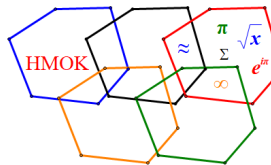


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. zadatak

Na jednoj polici u knjižari nalazi se šest matematičkih knjiga čije su cijene 62 kn, 63 kn, 66 kn, 68 kn, 69 kn i 71 kn. I Jure i Duje kupili su knjige s te police i pritom je Duje potrošio četiri puta više od Jure, a na polici je ostala samo jedna knjiga. Koje je knjige kupio svaki od njih i koliko je kuna za njih dao? Kolika je cijena neprodane knjige?

Rješenje:

Sve knjige zajedno vrijede 399 kn.

Duje je potrošio četiri puta više od Jure, pa su zajedno platili pet puta više nego što je Jure platio svoje knjige. To znači da je ukupna cijena kupljenih knjiga višekratnik broja 5, što vrijedi samo ako je neprodana ostala knjiga od 69 kn.

Jure i Duje zajedno su platili $399 - 69 = 330$ kn. Jure je platio $330 : 5 = 66$ kn, a Duje 264 kn.

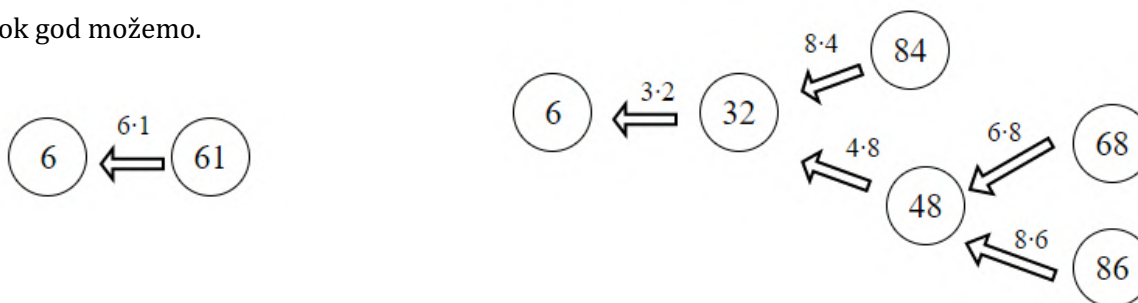
Duje je kupio knjige od 62, 63, 68 i 71 kn, a Jure od 66 kn.

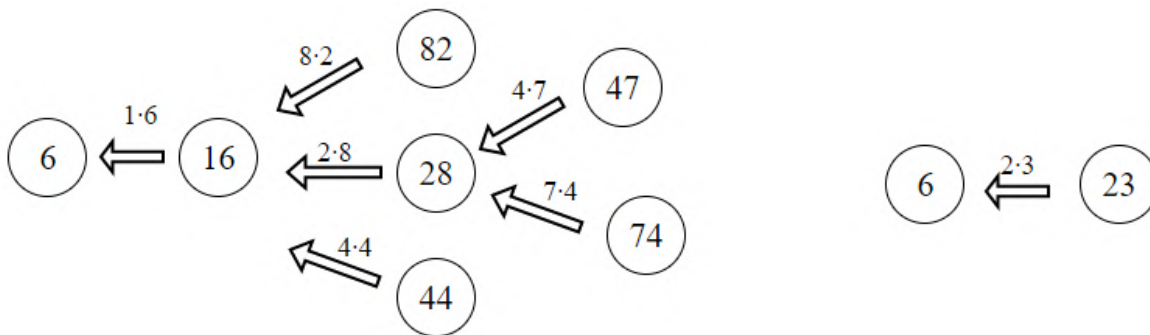
2. zadatak

U lancu brojeva svaki je broj, nakon prvog, jednak umnošku znamenaka prethodnog broja, a lanac se nastavlja sve do jednoznamenkastog broja. Na primjer: $63 \rightarrow 18 \rightarrow 8$. U lancu mogu biti dva ili više brojeva. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji mogu biti na početku lanca koji završava brojem 6.

Rješenje:

Redom zapisujemo sve mogućnosti za prikaz broja 6 u obliku umnoška dvaju jednoznamenkastih brojeva, a onda to činimo za svaki dvoznamenkasti broj dok god možemo.





Ne postoje druge mogućnosti jer se brojevi navedeni na početku lanaca ne mogu prikazati kao umnošci dva jednoznamenakasta prirodna broja, što možemo utvrditi promatrajući tablicu množenja do 10 puta 10. Dakle, na početku lanca može biti jedan od sljedećih 13 brojeva: 16, 23, 28, 32, 44, 47, 48, 61, 68, 74, 82, 84 i 86.

3. zadatak

Ana, Dora, Branko, Cvitko i Fran zauzeli su u proljetnom polumaratonu prvih pet mjesta. Na pitanje koje je mjesto zauzeo koji trkač, petoro gledatelja dalo je ove odgovore:

- 1) Cvitko je stigao drugi, a Branko treći.
- 2) Fran je stigao treći, a Dora peta.
- 3) Ana je stigla četvrta, a Cvitko drugi.
- 4) Dora je stigla prva, a Fran drugi.
- 5) Branko je stigao prvi, a Ana četvrta.

U svakom odgovoru jedan je dio točan, a drugi netočan. Odredi poredak trkača prve petorke u proljetnom polumaratonu.

Prvo rješenje:

Razmotrimo sve mogućnosti za Anu:

- ♦ Ako je Ana stigla prva, tada bi prema 5. tvrdnji Branko stigao prvi, što je nemoguće jer ne mogu oboje biti prvi.
- ♦ Ako je Ana stigla druga, tada iz 1. tvrdnje zaključujemo da je Branko treći. Iz 2. tvrdnje tada zaključujemo da je Dora peta jer Fran ne može biti treći kad je Branko treći. Prema 4. tvrdnji Fran je drugi. Prema tome u 5. tvrdnji nijedan dio ne može biti točan, pa zaključujemo da Ana nije druga.
- ♦ Ako je Ana stigla treća, tada iz 1. tvrdnje zaključujemo da je Cvitko drugi. Prema 2. tvrdnji Dora je peta. Prema 3. tvrdnji Cvitko je drugi, što se podudara s prethodnim zaključkom. No, u 4. tvrdnji nijedan dio ne može biti točan, što znači da je nemoguće da je Ana treća.
- ♦ Ako je Ana stigla četvrta, tada prema 3. tvrdnji Cvitko nije drugi. Prema 1. tvrdnji zaključujemo da je Branko treći. Iz 2. tvrdnje slijedi da je Dora peta. Prema 4. tvrdnji Fran je drugi. Prema tome, Cvitko je prvi. Peta tvrdnja je u skladu sa svim zaključcima.
- ♦ Promotrimo još je li moguće rješenje u kojem je Ana peta. Tada je prema 2. tvrdnji Fran treći. Prema 3. tvrdnji Cvitko je drugi. Prema 4. tvrdnji Dora je prva. Tada u 5. tvrdnji nijedan dio ne može biti točan, što znači da je nemoguće da je Ana peta.

