $3 \cdot 54 = 162$ metra.

Zajedno su biciklist i pješak prešli $540 + 162 = 702$ metra.

Konačno, udaljenost između biciklista i pješaka je $1000 - 702 = 298$ metara.

Drugo rješenje.

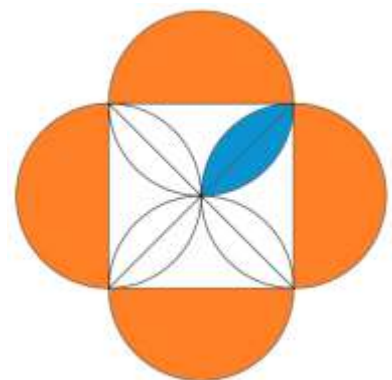
Biciklist i pješak su udaljeni 1 km = 1000 m. Od tog broja oduzimamo koliko se udaljenost smanji u 1 minutu i 48 sekundi = 108 sekundi.

Udaljenost između njih se smanjuje 390 metara u minuti, tj. 390 metara u 60 sekundi.

U 2 sekunde se udaljenost smanjiti za $390:30=13$ metara. U 108 sekundi se udaljenost smanji za $13 \cdot 54 = 702$ metra. Konačno, udaljenost između biciklista i pješaka je $1000 - 702 = 298$ metara.

9. Krugovi

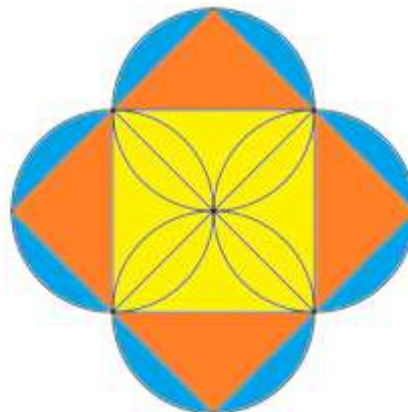
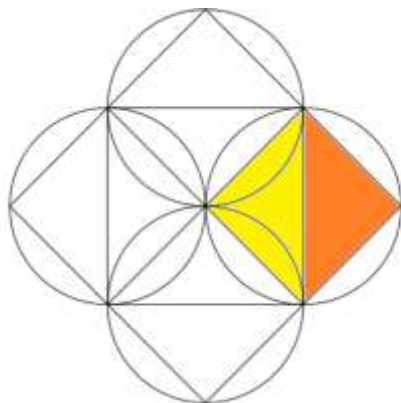
Površina plavo obojenog lika na slici iznosi 124 cm^2 . Za koliko kvadratnih centimetara je površina kvadrata na slici manja od ukupne površine narančasto obojenih likova?



Rezultat: 496

Prvo rješenje.

Dužine koje spajaju nasuprotne vrhove dijele kvadrat na četiri trokuta. Nacrtajmo ta četiri trokuta unutar narančastih polukrugova. Površina žutog trokuta jednaka je površini narančastog trokuta na slici.

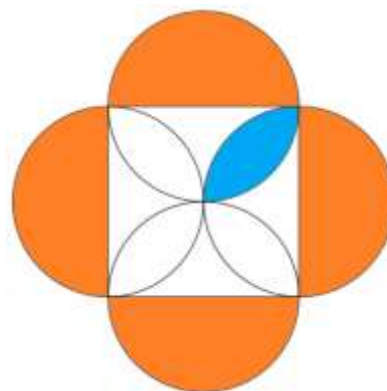


Zbroj površina narančastih trokuta jednak je površini žutog kvadrata, pa je razlika površina koja se traži u zadatku jednaka zbroju površina plavih likova. S obzirom da je zbroj površina dvaju plavih likova na slici jednak površini plavo obojenog lika zadanoj u zadatku, što iznosi 124 cm^2 , znači da je zbroj površina svih 8 plavo obojenih dijelova jednak $4 \cdot 124 = 496 \text{ cm}^2$.

Drugo rješenje.

Unutar kvadrata su nacrtana četiri dijela kruga koji su jednake površine kao narančasti likovi. Ti dijelovi imaju zajedničke likove koji su iste površine kao plavi lik.

Dakle, ukupna površina narančastih likova je veća od površine kvadrata točno za četverostruku površinu plavog lika, to jest za $4 \cdot 124 = 496 \text{ cm}^2$.



10. Žarulje

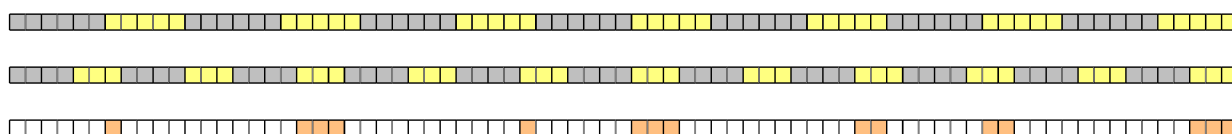
U sobi su dvije žarulje. Kada se uključi prekidač prve žarulje, ona zasvijetli tek nakon 6 s i svijetli 5 s, a zatim opet ne svijetli 6 s i svijetli 5 s, i to se stalno ponavlja. Kada se uključi prekidač druge žarulje, ona zasvijetli nakon 4 s i svijetli 3 s, opet ne svijetli 4 s i svijetli 3 s, i to se stalno ponavlja. Linda je istovremeno uključila oba prekidača i nakon 2021 sekunde ih isključila. Koliko su sekundi za to vrijeme obje žarulje istovremeno svijetlile?

Rezultat: 392

Rješenje.

Svaki 11 sekundi prva će žarulja ponavljati period u kojem 6 sekundi neće svijetliti pa će 5 sekundi svijetliti. A druga će žarulja takav period ponavljati svakih 7 sekundi.

