

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

subota, 6. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Manji broj

Zbroj dvaju troznamenkastih brojeva, čijih je svih šest znamenaka međusobno različito, iznosi 1000. Koliko najviše može iznositi manji od tih dvaju brojeva?

Rezultat: 498

Rješenje.

Budući da je $1000 : 2 = 500$ manji broj je će biti manji od 500.

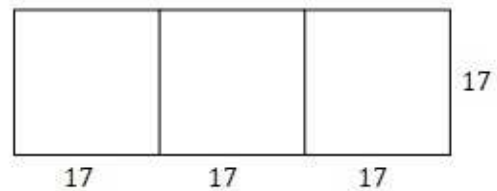
Krenimo od prvog broja manjeg od 500 sa svim znamenkama različitim. To je 498.

Vrijedi $498 + 502 = 1000$, a 502 i 498 imaju sve različite znamenke, pa je odgovor 498.

2. Zbroj opsega

Izračunaj zbroj opsega svih pravokutnika na slici.

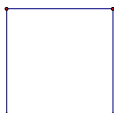
Pažnja: Kvadrat je također pravokutnik!



Rezultat: 544

Rješenje. Razlikujemo tri vrste pravokutnika. Imamo

tri mala



$$o = 4 \cdot 17 = 68$$

$$3 \cdot 68 = 204$$

dva srednja



$$o = 6 \cdot 17 = 102$$

$$2 \cdot 102 = 204$$

jedan veliki pravokutnik



$$o = 8 \cdot 17 = 136$$

$$1 \cdot 136 = 136$$

Zbroj opsega svih međusobno različitih pravokutnika na slici je $204 + 204 + 136 = 544$.

3. Troznamenkasti završetak

Zbroji sve neparne četveroznamenkaste brojeve kojima je zbroj znamenaka jednak 4. Koje su posljednje tri znamenke toga zbroja, počevši sa znamenkom stotica?

Rezultat: 449

Rješenje.

Prikažimo broj 4 kao zbroj četiriju brojeva:

$$4 + 0 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 + 0 = 2 + 2 + 0 + 0 = 2 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Od znamenaka 4,0,0,0 i 2,2,0,0 nije moguće sastaviti neparan broj.

Neparni četveroznamenkasti brojevi kojima je zbroj znamenaka jednak 4 su:

$$3001, 1003, 2101, 2011, 1201, 1021 \text{ i } 1111$$

Njihov je zbroj 11449, a posljednje tri znamenke toga zbroja su 449.

4. Magični kvadrat

U svako polje tablice na slici upisan je po jedan od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Zbrojevi triju brojeva u poljima svakog retka, odnosno stupca međusobno su jednaki. U središnjem polju tablice nalazi se broj 3. Označimo s A zbroj brojeva u poljima označenima kružićem, a s B zbroj brojeva u poljima označenima trokutićem. Koliko iznosi $A \cdot B$?

		
	3	
		

Rezultat: 432

Rješenje, prvi način.

S obzirom da je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

a tablica ima tri retka (i tri stupca), zbroj brojeva u svakom retku (i u svakom stupcu) mora biti

$$45 : 3 = 15.$$

Zbroj brojeva u drugom retku je 15, što znači da je zbroj brojeva u poljima sa zelenim kružićem u tom retku 12. Na isti način zaključujemo da je zbroj brojeva u poljima sa zelenim kružićem u drugom stupcu jednak 12. Zbroj brojeva upisanih u sva četiri polja označena kružićem jednak je

$$A = 12 + 12.$$

$$B = 45 - (24 + 3) = 45 - 27 = 18$$

$$A \cdot B = 24 \cdot 18 = 432$$

Rješenje, drugi način.

S obzirom da je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

a tablica ima tri retka (i tri stupca), zbroj brojeva u svakom retku (i u svakom stupcu) mora biti $45 : 3 = 15$.