Jedino moguće rješenje je da je Cvitko prvi, Fran drugi, Branko treći, Ana četvrta i Dora peta.

Drugo rješenje:

Krenimo od pete tvrdnje jer se ona sastoji od dva dijela koja se ponavljaju i u drugim tvrdnjama. Prema uvjetima zadatka, jedan dio je točan, a drugi netočan. Dakle, ili je Branko stigao prvi ili je Ana stigla četvrta.

Ako je Branko stigao prvi, tada je prema prvoj tvrdnji Cvitko stigao drugi. No, prema četvrtoj tvrdnji Fran bi trebao biti drugi, što znači da ovaj slučaj nije moguće. Dakle, Ana je stigla četvrta, a Branko nije stigao prvi.

To možemo upisati u tablicu, pri čemu možemo i označiti da Ana nije zauzela nijedno mjesto osim četvrtog, a na četvrtom mjestu nije završio nitko osim Ane.

	1. mjesto	2. mjesto	3. mjesto	4. mjesto	5. mjesto
Ana	-	-	-	+	-
Dora				-	
Branko	-			-	
Cvitko				-	
Fran				-	

Prema trećoj tvrdnji Cvitko nije stigao drugi. Ako Cvitko nije stigao drugi, onda je prema prvoj tvrdnji Branko stigao treći. Označavamo da Branko nije zauzeo nijedno mjesto osim trećeg i treće mjesto nije zauzeo nitko osim Branka.

	1. mjesto	2. mjesto	3. mjesto	4. mjesto	5. mjesto
Ana	-	-	-	+	-
Dora			-	-	
Branko	-	-	+	-	-
Cvitko		-	-	-	
Fran			-	-	

Budući da Fran nije stigao treći, prema drugoj tvrdnji zaključujemo da je Dora stigla peta.

	1. mjesto	2. mjesto	3. mjesto	4. mjesto	5. mjesto
Ana	-	-	-	+	-
Dora	-	-	-	-	+
Branko	-	-	+	-	-
Cvitko		-	-	-	-
Fran			-	-	-

Sada preostaje samo mogućnost da je Cvitko stigao prvi, a Fran drugi, što je u skladu s četvrtom tvrdnjom.

	1. mjesto	2. mjesto	3. mjesto	4. mjesto	5. mjesto
Ana	-	-	-	+	-
Dora	-	-	-	-	+
Branko	-	-	+	-	-
Cvitko	+	-	-	-	-
Fran	-	+	-	-	-

Pokazali smo da je moguć samo poredak: Cvitko, Fran, Branko, Ana, Dora.

4. zadatak

Neka je $ABCD$ kvadrat čije su stranice duljina 31 cm. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da je $|AE| = 11$ cm, na stranici $\overline{BC}$ točka F takva da je $|BF| = 14$ cm, a na stranici $\overline{CD}$ točka G takva da je $|CG| = 10$ cm. Odredi površinu trokuta EFG .

Rješenje:

Površinu trokuta EFG dobijemo kada od površine pravokutnika $ABCD$ oduzmemo površinu pravokutnika $AEHD$ i površine triju pravokutnih trokuta EGH , EBF i FCG :

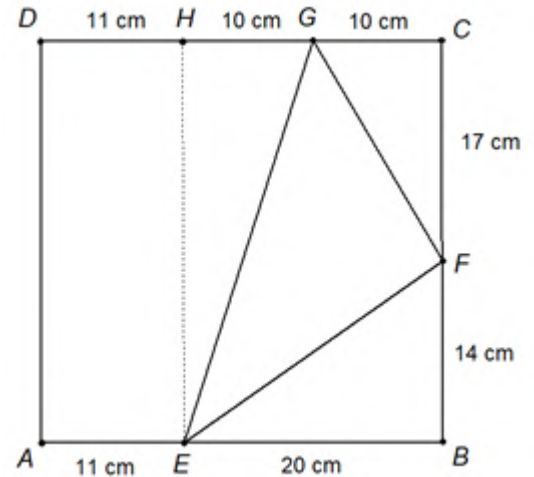
$$P_{EFG} = P_{ABCD} - (P_{AEHD} + P_{EGH} + P_{GFC} + P_{EBF}).$$

Budući da je površina pravokutnog trokuta jednaka polovini površine pravokutnika kojemu su stranice odgovarajuće stranice trokuta koje leže uz pravi kut, slijedi:

$$P_{EFG} = 31 \cdot 31 - (11 \cdot 31 + 10 \cdot 31 : 2 + 10 \cdot 17 : 2 + 20 \cdot 14 : 2)$$

$$P_{EFG} = 961 - (341 + 155 + 85 + 140) = 961 - 721 = 240$$

Dakle, površina trokuta EFG iznosi 240 cm^2

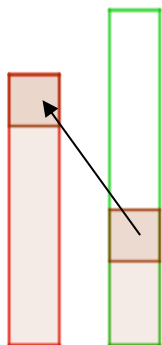


5. zadatak

U prvoj bačvi nalazi se 75 litara, u drugoj 34 litre, a u trećoj 21 litra vode, pri čemu niti jedna bačva nije puna. Ako bismo prvu bačvu napunili do vrha vodom iz druge bačve, tada bi preostala voda u drugoj bačvi zauzimala polovinu obujma druge bačve. No, ako bismo drugu bačvu napunili vodom iz treće bačve, tada bi preostala voda u trećoj bačvi zauzimala četvrtinu obujma treće bačve. Ako bismo pak treću bačvu napunili vodom iz prve bačve, tada bi preostala voda u prvoj bačvi zauzimala polovinu obujma prve bačve. Odredi obujam svake pojedine bačve.

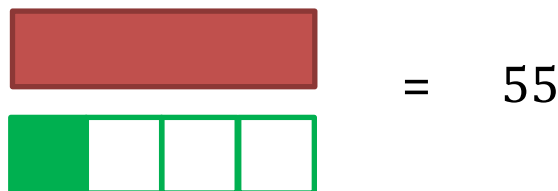
Rješenje:

Prikažimo grafički podatke iz zadatka. Plavim, crvenim i zelenim pravokutnikom prikažimo redom obujme prve, druge i treće bačve.

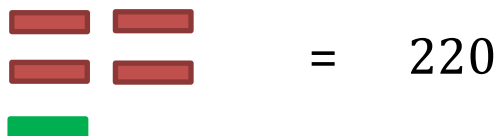


Ako bismo drugu bačvu napunili vodom iz treće bačve, tada bi preostala voda u trećoj bačvi zauzimala četvrtinu obujma treće bačve.