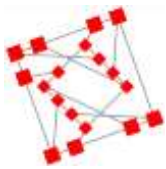
Vremenski interval koji trebamo promatrati kao zajednički period za obje žarulje traje $7 \cdot 11 = 77$ sekundi.



U prva dva pravokutnika žutom su bojom predstavljene sekunde u kojima žarulje svijetle, a sivom sekunde u kojima žarulje ne svijetle. Prvi pravokutnik prikazuje stanje prve žarulje, a drugi druge. U trećem pravokutniku označene su sekunde kad obje žarulje svijetle istovremeno.

U promatranom periodu od 77 sekundi obje žarulje istovremeno svijetle $1 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 = 15$ sekundi. Kako je $2021 = 26 \cdot 77 + 19$, takvih će perioda biti 26, a zatim preostaje još 19 sekundi. U tih 19 sekundi žarulje će istovremeno svijetliti 2 sekunde.

Obje žarulje istovremeno svijetle ukupno $26 \cdot 15 + 2 = 392$ sekunde.



Hrvatsko matematičko društvo



HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 12. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. Čarobni napitak

Petar i Tomo igraju igru u kojoj se koriste novčanice od 3 krune i 5 kruna. Ako stanu na zlatno polje mogu kupiti čarobni napitak. Petar je platio napitak novčanicama od 3 krune, a Tomo novčanicama od 5 kruna. Kolika je cijena čarobnog napitka ako su zajedno dali više od 60, a manje od 70 novčanica?

Rezultat: 120

Rješenje: Kako je Petar platio napitak novčanicama od 3 krune, a Tomo novčanicama od 5 kruna, znači da je cijena djeljiva s 3 i s 5, znači s 15. Za svakih 15 kruna Petar je dao 5 svojih novčanica, a Tomo 3 svoje. To znači da je ukupan broj novčanica djeljiv s 8. Kako su dali više od 60, a manje od 70 novčanica, napitak su platili sa 64 novčanice.

Kako je Petar platio novčanicama od 3 krune, a Tomo novčanicama od 5 kruna, očito je Petar dao više novčanica od Tome pa gledamo slučajeve kada je broj novčanica koje je dao Petar veći od 32. Ako je Petar dao 35 novčanica, Tomo je dao 29, što je nemoguće jer $35 \cdot 3 \neq 29 \cdot 5$.

Ako je Petar dao 40 novčanica, Tomo je dao 24, što je rješenje jer $40 \cdot 3 = 24 \cdot 5 = 120$.

Daljnijim povećavanjem (ili smanjenjem) broja Petrovih novčanica ne možemo dobiti drugo rješenje, što znači da je cijena čarobnog napitka 120 kruna.

2. Brajica

Brajica je pismo kojim se koriste slijepe i slabovidne osobe, a sastoji se od izbočenih točkica otisnutih na posebnom papiru. Svi znakovi se prikazuju kao kombinacije istaknutih točaka raspoređenih u dva stupca po tri točke. Ovdje su prikazani znakovi koji se koriste za pisanje brojeva (istaknute točke su crne boje):

„broj“	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
○ ●	● ○	● ○	● ●	● ●	● ○	● ●	● ●	● ○	○ ●	○ ●
○ ●	○ ○	● ○	○ ○	○ ●	○ ●	● ○	● ●	● ●	● ○	● ●
● ●	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○

Brojevi se pišu tako da se na početku stavi oznaka „broj“, a potom znakovi za pojedine znamenke.

Npr. 11 =

○ ●	● ○	● ○
○ ●	○ ○	○ ○
● ●	○ ○	○ ○

 478 =

○ ●	● ●	● ●	● ○
○ ●	○ ●	● ●	● ●
● ●	○ ○	○ ○	○ ○

Koji je najveći troznamenasti broj koji se brajicom zapisuje s ukupno 13 istaknutih točaka?

Rezultat: 987

Rješenje: Uočimo da se s jednom točkom može se zapisati samo znamenka 1, s dvije točke znamenke iz skupa {2, 3, 5, 9}, s tri točke znamenke iz skupa {4, 6, 8, 0}, a sa četiri točke znamenka 7. Kako je iskorišteno 13 točaka, a to uključuje i 4 točke za oznaku „broj“, za tri znamenke tog broja korišteno je $13 - 4 = 9$ točaka. S obzirom da se znamenke pišu s jednom, dvije, tri ili četiri točke, 9 točaka se može dobiti na tri načina:

jedna znamenka s jednom, a dvije s četiri točke, jer je $1 + 4 + 4 = 9$,

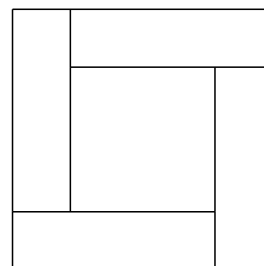
jedna znamenka s dvije, jedna s tri, a jedna s četiri točke, jer je $2 + 3 + 4 = 9$,

sve tri znamenke s tri točke, jer je $3 + 3 + 3 = 9$.

U prvom slučaju najveći mogući broj je 771, u drugom 987, a u trećem 888. Stoga je najveći mogući broj zapisan s točno 13 istaknutih točaka 987.

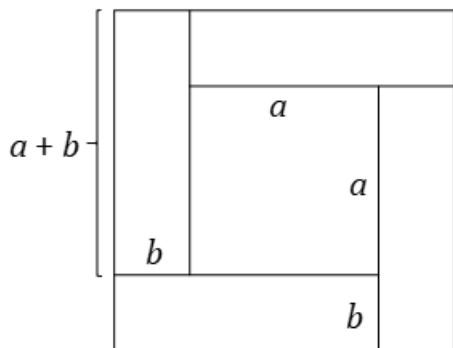
3. Podijeljeni kvadrat

Veći kvadrat podijeljen je na četiri sukladna pravokutnika i jedan manji kvadrat kao na slici. Ako je opseg većeg kvadrata za 40 cm veći od opsega manjeg kvadrata, a opseg manjeg kvadrata za 8 cm veći od opsega svakog od četiriju sukladnih pravokutnika, kolika je razlika površina većeg i manjeg kvadrata?