Popunimo tablicu tako da zbrojevi brojeva u svim retcima i stupcima budu jednaki 15. Zbroj dvaju brojeva koji nedostaju u srednjem retku/stupcu mora biti $15 - 3 = 12$.

Vrijedi $12 = 5 + 7 = 3 + 9$, i to su jedini načini da dobijemo zbroj 12.

Neka su na primjer brojevi 5 i 7 u srednjem retku, a 3 i 9 u srednjem stupcu:

	8	
5	3	7
	4	

Dopunimo tablicu preostalim brojevima:

1	8	6
5	3	7
9	4	2

Računamo:

$$A = 8 + 5 + 7 + 4 = 24$$

$$B = 1 + 6 + 9 + 2 = 18$$

$$A \cdot B = 24 \cdot 18 = 432$$

5. Broj u sredini

Poredaj po veličini sve troznamenkaste brojeve manje od 550 čija je znamenka stotica jednaka umnošku ostalih dviju znamenaka. Među tako poredanim brojevima, koji se broj nalazi u sredini?

Rezultat: **331**

Rješenje.

Neka je znamenka stotica 1. Kako je $1 = 1 \cdot 1$, preostale znamenke su 1 i 1. Traženi broj je 111.

Neka je znamenka stotica 2. Kako je $2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$, preostale znamenke su 1 i 2.

Traženi brojevi su 212 i 221.

Neka je znamenka stotica 3. Kako je $3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1$, preostale znamenke su 1 i 3.

Traženi brojevi su 313 i 331.

Neka je znamenka stotica 4. Kako je $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$, preostale znamenke mogu biti 1 i 4 ili 2 i 2. Traženi brojevi su 414, 441 i 422.

Neka je znamenka stotica 5. Kako je $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1$, preostale znamenke su 1 i 5.

Traženi broj je 515.

Broj 551 nije rješenje jer tražimo brojeve manje od 550.

Brojevi sa zadanim svojstvom poredani po veličini od najmanjeg prema najvećem su:

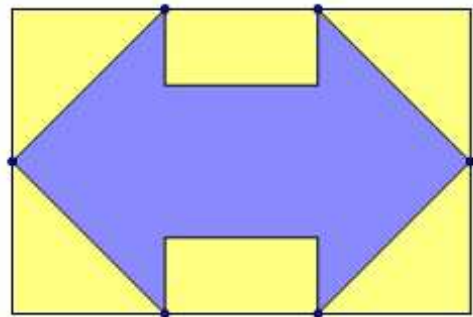
111, 212, 221, 313, 331, 414, 422, 441, 515.

Srednji broj u nizu je 331.

6. Površina

Na slici je prikazan pravokutnik sa stranicama duljina 48 mm i 32 mm. Dulje stranice pravokutnika podijeljene su istaknutim točkama na tri jednaka dijela, a kraće stranice na dva jednaka dijela.

Opseg svakog žutog pravokutnika jednak je duljini duže stranice pravokutnika. Odredi površinu lika obojenog plavom bojom, u kvadratnim milimetrima.



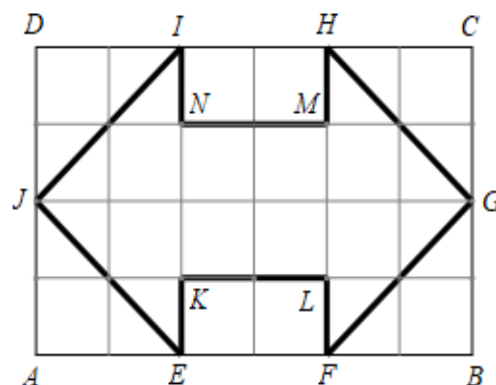
Rezultat: 768

Rješenje prvi način.

Dulja stranica pravokutnika podijeljena je na tri dužine duljina $48 : 3 = 16$ mm.

Kraća stranica pravokutnika podijeljena je na dvije dužine duljina $32 : 2 = 16$ mm.

Žuti pravokutnici imaju opsege 48 mm i imaju po dvije stranice duljina 16 mm.