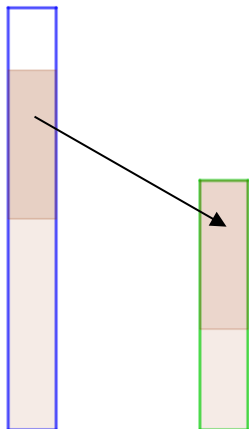
Može se zaključiti da ukupna količina vode iz druge i treće bačve, što iznosi $34 + 21 = 55$ litara, zauzima cijelu drugu bačvu i još četvrtinu treće bačve, tj.



Ako se količine učetverostruče dobivamo:



$$= 220$$



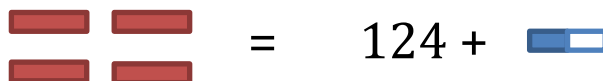
Ako bismo pak treću bačvu napunili vodom iz prve bačve, tada bi preostala voda u prvoj bačvi zauzimala polovicu obujma prve bačve.

Može se zaključiti da ukupna količina vode iz prve i treće bačve, što iznosi $75 + 21 = 96$ litara, zauzima cijelu treću bačvu i još pola prve bačve:



$$= 96$$

Iz ovoga zaključujemo da su četiri crvena pravokutnika za $220 - 96$, tj. za 124 veća od polovice plavog pravokutnika:

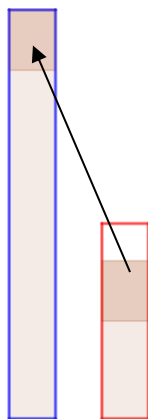


$$= 124 +$$

Udvostruče li se sve količine, zaključujemo da je 8 crvenih pravokutnika za 248 veće od jednog plavog:



$$= 248 +$$



Kad se prvu bačvu napuni do vrha iz druge bačve, tada bi preostala voda u drugoj bačvi zauzimala polovicu obujma druge bačve.

Može se zaključiti da ukupna količina vode iz prve i druge bačve, što iznosi $75 + 34 = 109$ litara, zauzima cijelu prvu bačvu i još pola druge bačve



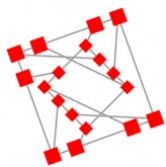
$$= 109$$

Sada zaključujemo da osam crvenih i još pola crvene bačve ima ukupni obujam $109 + 248$, što iznosi 357 litara. Udvostručimo li količine, dobivamo da 17 crvenih bačava ima obujam 714 litara.

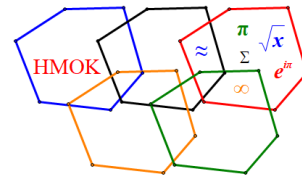
Prema tome, u crvenoj, tj. drugoj bačvi je $714 : 17 = 42$ litara vode.

Prema prvoj slici zaključujemo da je u plavoj, tj. prvoj bačvi $109 - 21 = 88$ litara vode.

Prema trećoj slici zaključujemo da je u zelenoj, tj. trećoj bačvi $96 - 44 = 52$ litre vode.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

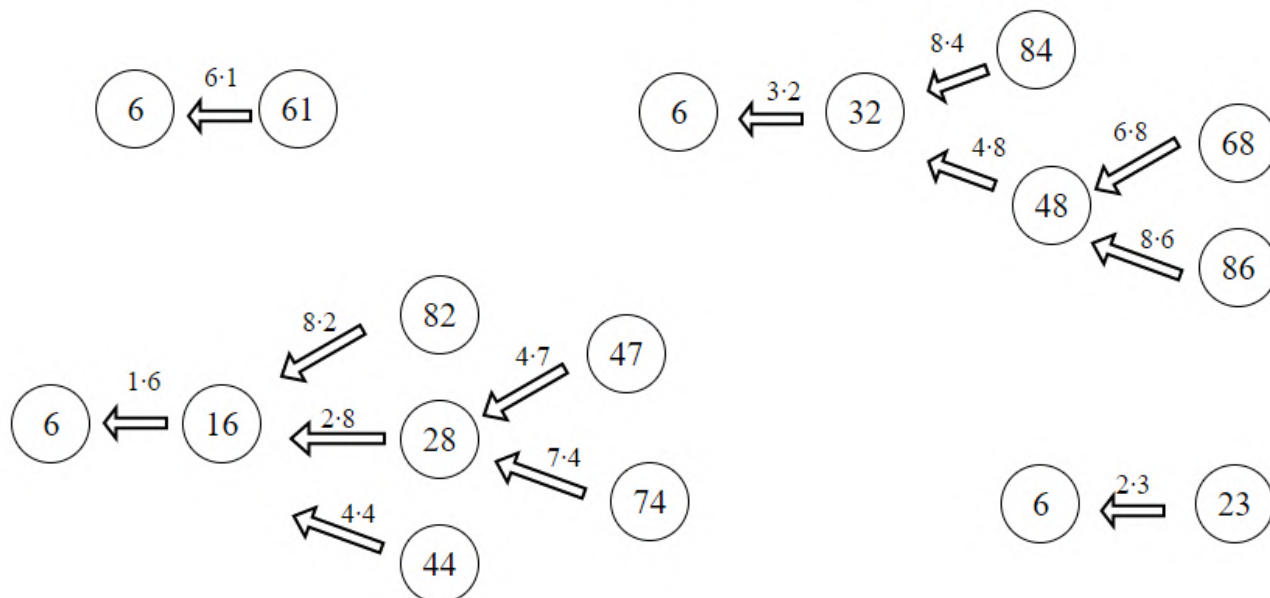
Rješenja zadataka za 5. razred

1. U lancu brojeva svaki je broj, nakon prvog, jednak umnošku znamenaka prethodnog broja, a lanac se nastavlja sve do jednoznamenkastog broja. Na primjer: $63 \rightarrow 18 \rightarrow 8$.

U lancu mogu biti dva ili više brojeva. Odredi sve dvoznamenkaste prirodne brojeve koji mogu biti na početku lanca koji završava brojem 6.

Rješenje:

Redom zapisujemo sve mogućnosti za prikaz broja 6 u obliku umnoška dvaju jednoznamenkastih brojeva, a onda to činimo za svaki dvoznamenkasti broj dok god možemo.



Ne postoje druge mogućnosti jer se brojevi navedeni na početku lanaca ne mogu prikazati kao umnošci dva jednoznamenkasta prirodna broja, što možemo utvrditi promatrajući tablicu množenja do 10 puta 10.