Rezultat: 380

Rješenje. Neka je a duljina stranice manjeg kvadrata i b duljina kraće stranice pravokutnika.



Tada dulja stranica pravokutnika ima duljinu $a + b$, a veći kvadrat stranice duljine $a + 2b$.

Opseg je većeg kvadrata $o_V = 4(a + 2b) = 4a + 8b$, a opseg manjeg kvadrata $o_M = 4a$.

Opseg je svakog pravokutnika $o = 2(a + b + b) = 2(a + 2b) = 2a + 4b$.

Razlika opsega većeg i manjeg kvadrata je 40 cm pa slijedi

$$4a + 8b - 4a = 40 \quad \text{odnosno} \quad 8b = 40.$$

Duljina kraće stranice pravokutnika je $b = 5$ cm.

Razlika opsega manjeg kvadrata i pravokutnika je 8 cm pa slijedi

$$4a - 2a - 4b = 8 \quad \text{odnosno} \quad 2a - 20 = 8, \text{ pa je } a = 14.$$

Duljina stranice manjeg kvadrata je 14 cm, a većeg 24 cm.

Površina većeg kvadrata je $P_V = 24^2 \text{ cm}^2 = 576 \text{ cm}^2$, površina manjeg kvadrata

$P_M = 14^2 \text{ cm}^2 = 196 \text{ cm}^2$, a razlika njihovih površina 380 cm².

4. Tijela pod vodom

Marta se igra modelima geometrijskih tijela potapajući ih u vodu u posudi oblika kvadra. Ako u posudu stavi kocku i valjak, razina vode podigne se 5 cm više nego ako stavi samo piramidu. Ako u posudu stavi kocku i piramidu, razina vode se podigne čak 10 cm više nego ako stavi samo valjak. Kada su u posudi piramida i valjak, razina vode je ista kao kada je u njoj samo kocka. Za koliko se milimetara podigne razina vode ako Marta u posudu stavi kocku, valjak i piramidu?

Rezultat: 150

Rješenje. Neka je k povećanje razine vode zbog stavljanja kocke u posudu (u cm), te slično v za valjak i p za piramidu. Prema uvjetima zadatka tada vrijedi:

$$k + v = p + 5$$

$$k + p = v + 10$$

$$p + v = k$$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe, dobit ćemo

$$k + v + k + p + p + v = p + 5 + v + k$$

Oduzmemo li s obje strane jednake pribrojnice p , v i k dobit ćemo

$$k + v + p = 15$$

Dakle, ako Marta u posudu stavi kocku, valjak i piramidu, razina će se vode podići za 15 cm odnosno 150 mm.

Napomena: Rješavanjem sustava može se dobiti $k = 7.5$, $v = 2.5$ i $p = 5$.

5. Zamišljeni broj

Grga je zamislio troznamenkasti broj, a njegovi ga prijatelji pokušavaju pogoditi. Ovo su njihovi pokušaji:

Boris: 218

Robert: 571

Marko: 732

Darko: 853

Grga im je rekao: „Jedan od vas je pogodio sve znamenke, a ostali samo po jednu, no nijedna od pogođenih znamenaka nije na pravom mjestu.“ Na to mu prijatelji kažu: „Na temelju ovih informacija ne možemo odrediti koji si broj zamislio jer postoji više takvih brojeva.“ Odredi zbroj svih tih mogućih brojeva.

Rezultat: 712

Rješenje.

Pretpostavimo da je Boris pogodio sve znamenke.

Tada znamenka 2 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica (jer Marko nije pogodio točno mjesto nijedne znamenke) pa mora biti na mjestu desetica.

Znamenka 1 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica (jer je Robert pretpostavio da je 1 na mjestu jedinica) pa mora biti na mjestu stotica.

Znamenka 8 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica (Darkova pretpostavka) pa mora biti na mjestu desetica.

No, na mjestu desetica ne mogu biti dvije znamenke (2 i 8) pa je ovo nemoguće.

Boris nije pogodio sve tri znamenke.

Pretpostavimo da je Robert pogodio sve znamenke. Tada na sličan način zaključujemo da: 5 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica, 7 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica, a to je nemoguće.

Pretpostavimo da je Marko pogodio sve znamenke. Tada zaključujemo: 7 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica, 3 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu stotica, 2 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu desetica. To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 327.

Pretpostavimo da je Darko pogodio sve znamenke. Tada: 8 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu desetica, 5 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica, 3 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu stotica. To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 385.

Zbroj svih mogućih brojeva iznosi $327 + 385 = 712$.

6. Ljepuškastí brojevi

Prirodni broj nazivamo *ljepuškastim* ako mu je znamenka jedinica jednaka umnošku svih preostalih znamenaka. Koliko ima četveroznamenastih ljepuškastih brojeva?

Rezultat: 215

Rješenje. Neka je traženi četveroznamenasti broj $\overline{abcd}$, $a \neq 0$.

Za $d = 0$ imamo $9 \cdot 19 = 171$ mogućnost (za a postoji 9 mogućnosti, a za b i c ukupno 19 mogućnosti s barem jednom znamenkom 0).

Za $d = 1$ imamo jednu mogućnost, broj 1111.

Za $d = 2$ imamo 3 mogućnosti, jer su znamenke a, b i c jednake 1, 1 i 2, u nekom poretku.

Za $d = 3$ imamo 3 mogućnosti (znamenke su 1,1,3).

Za $d = 4$ imamo $3 + 3 = 6$ mogućnosti (znamenke 1,1,4 ili 1,2,2).

Za $d = 5$ imamo 3 mogućnosti (znamenke 1,1,5).