Duljine preostalih stranica žutih pravokutnika su $(48 - 16 - 16) : 2 = 16 : 2 = 8$ mm.

Zadatak ćemo dalje riješiti tako da pravokutnik podijelimo kvadratnom mrežom na kvadrate stranica duljina 8 mm, kao na slici.

Površina svakog takvog kvadrata je $P_1 = 8 \cdot 8 = 64 \text{ mm}^2$, a površina trokuta koji je polovina takvog kvadrata je $P_2 = 64 : 2 = 32 \text{ mm}^2$.

Uočimo da se „plavi“ lik sastoji od 8 kvadrata površine 64 mm^2 i 8 polovina takvih kvadrata pa je njegova površina $P = 8 \cdot 64 + 8 \cdot 32 = 512 + 256 = 768 \text{ mm}^2$.

Rješenje, drugi način.

Kao u prvom načinu, izračunamo duljine stranica žutih pravokutnika i podijelimo početni pravokutnik na kvadratnu mrežu. Neka su P i R polovišta dužina $\overline{NK}$ i $\overline{ML}$, redom.

Žuti trokuti DJI, AEJ, BGF, CHG imaju istu površinu kao plavi trokuti EPJ, IJP, FGR, GHR.

Također, žuti pravokutnici HINM i EFLK imaju istu površinu kao plavi pravokutnici MNPR i KLRP.

Zato je površina plavog lika jednaka površini preostalog žutog dijela pravokutnika, tj. površina plavog lika iznosi polovinu površine početnog pravokutnika.

Odgovor je $P = 48 \cdot 32 : 2 = 768 \text{ mm}^2$.

Rješenje, treći način.

Dulja stranica pravokutnika podijeljena je na tri dužine duljina $48 : 3 = 16 \text{ mm}$. Kraća stranica pravokutnika podijeljena je na dvije dužine duljina $32 : 2 = 16 \text{ mm}$.

Žuti pravokutnici imaju opsege 48 mm i imaju po dvije stranice duljina 16 mm .

Duljine preostalih stranica žutih pravokutnika su $(48 - 16 - 16) : 2 = 16 : 2 = 8 \text{ mm}$.

Zadatak ćemo dalje riješiti tako da od površine velikog pravokutnika ABCD oduzmemo:

- površine dvaju žutih pravokutnika (jedna stranica im je duljine 8 mm , a druga 16 mm) i
- površine četiriju žutih trokuta (to su pravokutni trokuti istog oblika i iste površine, a po dva zajedno čine kvadrat sa stranicom duljine 16 mm)

Površina lika obojenog plavom bojom, u kvadratnim milimetrima iznosi

$$P = 48 \cdot 32 - (2 \cdot 8 \cdot 16 + 2 \cdot 16 \cdot 16) = 1536 - (256 + 512) = 1536 - 768 = 768$$

7. Niz brojeva

Brojevi su napisani bez razmaka, jedan iza drugoga

123456789101112131415161718192021222324252627...

Odredi znamenke na 2019., 2020. i 2021. mjestu i zapiši ih tim redom kao troznamenasti broj.

Rezultat: 971

Rješenje.

Jednoznamenastih brojeva ima 9, dvoznamenkastih brojeva ima 90, a troznamenkastih brojeva 900. Za njihovo ispisivanje treba redom 9, 180 i 2700 znamenki.

Broj koji sadrži 2020. znamenku je troznamenkast. Za pisanje svih jednoznamenastih i dvoznamenkastih brojeva ukupno treba $9 + 180 = 189$ znamenki, pa ostaje $2020 - 189 = 1831$ znamenka.

$1831 : 3 = 610$ i ostatak 1 pa se s tom 1831 znamenkom može napisati 610 troznamenkastih brojeva i preostaje još jedna znamenka.

Znači da se tražena 2020. znamenka nalazi na prvom mjestu u 611. troznamenkastom broju.