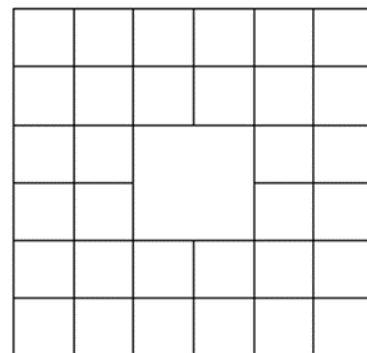
Dakle, na početku lanca može biti jedan od sljedećih 13 brojeva: 16, 23, 28, 32, 44, 47, 48, 61, 68, 74, 82, 84 i 86.

2. Koliko je pravokutnika na slici?

Prvo rješenje.

Pravokutnike možemo podijeliti u dvije skupine:

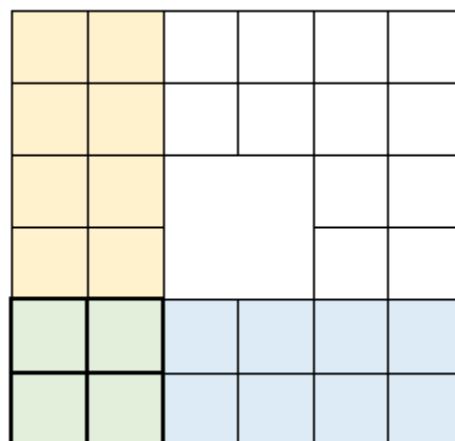
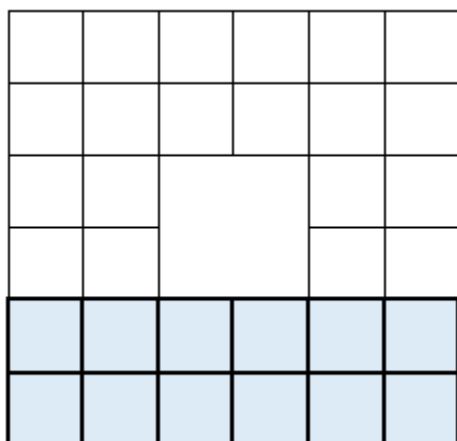
- (i) pravokutnici koji obuhvaćaju središnji kvadrat,
- (ii) pravokutnici koji ne obuhvaćaju središnji kvadrat.



Da bismo odredili broj pravokutnika koji obuhvaćaju središnji veći kvadrat uočimo da je svaki pravokutnik pravcima na kojima se nalaze njegove stranice. Da bi pravokutnik obuhvaćao središnji kvadrat stranice moramo odabrati između tri pravca iznad, ispod, lijevo i desno, pa je broj pravokutnika koji obuhvaćaju središnji kvadrat $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Odredimo sada broj pravokutnika koji ne sadrže središnji kvadrat.

Svaki takav pravokutnik dio je mreže 6×2 , kao plavi dio na lijevoj slici (postoje četiri takve mreže: ispod, iznad, lijevo i desno od središnjeg kvadrata). Broj pravokutnika u takvoj mreži možemo računati na sličan način kao gore. Za odabir gornje i donje stranice imamo tri mogućnosti – trebamo odabrati dva od tri pravca na kojima se one mogu nalaziti. Za lijevu i desnu stranicu imamo ukupno 21 mogućnost. To možemo vidjeti, na primjer, tako da prvo odaberemo jedan od 7 pravaca i onda još jedan od 6 pravaca, te uočimo da u pola tih odabira je pravac koji smo prvi odabrali lijevo od pravca kojeg smo drugog birali. Ukupan broj pravokutnika na plavoj mreži je $3 \cdot 21 = 63$.



Imamo četiri mreže, ali u broju $4 \cdot 63$ dvaput su pobrojani pravokutnici koji pripadaju dvjema takvim mrežama. To su pravokutnici koji pripadaju jednom od četiri presjeka dimenzija 2×2 (kao zeleni dio na desnoj slici). U svakom takvom presjeku ukupno je 9 pravokutnika.

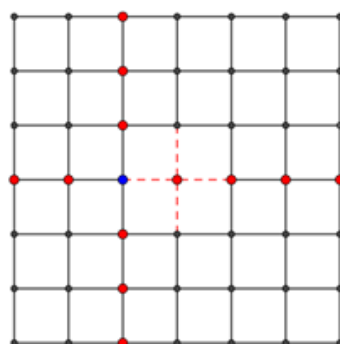
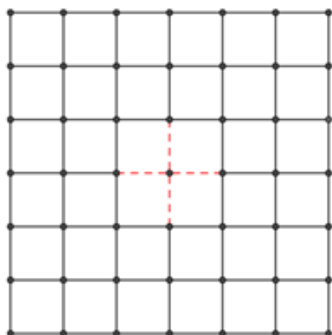
Dakle, ukupan broj pravokutnika koji ne obuhvaćaju središnji kvadrat je

$$4 \cdot 63 - 4 \cdot 9 = 216,$$

a ukupan broj pravokutnika na danoj slici je $81 + 216 = 297$.

Drugo rješenje.

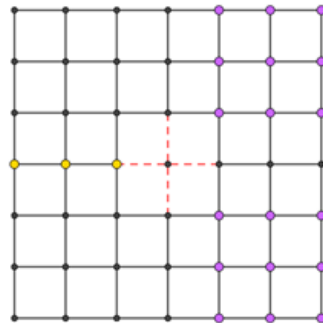
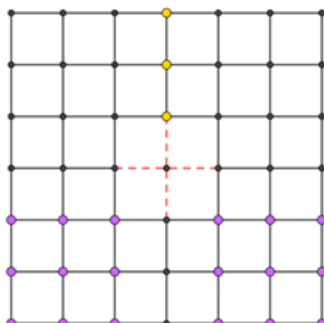
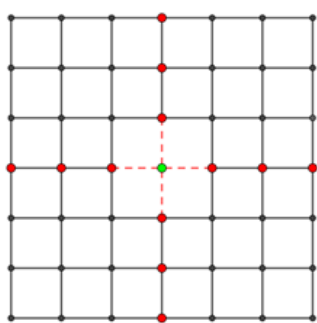
Nadopunimo mrežu pravokutnika s dvije (crvene isprekidane) linije u sredini. Na presjecima svih nacrtanih dužina ima 49 (7×7) točaka. Broj svih pravokutnika u ovoj nadopunjenoj mreži dobit ćemo ako prebrojimo sve moguće dijagonale (tj. parove nasuprotnih vrhova) tih pravokutnika.



Izaberimo bilo koju točku u mreži (plava točka). Da bismo nacrtali dijagonalu pravokutnika kojoj je jedna krajnja točka izabrana točka, možemo birati bilo koju od 36 točaka koje nisu u istom stupcu i retku kao izabrana točka (crvene točke). Kako plavu točku možemo izabrati na 49 načina, dijagonalu možemo izabrati na $49 \cdot 36$ načina. No, svaki pravokutnik ima dvije dijagonale i kako smo svaku dijagonalu brojali dvaput, da bismo dobili broj pravokutnika taj broj moramo podijeliti s 4. Dakle, ukupno je $49 \cdot 36 : 4 = 441$ pravokutnik u ovako nadopunjenoj mreži.