Za $d = 6$ imamo $3 + 6 = 9$ mogućnosti (znamenke 1,1,6 ili 1,2,3).

Za $d = 7$ imamo 3 mogućnosti (znamenke 1,1,7).

Za $d = 8$ imamo $3 + 6 + 1 = 10$ mogućnosti (znamenke 1,1,8 ili 1,2,4 ili 2,2,2).

Za $d = 9$ imamo $3 + 3 = 6$ mogućnosti (znamenke 1,1,9 ili 1,3,3).

To je ukupno $171 + 1 + 3 + 3 + 6 + 3 + 9 + 3 + 10 + 6 = 215$ mogućnosti.

7. Źarulje

U sobi su dvije Źarulje. Kada se uključi prekidač prve Źarulje, ona zasvijetli tek nakon 6 s i svijetli 5 s, zatim opet ne svijetli 6 s i svijetli 5 s, i to se stalno ponavlja. Kada se uključi prekidač druge Źarulje, ona zasvijetli nakon 4 s i svijetli 3 s, opet ne svijetli 4 s i svijetli 3 s, i to se stalno ponavlja. Linda je istovremeno uključila oba prekidača i nakon 2021 sekunde ih isključila. Koliko su sekundi za to vrijeme obje Źarulje istovremeno svijetlile?

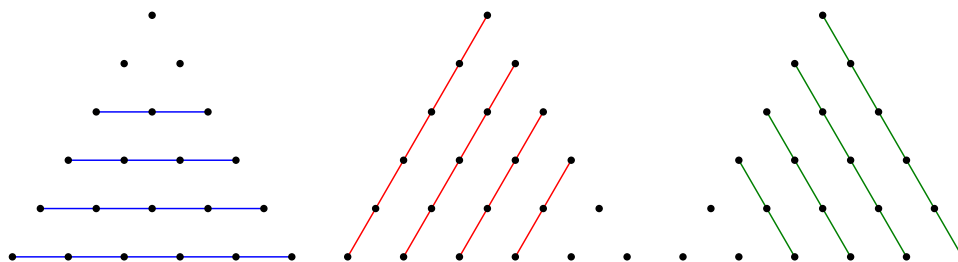
Rezultat: 392

Rješenje.

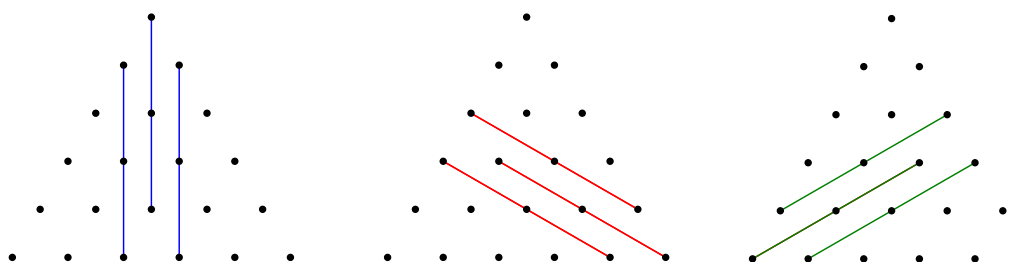
Svakih 11 sekundi prva će žarulja ponavljati period u kojem 6 sekundi neće svijetliti pa će 5 sekundi svijetliti. Druga će žarulja takav period ponavljati svakih 7 sekundi.

Vremenski interval koji trebamo promatrati kao zajednički period za obje žarulje traje $7 \cdot 11 = 77$ sekundi.





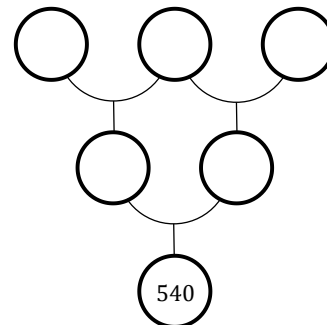
Osim toga, postoje i po tri točke na dužinama koje nisu paralelne nekoj stranici trokuta, a koje ne želimo brojiti, ukupno ih je $3 \cdot 3 = 9$.



Konačno, traženi broj je $210 - (60 + 9) = 210 - 69 = 141$.

9. Najveći zbroj

U jednom polju na slici upisan je broj 540, a ostala polja treba popuniti prirodnim brojevima većim od 1 tako da umnožak brojeva u dvama susjednim poljima bude jednak broju u polju ispod njih. Koliki je najveći mogući zbroj tih šest brojeva?

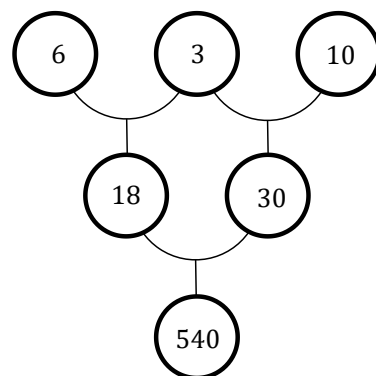
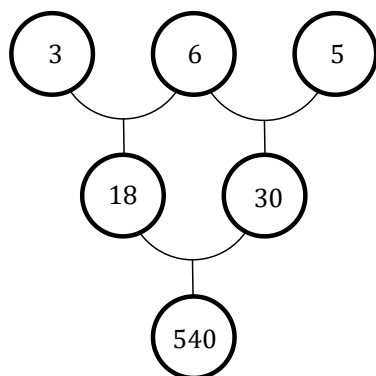
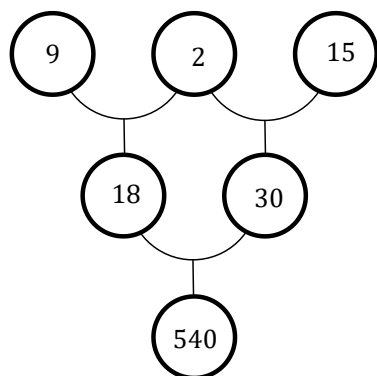
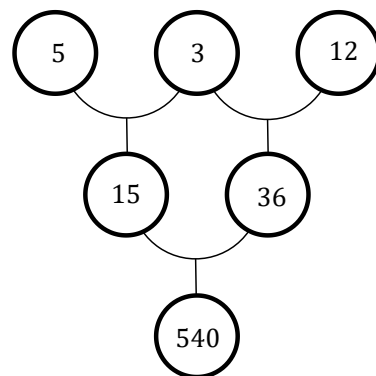
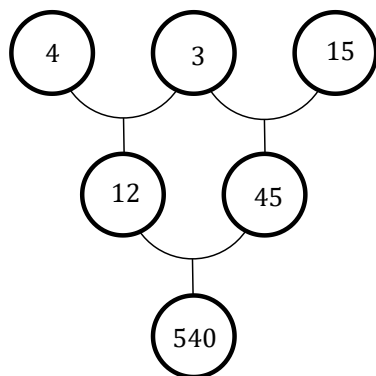
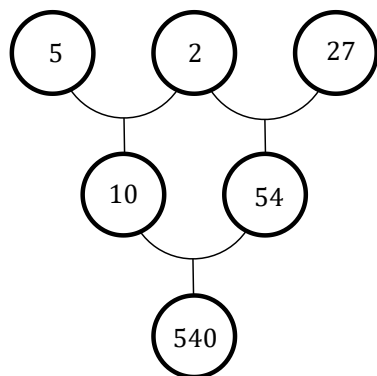
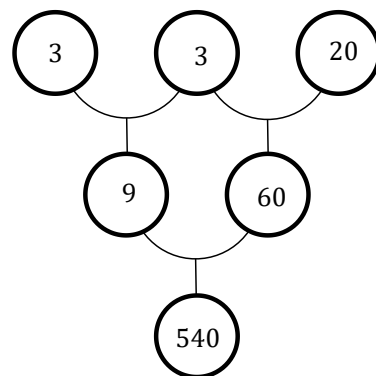
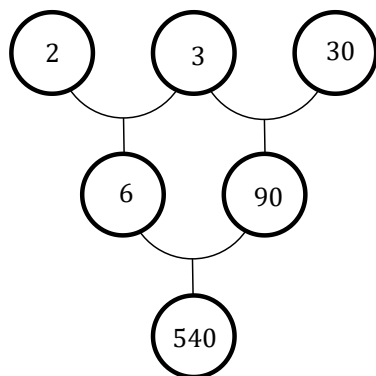
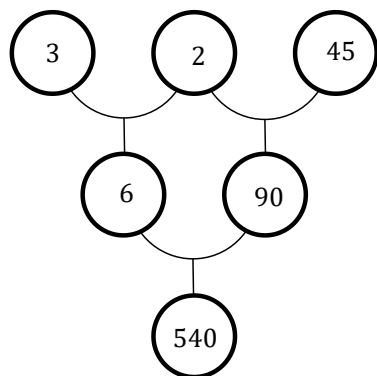


Rezultat: 686

Rješenje. Broj 540 možemo prikazati kao umnožak dvaju faktora većih od 1 na više načina, no ako rastavimo npr. kao $540 = 2 \cdot 270$, te upišemo te brojeve u srednjem retku, nećemo moći popuniti gornji redak jer ne smijemo koristiti faktor 1. Ovo zapravo znači da nijedan od brojeva u srednjem retku ne smije biti prost broj, pa broj 540 moramo prikazati kao umnožak dvaju složenih brojeva. Također, ti brojevi ne smiju biti relativno prosti, jer bi u tom slučaju u srednje polje gornjeg retka trebali upisati broj 1. Zato razmatramo ove mogućnosti:

$$540 = 6 \cdot 90 = 9 \cdot 60 = 10 \cdot 54 = 12 \cdot 45 = 15 \cdot 36 = 18 \cdot 30.$$

U srednjem gornjem polju može biti bilo koji zajednički faktor tih brojeva (veći od 1), pa imamo sljedeće mogućnosti:

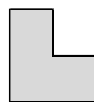


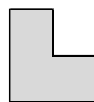
Najveći mogući zbroj svih 6 brojeva je 686 koji se postiže u prvom slučaju ($45 + 2 + 3 + 90 + 6 + 540$).

15	11	37	11	15
11	21	40	21	11
37	40	26	40	37
11	21	40	21	11
15	11	37	11	15

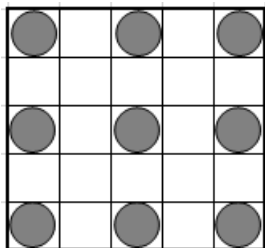
Rezultat: 234

10. Triomino



Osam triomino pločica oblika  postavlja se na ploču dimenzija 5×5 tako da svaka prekriva tri polja, a međusobno se ne preklapaju. Pritom jedno polje ostaje neprekriveno. Koliki je zbroj brojeva na svim poljima koja mogu ostati neprekrivena?

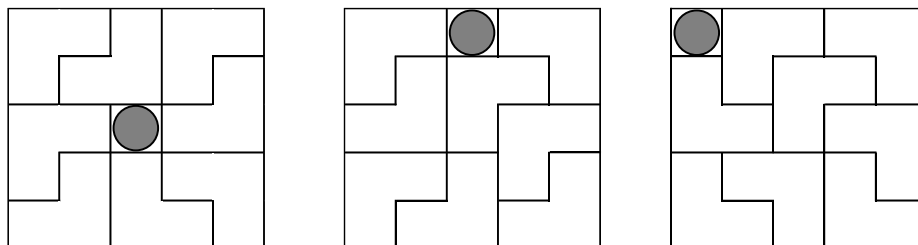
Rješenje. Osam triomino pločica danog oblika prekriva 24 polja, a točno jedno ostaje nepokriveno. Pokazat ćemo da nepokrivena mogu ostati samo polja označena na slici.