Od tog broja treba oduzeti broj pravokutnika čija bar jedna stranica prolazi crvenim isprekidanim linijama.

Prebrojimo najprije one pravokutnike kojima je jedan vrh u sredini (u sjecištu crvenih isprekidanih linija). Nasuprotni vrh takvog pravokutnika možemo izabrati među $4 \cdot 9 = 36$ crnih točaka na slici. Dakle, takvih pravokutnika ima 36.



Nadalje, prebrojimo pravokutnike kojima jedna stranica sadrži vertikalnu crvenu isprekidanu liniju. Njihove dijagonale dobit ćemo spajajući bilo koju od žuto označenih točaka iznad te crvene linije s bilo kojom ljubičastom točkom u donjem dijelu mreže. Takvih dijagonala (i pravokutnika) ima $3 \cdot (9 + 9) = 3 \cdot 18 = 54$.

Na isti način ćemo prebrojiti one pravokutnike čija jedna stranica prolazi horizontalnom isprekidanom crvenom linijom. Njih također ima 54.

Na zadanoj slici ima ukupno $441 - 36 - 2 \cdot 54 = 297$ pravokutnika.

Napomena.

U rješenjima smo vidjeli dvije strategije prebrojavanja (prebrojavanje sa i bez središnjeg kvadrata, odnosno od svih mogućih pravokutnika na mreži 6×6 oduzimamo pravokutnike koji sijeku središnji kvadrat) i dva načina određivanja broja pravokutnika na mreži (pravci na kojima su stranice, odnosno dijagonale). Te ideje se mogu kombinirati i na drugačije načine.

Ako smo dovoljno pažljivi, možemo direktno prebrojati koliko je pravokutnika pojedinih dimenzija:

1×1	32	2×2	17	3×3	4	4×4	9	5×5	4
2×1	$2 \cdot 24$	2×3	$2 \cdot 10$	3×4	$2 \cdot 6$	4×5	$2 \cdot 6$	5×6	$2 \cdot 2$
3×1	$2 \cdot 16$	2×4	$2 \cdot 9$	3×5	$2 \cdot 4$	4×6	$2 \cdot 3$		
4×1	$2 \cdot 12$	2×5	$2 \cdot 6$	3×6	$2 \cdot 2$			6×6	1
5×1	$2 \cdot 8$	2×6	$2 \cdot 3$						
6×1	$2 \cdot 4$								

Ukupan broj pravokutnika je 297.

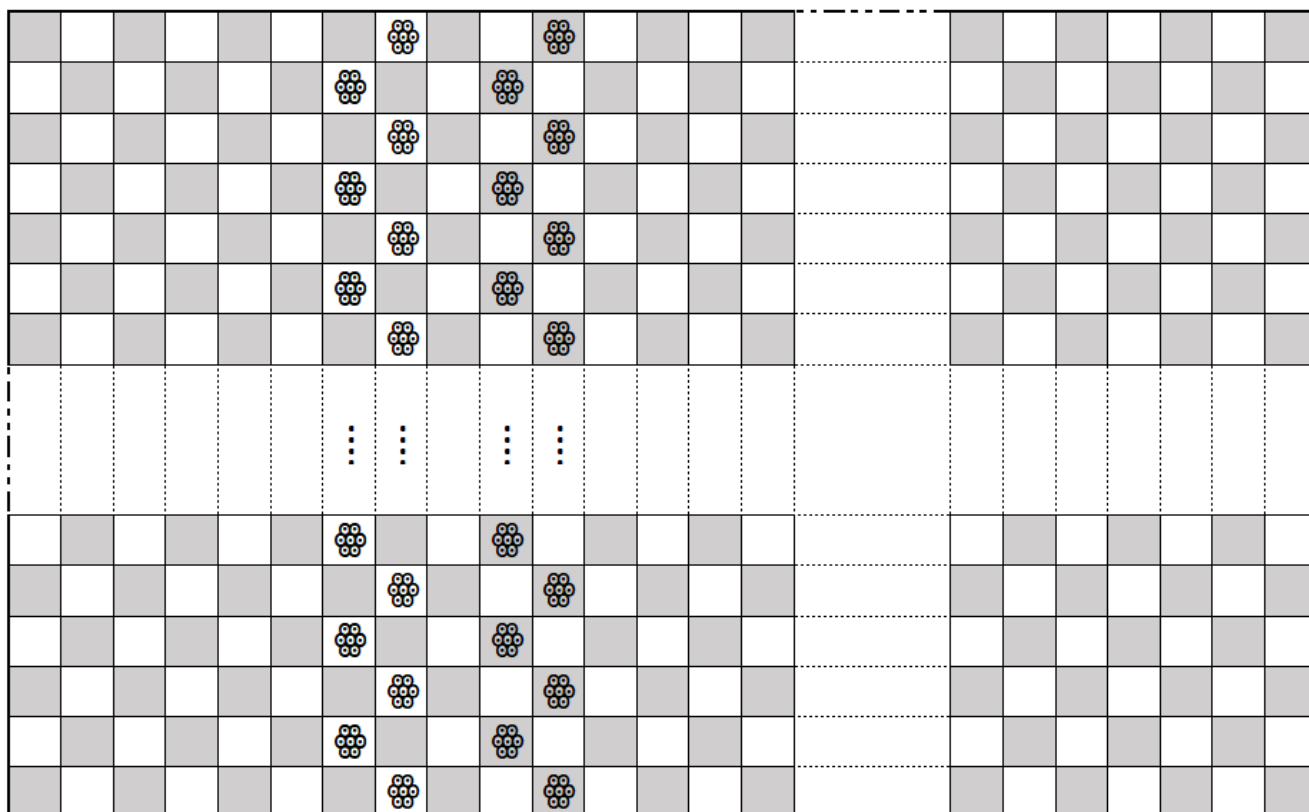
3. Polja ploče koja ima 25 redaka i 125 stupaca obojena su naizmjenice crno i bijelo (poput polja na šahovskoj ploči), a na nju se postavljaju figure skakavca koje napadaju po posebnim pravilima. Skakavac koji se nalazi na bijelom polju napada sva bijela polja u istom retku i sva crna polja u istom stupcu, a skakavac koji se nalazi na crnom polju napada sva crna polja u istom retku i sva bijela polja u istom stupcu (čak i ako se između nalazi druga figura). Odredi najveći broj skakavaca koje je moguće smjestiti na ploču tako da se međusobno ne napadaju.