Pojedina triomino pločica ne može pokriti dva od njih, pa 8 triomino pločica ne može pokriti svih 9 polja. To znači da će uvijek jedno od tih polja ostati nepokriveno.

To ujedno znači da će pri svakom rasporedu osam triomina na ploči, sva ostala polja biti prekrivena.

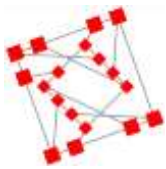
Još treba provjeriti može li svako od označenih devet polja ostati nepokriveno.



Ploče možemo i rotirati, pa ovi primjeri pokazuju da je triomine moguće rasporediti tako da nepokriveno ostane središnje polje (u koje je upisan broj 26), bilo koje od četiri srednja polja uz rub ploče (u kojima je broj 37), kao i bilo koje od četiri polja u uglu (u kojima je broj 15).

Dakle, nepokriveno može ostati svako od 9 polja označenih na prvoj slici (i samo ta polja).

Zbroj brojeva na njima je $26 + 4 \cdot 37 + 4 \cdot 15 = 234$.



Hrvatsko matematičko društvo



HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 12. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Točke u trokutu

U pravokutnom koordinatnom sustavu zadan je trokut ABC čiji su vrhovi $A(-20,0)$, $B(20,0)$ i $C(0,40)$. Koliko ima točaka čije su obje koordinate cijeli brojevi, a koje leže unutar ili na rubu tog trokuta?

Rezultat: 841

Rješenje.

Ako koordinate traženih točaka označimo s (x, y) , onda je najmanji mogući cjelobrojni y jednak 0, a najveći 40.

Za $y = 0$ u trokutu $\triangle ABC$ leži 41 točka s cjelobrojnim koordinatama.

Za $y = 1$ ima ih 39.

Za $y = 2$ ih ima također 39.

Za $y = 3$ ih je 37.

Za $y = 4$ ih je 37.

...

Za $y = 37$ ih je 3

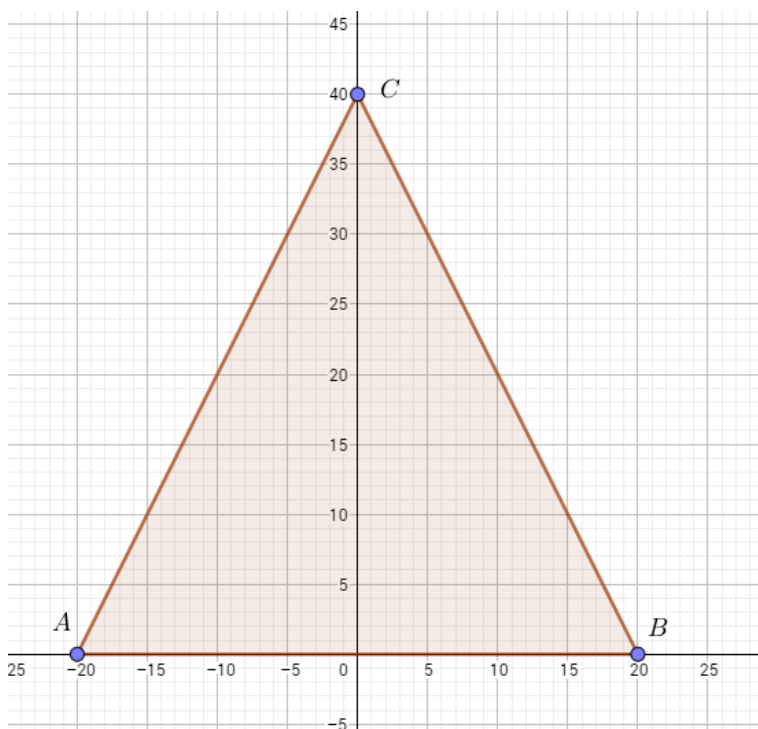
Za $y = 38$ ih je 3.

Za $y = 39$ ih je 1.

Za $y = 40$ ih je 1.

Dakle, ukupan broj točaka sa zadanim svojstvom je:

$$\begin{aligned} & 41 + 2 \cdot (39 + 37 + \dots + 3 + 1) \\ &= 41 + 2 \cdot \frac{20 \cdot 40}{2} = 41 + 800 \\ &= 841. \end{aligned}$$



2. Lokot

Mislav je zaboravio četveroznamenkastu šifru lokota bicikla, no sjeća se nekih detalja. Broj je djeljiv s 15, no nije djeljiv sa 6, a znamenke se smanjuju od znamenke tisućica prema znamenki jedinica. Odredi šifru tog lokota te kao rezultat upiši njegove prve tri znamenke (bez znamenke jedinica).

Rezultat: 976

Rješenje.

Kako je četveroznamenasti broj djeljiv s 15, mora biti djeljiv s 5. No, kako broj nije djeljiv sa 6, nije djeljiv ni s 2, pa je znamenka jedinica jednaka 5.

Znamenke se smanjuju od znamenke tisućica prema znamenki jedinica. Dakle, preostale tri znamenke su veće od 5, pa ih biramo iz skupa {6, 7, 8, 9}.

Moguće šifre su:

9875

9865

9765

8765

Broj je djeljiv s 15, pa mora biti djeljiv i s 3. To znači da mu zbroj znamenaka mora biti djeljiv s 3.

$$9+8+7+5=29$$

$$9+8+6+5=28$$

$$9+7+6+5=27 \text{ (djeljiv s 3!)}$$

$$8+7+6+5=26$$

Od moguća četiri broja jedino je 9765 djeljiv s 3, pa i s 15. Dakle, šifra lokota je broj 9765, a rezultat ovog zadatka 976.