Rješenje:

Najprije primijetimo da u svakom retku mogu biti najviše dva skakavca, jedan na bijelom i jedan na crnom polju – kada bi u jednom retku bila tri skakavca, dva od njih bi morala biti na istobojućim poljima, pa bi se međusobno napadala.

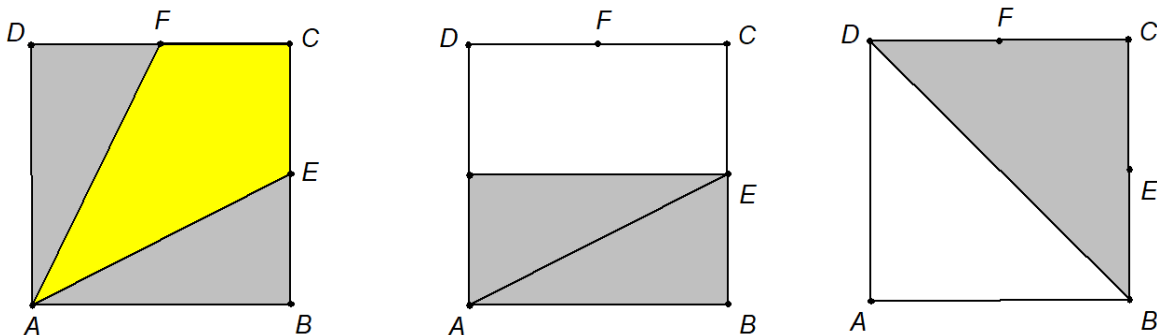
Ploča ima 25 redaka, stoga na njoj može biti najviše $2 \cdot 25 = 50$ skakavaca.

Zadatak će biti riješen ako pokažemo da je zaista moguće smjestiti 50 skakavaca na ploču na traženi način. U pojedinom stupcu svi skakavci moraju biti na poljima iste boje. Na slici je prikazan jedan mogući raspored 50 skakavaca koji se međusobno ne napadaju:

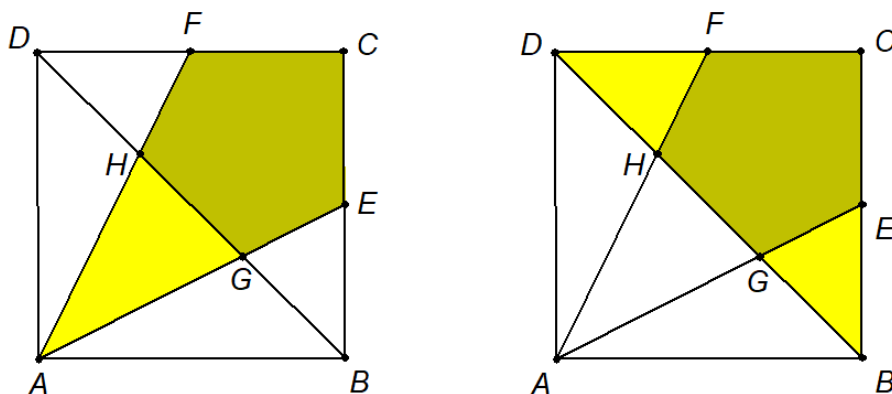


4. Neka je $ABCD$ kvadrat, a točke E i F redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Dijagonala $\overline{BD}$ tog kvadrata siječe dužine $\overline{AE}$ i $\overline{AF}$ redom u točkama G i H . Dokaži da je površina peterokuta $CFHGE$ jednaka zbroju površina trokuta ABG i AHD .

Rješenje: Promotrimo slike.



Četverokut $AECF$ i trokut BCD imaju jednake površine jer su im površine jednake polovini površine kvadrata $ABCD$.



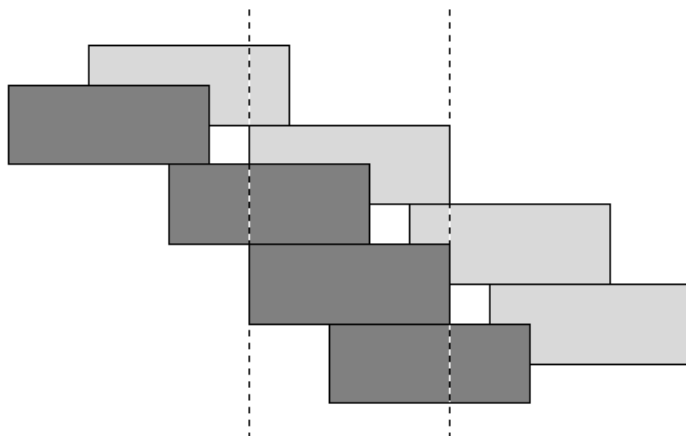
Presjek četverokuta $AECF$ i trokuta BCD , tj. njihov zajednički dio je peterokut $GECFH$.

Prema tome, slijedi $P(AGH) = P(BEG) + P(DHF)$,

a odatle i $P(GECFH) = P(ABG) + P(AHD)$, što je i trebalo dokazati.

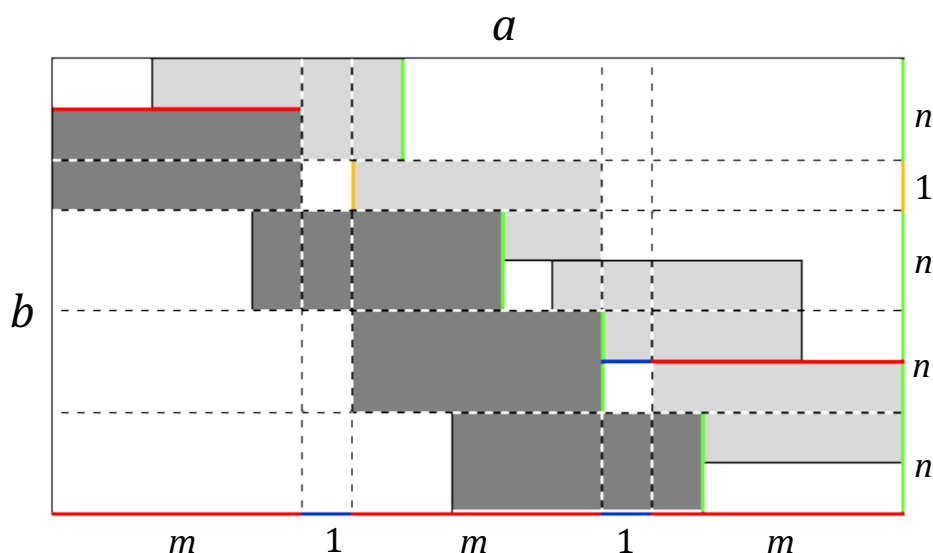
5. Četiri svijetlo siva i četiri tamno siva papira oblika pravokutnika imaju stranice istih duljina koje su, izražene u centimetrima, prirodni brojevi. Papiri su postavljeni na stol jedan do drugog tako da se svaki dodiruje s jednim ili dva susjedna papira iste boje duž dijela svoje dulje stranice. Na taj način nastali svijetlo sivi i tamno sivi lik djelomično su preklopljeni i pritom:

- na tri su mjesta između tih likova praznine oblika kvadrata površine 1 cm^2 ,
- drugi svijetlo sivi i treći tamno sivi papir postavljeni su tako da im kraće stranice pripadaju istim pravcima.