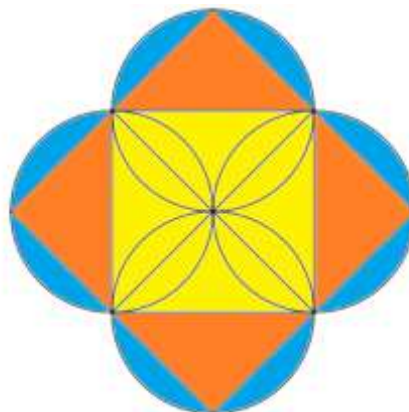
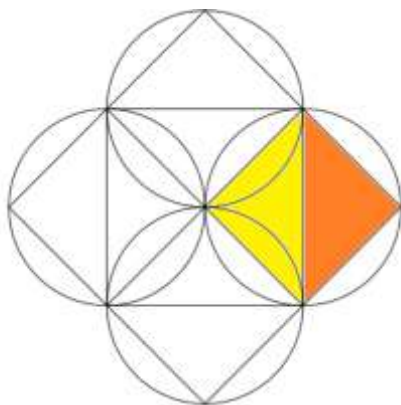
3. Krugovi

Površina plavo obojenog lika na slici iznosi 124 cm^2 . Za koliko je kvadratnih centimetara površina prikazanog kvadrata manja od ukupne površine narančasto obojenih likova?

Rezultat: 496

Prvo rješenje.

Dijagonale dijele kvadrat na četiri sukladna jednakokračna trokuta. Zrcalimo li ta četiri trokuta s obzirom na stranice kvadrata, dobit ćemo još četiri sukladna trokuta upisana u polukrugove kao na slici. Površina žutog trokuta jednaka je površini narančastog trokuta na slici.



Zbroj površina narančastih trokuta jednaka je površini žutog kvadrata, pa je razlika površina koja se traži u zadatku jednaka zbroju površina plavih likova. S obzirom da je zbroj površina dvaju plavih likova na slici jednak površini plavo obojenog lika zadanoj u zadatku, što iznosi 124 cm^2 , znači da je zbroj površina svih 8 plavo obojenih dijelova jednak $4 \cdot 124 = 496 \text{ cm}^2$.

Drugo rješenje.

Unutar kvadrata su nacrtana četiri dijela kruga koji su jednake površine kao narančasti likovi. Ti dijelovi imaju zajedničke likove koji su iste površine kao plavi lik.

Dakle, ukupna površina narančastih likova je veća od površine kvadrata točno za četiri površine plavog lika, to jest za $4 \cdot 124 = 496 \text{ cm}^2$.

4. Zamišljeni broj

Grga je zamislio troznamenkasti broj, a njegovi ga prijatelji pokušavaju pogoditi.

Ovo su njihovi pokušaji:

Boris: 218

Robert: 571

Marko: 732

Darko: 853

Grga im je rekao: „Jedan od vas je pogodio sve znamenke, a ostali samo po jednu, no nijedna od pogodjenih znamenaka nije na pravom mjestu.“ Na to mu prijatelji kažu: „Na temelju ovih informacija ne možemo odrediti koji si broj zamislio jer postoji više takvih brojeva.“ Odredi zbroj svih tih mogućih brojeva.

Rezultat: 712

Rješenje.

Pretpostavimo da je Boris pogodio sve znamenke.

Tada znamenka 2 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica (jer Marko nije pogodio točno mjesto nijedne znamenke) pa mora biti na mjestu desetica.

Znamenka 1 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica (jer je Robert pretpostavio da je 1 na mjestu jedinica) pa mora biti na mjestu stotica.

Znamenka 8 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica (Darkova pretpostavka) pa mora biti na mjestu desetica. No, na mjestu desetica ne mogu biti dvije znamenke (2 i 8) pa je ovo nemoguće.

Boris nije pogodio sve tri znamenke.

Pretpostavimo da je Robert pogodio sve znamenke. Tada na sličan način zaključujemo da:

5 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,

7 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica, a to je nemoguće.

Pretpostavimo da je Marko pogodio sve znamenke. Tada zaključujemo:

7 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,

3 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu stotica,

2 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu desetica.

To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 327.

Pretpostavimo da je Darko pogodio sve znamenke. Tada:

8 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu desetica,

5 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica,

3 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu stotica.

To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 385.

Zbroj svih mogućih brojeva iznosi $327 + 385 = 712$.

5. Soba

Ana oboji sobu za 15 sati, Barbara za 10 sati, a Cvijeta dvostruko brže od Ane. Ana počne bojiti i boji sama sat i pol, onda joj se pridruži Barbara i boje zajedno dok pola sobe ne bude obojeno. Nakon toga im se pridruži i Cvijeta te sve tri boje dok cijela soba ne bude obojena. Koliko je ukupno minuta trajalo bojenje sobe?

Rezultat: 334

Rješenje.

Ana za 60 minuta oboji $\frac{1}{15}$ sobe, a za 90 minuta oboji $1.5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$ sobe.

Ana i Barbara zajedno moraju obojiti $\frac{4}{10}$ sobe. One za 60 minuta zajedno oboje $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$ sobe, pa će $\frac{4}{10}$ sobe obojiti za $\frac{4}{10} : \frac{1}{6} = \frac{12}{5}$ sati, odnosno 144 minute.

Ana, Barbara i Cvijeta zajedno moraju obojiti pola sobe. One za 60 minuta zajedno oboje $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$ sobe, pa će $\frac{1}{2}$ sobe obojati za $\frac{1}{2} : \frac{3}{10} = \frac{5}{3}$ sati, odnosno 100 minuta.

Cijela soba je obojena za $90 + 144 + 100 = 334$ minute.

6. Žarulje

U sobi su dvije žarulje. Kada se uključi prekidač prve žarulje, ona zasvijetli tek nakon 6 s i svijetli 5 s, zatim opet ne svijetli 6 s i svijetli 5 s, i to se stalno ponavlja. Kada se uključi prekidač druge žarulje, ona zasvijetli nakon 4 s i svijetli 3 s, opet ne svijetli 4 s i svijetli 3 s, i to se stalno ponavlja. Linda je istovremeno uključila oba prekidača i nakon 2021 sekunde ih isključila. Koliko su sekundi za to vrijeme obje žarulje istovremeno svijetlile?

Rezultat: 392

Rješenje.

Svakih 11 sekundi prva će žarulja ponavljati period u kojem 6 sekundi neće svijetliti pa će 5 sekundi svijetliti. Druga će žarulja takav period ponavljati svakih 7 sekundi.

Kako je $V(11, 7) = 77$, vremenski interval koji trebamo promatrati traje 77 sekundi.



U prva dva pravokutnika žutom su bojom predstavljene sekunde u kojima žarulje svijetle, a sivom sekunde u kojima žarulje ne svijetle. Prvi pravokutnik prikazuje stanje prve žarulje, a drugi druge. U trećem pravokutniku označene su sekunde kad obje žarulje svijetle istovremeno.

U promatranom periodu od 77 sekundi obje žarulje istovremeno svijetle $1 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 = 15$ sekundi. Kako je $2021 = 26 \cdot 77 + 19$, takvih će perioda biti 26, a zatim preostaje još 19 sekundi. U tih 19 sekundi žarulje će istovremeno svijetliti 2 sekunde.

Obje žarulje istovremeno svijetle ukupno $26 \cdot 15 + 2 = 392$ sekunde.

7. Potencije

Neka je a znamenka jedinica broja 7^{456} , b znamenka jedinica broja 8^{567} i neka je c znamenka jedinica broja 9^{678} . Odredi broj $\overline{abc}$.

Rezultat: 121

Rješenje. Odredimo posljednju znamenku broja 7^{456} .

$$7^1 = 7$$

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

$$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

$$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$$

7^4 završava znamenkom 1, pa će znamenkom 1 završavati i $7^8, 7^{12}, 7^{16}, \dots$ jer je $1 \cdot 1 = 1$.

Kako je $456 = 114 \cdot 4$, i broj 7^{456} završava znamenkom 1. Dakle, $a = 1$.

Odredimo posljednju znamenku broja 8^{567} .

$$8^1 = 8$$

$$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$$

$$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$$

$$8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$$

8^4 završava znamenkom 6, pa će znamenkom 6 završavati i $8^8, 8^{12}, 8^{16}, \dots$ jer je $6 \cdot 6 = 36$.

Kako je $567 = 141 \cdot 4 + 3$, i kako broj $8^3 = 512$ završava znamenkom 2 zaključujemo da broj 8^{567} završava istom znamenkom kao i broj $6 \cdot 2 = 12$, dakle $b = 2$.

Konačno, odredimo posljednju znamenku broja 9^{678} .

$$9^1 = 9$$

$$9^2 = 9 \cdot 9 = 81$$

9^2 završava znamenkom 1, pa će znamenkom 1 završavati i $9^4, 9^6, 9^8, \dots$ jer je $1 \cdot 1 = 1$.

Kako je 678 paran broj, i 9^{678} završava znamenkom 1, dakle $c = 1$.

Traženi broj $\overline{abc}$ je 121.

8. Devetke

Zbrojimo li 199 međusobno različitih prirodnih brojeva čije su sve znamenke 9, a najveći od njih ima 199 znamenaka, dobivamo broj n . Odredi zbroj znamenaka broja n .

Rezultat: 207

Rješenje. Uočimo da vrijedi

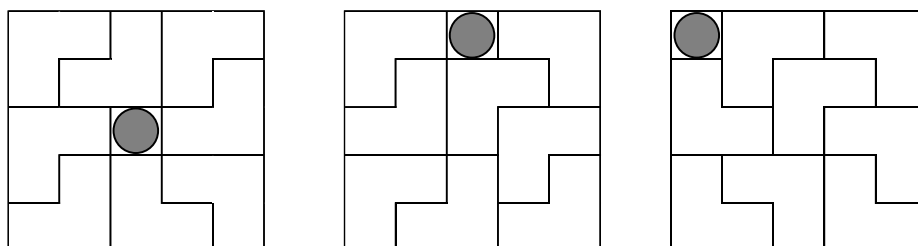
$$\begin{aligned} n &= 9 + 99 + 999 + \dots + 999 \dots 99 \\ &= (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10000 \dots 0 - 1) \\ &= \left(10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{10000 \dots 0}_{200 \text{ znamenki}} \right) - 199 \\ &= \underbrace{1111 \dots 11110}_{200 \text{ znamenki}} - 199 = \underbrace{1111 \dots 10911}_{200 \text{ znamenki}} \end{aligned}$$

Zbroj znamenki broja n je $198 + 9 = 207$.

Pojedina triomino pločica ne može pokriti dva od njih, pa 8 triomino pločica ne može pokriti svih 9 polja. To znači da će uvijek jedno od tih polja ostati nepokriveno.

To ujedno znači da će pri svakom rasporedu osam triomina na ploči, sva ostala polja biti prekrivena.

Još treba provjeriti može li svako od označenih devet polja ostati nepokriveno.



Ploče možemo i rotirati, pa ovi primjeri pokazuju da je triomine moguće rasporediti tako da nepokriveno ostane središnje polje (u koje je upisan broj 26), bilo koje od četiri srednja polja uz rub ploče (u kojima je broj 37), kao i bilo koje od četiri polja u uglu (u kojima je broj 15).

Dakle, nepokriveno može ostati svako od 9 polja označenih na prvoj slici (i samo ta polja).

Zbroj brojeva na njima je $26 + 4 \cdot 37 + 4 \cdot 15 = 234$.