Najmanji pravokutnik koji možemo opisati oko tako postavljenih papira, a da mu stranice budu paralelne stranicama papira, ima opseg 200 cm. Koliko je mogućih dimenzija papira? Odredi najveću moguću površinu pojedinog papira.

Rješenje: Neka su a i b duljine stranica najmanjeg opisanog pravokutnika, a m i n duljine stranica sivog papira, $m > n$.



Promatrajući crveno i plavo označene dužine na slici vidimo da vrijedi $3m + 2 = a$, a promatrajući zeleno i žuto označene dužine uočavamo da je $4n + 1 = b$.

Zbrajanjem tih jednakosti dobije se:

$$3m + 4n + 3 = a + b$$

Kako je opseg jednak 200 cm, vrijedi $a + b = 100$, te dobivamo:

$$3m + 4n = 97.$$

Odredimo sve parove prirodnih brojeva m, n za koje je $m > n$ koji zadovoljavaju ovu jednadžbu.

Iz $3m > 3n$ slijedi $97 = 3m + 4n > 7n$, pa je $n < 14$ (jer je $14 \cdot 7 = 98 > 97$).

Analogno, zbog $4n < 4m$ slijedi $97 = 3m + 4n < 7m$, pa je $m > 13$ (jer je $13 \cdot 7 = 91 < 97$).

Također, vrijedi $3m < 97$ pa je $m < 33$ (jer je $33 \cdot 3 = 99 > 97$).

Zato je dovoljno provjeriti dobiju li se rješenja za $n = 1, 2, 3, \dots, 12, 13$,

odnosno za $m = 14, 15, 16, \dots, 31, 32$, no možemo dodatno eliminirati nemoguće slučajeve.

Broj $4n$ je paran broj pa $3m$ mora biti neparan da bi njihov zbroj bio neparan (97). To znači da je m neparan broj. Preostaju nam mogućnosti $m = 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31$.

Prikažimo ih u tablici:

m	$3m$	$4n = 97 - 3m$	n	$m \cdot n$
15	45	52	13	195
17	51	46		
19	57	40	10	190
21	63	34		
23	69	28	7	161
25	75	22		
27	81	16	4	108
29	87	10		
31	93	4	1	31

U nekim slučajevima ne dobivamo rješenje jer broj $97 - 3m$ nije djeljiv s 4.

Zaključujemo da su moguće duljine stranica papira (m, n) :

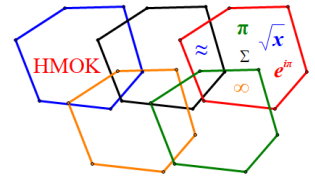
$$(15, 13), (19, 10), (23, 7), (27, 4) \text{ i } (31, 1).$$

Različitih mogućnosti ima pet, no ako su dimenzije $(31, 1)$, onda nema preklapanja.

Najveća moguća površina papira je $15 \cdot 13 = 195 \text{ cm}^2$.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Ana, njena mama i baka slave rođendan 23. lipnja. Danas, 23. lipnja 2021. godine, zbroj njihovih godina iznosi 127. Kada je Ana imala 4 godine, baka je bila dvostruko starija od mame. Pred dvije godine, mama je bila trostruko starija od Ane. Koje je godine rođena Anina mama? Koliko će godina imati Ana kada ona i mama budu zajedno imale jednako godina koliko i baka? Koje će to godine biti?

Rješenje.

Ove godine Ana ima A godina, mama M godina, a baka B godina. Vrijedi $A + M + B = 127$.

Ana je prije x godina imala 4 godine. Stoga je $x = A - 4$.

Nadalje, prije x godina je mama imala $M - x$ godina, a baka $B - x$ godina. Prama uvjetu zadatka je

$$B - x = 2 \cdot (M - x)$$

$$B - (A - 4) = 2 \cdot (M - (A - 4))$$

$$B - A + 4 = 2M - 2A + 8$$

$$A + B - 2M = 4$$

Iz prve jednakost slijedi $A + B = 127 - M$, pa je

$$127 - M - 2M = 4$$

$$3M = 123$$

$$M = 41$$

Anina mama ima 41 godinu, odnosno rođena je 1980. godine.

Prije dvije godine je mama imala 39 godina i bila je trostruko starija od Ane. To znači da je Ana prije dvije godine imala $39 : 3 = 13$ godina, a sada ima 15 godina ($A = 15$).

Baka ima $127 - 41 - 15 = 71$ godinu ($B = 71$).

Za y godina će Ana i mama zajedno imati jednako godina koliko i baka. Vrijedi

$$15 + y + 41 + y = 71 + y$$

$$56 + y = 71$$

$$y = 15$$

Ana će imati 30 godina kada ona i mama budu zajedno imale jednako godina koliko i baka.

To će biti 2036. godine.

2. Pobjednik odbojkaške utakmice je ekipa koja prva osvoji 3 seta. Ako je konačan rezultat u setovima 3 : 0 ili 3 : 1, pobjednik osvaja 3 boda, a poraženi 0 bodova. Ako je konačni rezultat 3 : 2, pobjednik osvaja 2 boda, a poraženi 1 bod.

Na odbojkaškom turniru sudjelovale su četiri ekipe: *A*, *B*, *C* i *D*. Svaka je ekipa sa svakom odigrala po jednu utakmicu. Nakon što su odigrane sve utakmice, tablica je izgledala ovako:

ekipa	bodovi	osvojeni setovi	izgubljeni setovi
<i>A</i>	9	9	1
<i>B</i>	5	7	6
<i>C</i>	2	4	8
<i>D</i>	2	4	9

Odredi rezultate svih odigranih utakmica.

Rješenje.

Ekipa *A* ima 9 bodova, znači dobila je sve tri utakmice s 3:0 ili 3:1. Zbog broja osvojenih i broja izgubljenih setova znamo da je točno u jednoj utakmici izgubila jedan set.

	bodovi	setovi
A-B	3 - 0	3 : ...
A-C	3 - 0	3 : ...
A-D	3 - 0	3 : ...
B-C		
B-D		
C-D		

Ekipa *B* je osvojila 7 setova, a najviše jedan protiv ekipe *A*. Znači ekipa *B* je dobila utakmice protiv *C* i *D*, te osvojila jedan set u utakmici protiv *A*. Ostale ekipe su od *A* izgubile s 3:0 u setovima.

	bodovi	setovi
A-B	3 - 0	3 : 1
A-C	3 - 0	3 : 0
A-D	3 - 0	3 : 0
B-C		3 : ...
B-D		3 : ...
C-D		

Ekipa *D* je izgubila 9 setova, a to znači da je svaka utakmica završila pobjedom njenog protivnika. Utakmica između ekipe *C* i *D* završila je podjelom bodova 2-1, odnosno 3:2 u setovima, jer ekipa *C* ima samo 2 boda.

	bodovi	setovi
A-B	3 - 0	3 : 1
A-C	3 - 0	3 : 0
A-D	3 - 0	3 : 0
B-C		3 : ...
B-D		3 : ...
C-D	2 - 1	3 : 2

Sada vidimo da je ekipa C izgubila od ekipe B s 3:0 ili 3:1, i konačno zaključujemo:

	bodovi	setovi
A-B	3 - 0	3 : 1
A-C	3 - 0	3 : 0
A-D	3 - 0	3 : 0
B-C	3 - 0	3 : 1
B-D	2 - 1	3 : 2
C-D	2 - 1	3 : 2

3. Odredi najmanji prirodni broj n za koji je svaki od razlomaka

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \dots, \frac{30}{n+32}, \frac{31}{n+33}$$

neskrativ.

Rješenje.

Dani razlomci su neskrativi točno onda kada su neskrativi njima recipročni razlomci

$$\frac{n+9}{7}, \frac{n+10}{8}, \frac{n+11}{9}, \dots, \frac{n+32}{30}, \frac{n+33}{31}$$

odnosno (umanjeni za 1)

$$\frac{n+2}{7}, \frac{n+2}{8}, \frac{n+2}{9}, \dots, \frac{n+2}{30}, \frac{n+2}{31}.$$

Svi ovi razlomci su neskrativi točno onda kada je $n+2$ relativno prost sa svim brojevima 7, 8, 9, ..., 30, 31.

Očito $n+2$ nije broj manji od 32, a niti 32, 33, 34, 35 ili 36 jer ti brojevi imaju zajedničke djelitelje s nekim od brojeva 7, 8, 9, ..., 30, 31. Dakle, najmanji takav $n+2$ je broj 37, odnosno $n = 35$.

4. Točka D je polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC , a točka E odabrana je na stranici $\overline{AC}$ tako da vrijedi $|\angle ADB| = |\angle CDE|$. Koji lik ima veći opseg – četverokut $ABDE$ ili trokut ADC ? Dokaži svoju tvrdnju!

Rješenje.

Da bi bili zadovoljeni uvjeti zadatka, mora biti $|AC| > |AB|$.

Opseg četverokuta $ABDE$ iznosi

$$|AB| + |BD| + |DE| + |EA|,$$

dok je opseg trokuta ADC jednak

$$|AD| + |DC| + |CA|.$$

Pokažimo da je

$$|AD| + |DC| + |CA| > |AB| + |BD| + |DE| + |EA|.$$

Iz uvjeta zadatka je

$$|CA| = |CE| + |EA| \quad \text{i}$$

$$|BD| = |DC|,$$

pa je razlika opsega trokuta ADC i opsega četverokuta $ABDE$ jednaka

$$\begin{aligned} (|AD| + |DC| + |CA|) - (|AB| + |BD| + |DE| + |EA|) &= \\ &= (|AD| + |DC| + |CE| + |EA|) - (|AB| + |DC| + |DE| + |EA|) \\ &= (|AD| + |CE|) - (|AB| + |DE|). \end{aligned}$$

Neka je F točka na dužini $\overline{AD}$ takva da je $|DF| = |DE|$.

Tada je $\triangle BDF \cong \triangle CED$ prema teoremu S-K-S jer je

$$|BD| = |DC|, |\angle ADB| = |\angle CDE|, |DF| = |DE|.$$

Prema tome je $|BF| = |CE|$.

Slijedi

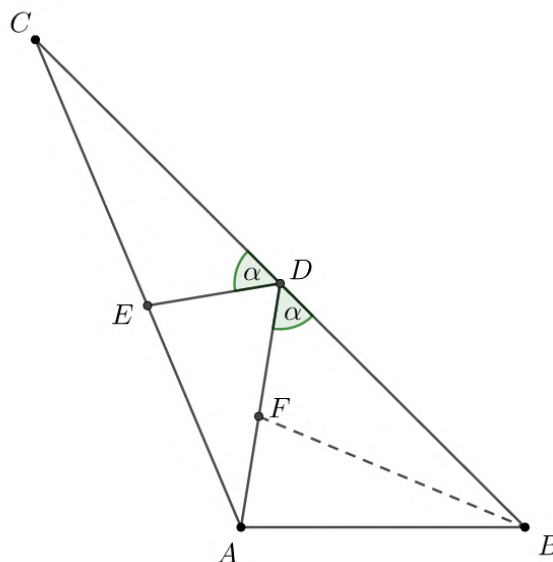
$$\begin{aligned} |AD| + |CE| &= |AD| + |BF| = |AF| + |FD| + |BF| \\ &= |AF| + |DE| + |BF|, \end{aligned}$$

pa je

$$(|AD| + |CE|) - (|AB| + |DE|) = |AF| + |BF| - |AB| > 0,$$

zbog nejednakosti trokuta u trokutu ABF .

Dakle, veći je opseg trokuta ADC .



5. U šeširu je 11 papirića s brojevima 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (po jedan sa svakim brojem). Svaki od jedanaest učenika uzima po jedan papirić. Nakon toga se abecednim redom javljaju i izgovaraju rečenicu "do sada je barem k učenika izreklo laž", pri čemu je k broj na izvučenom papiriću. Koliko najviše od tih 11 izjava može biti istinito?

Rješenje.

Ako je izjava nekog učenika koji je izvukao $k \geq 6$ istinita, onda je prije tog učenika barem 6 njih dalo lažnu izjavu pa je najviše $11 - 6 = 5$ učenika dalo istinitu izjavu.

Ako su sve izjave učenika koji su izvukli $k \geq 6$ lažne, najviše je 6 istinitih izjava.

Pokažimo da je moguće poredati brojeve na način da bude točno 6 istinitih izjava.

Neka su učenici abecednim redom izvukli sljedeće brojeve:

$$0, 10, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5.$$

Tada su istinitu izjavu dali prvi, treći, peti, sedmi, deveti i jedanaesti učenik, a ostali su lagali.

Dakle, najviše može biti 6 istinitih izjava.