Taj je broj $9 + 90 + 611 = 710$ (a 2020. znamenka je 7).

2021. znamenka je 2. znamenka broja 710, a to je 1.

2019. znamenka je treća znamenka broja 709, a to je 9.

Znamenke su redom 9, 7 i 1, odnosno broj je 971.

8. Zlatnici

Ante, Branimir, Celestin i Dubravko sjede oko okruglog stola (tim redom). Zajedno imaju 1600 zlatnika. Najprije Ante polovinu svojih zlatnika podijeli na dva jednaka dijela i po jedan dio preda svojem lijevom i desnom susjedu, dok drugu polovinu zadržava za sebe. Nakon toga isto tako postupi Branimir, potom Celestin i na kraju Dubravko. Na kraju sva četvorica imaju jednak broj zlatnika. Koliko je zlatnika Branimir imao na početku?

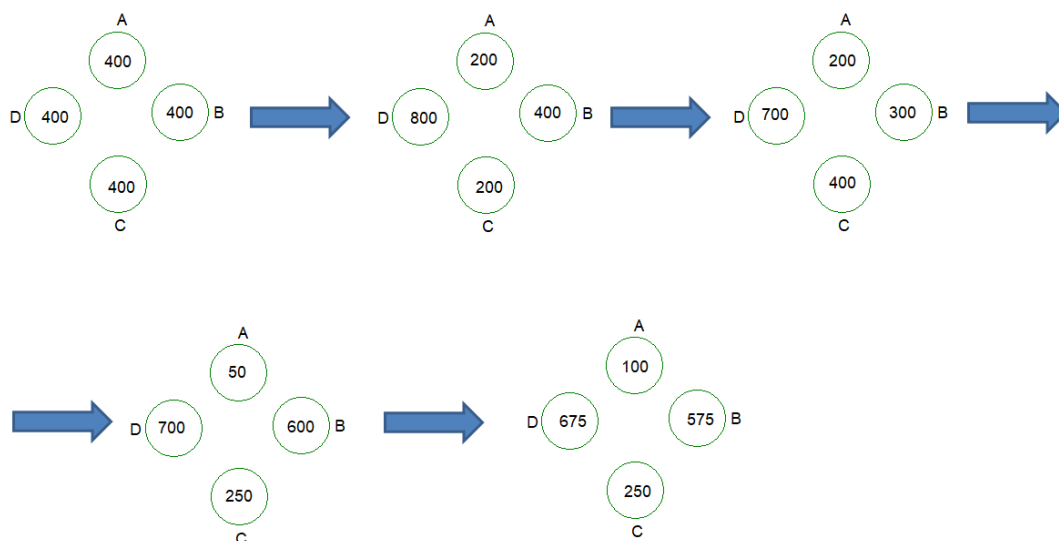
Rezultat: 575

Rješenje, prvi način.

Rješavanje unatrag:

	Ante	Branimir	Celestin	Dubravko
broj zlatnika na kraju	400	400	400	400
broj zlatnika nakon 3. koraka	200	400	200	800
broj zlatnika nakon 2. koraka	200	300	400	700
broj zlatnika nakon 1. koraka	50	600	250	700
broj zlatnika na početku	100	575	250	675

Rješenje, drugi način. Rješavamo unatrag:



Branimir je na početku imao 575 zlatnika.

9. Bazeni i cijevi

Hotel ima tri bazena A, B i C koji se mogu ventilima spojiti ili odvojiti. Za punjenje se koristi nekoliko jednakih cijevi. Kada su spojena sva tri bazena, njihovo punjenje vodom iz triju cijevi traje 18 minuta. Ako se spoje samo bazeni A i B, njihovo punjenje pomoću dviju cijevi traje 21 minutu, a ako se spoje samo bazeni B i C, punjenje pomoću dviju cijevi traje 14 minuta. Koliko sekundi traje punjenje bazena B pomoću jedne cijevi?

Rezultat: 960

Rješenje.

Jedna cijev bi napunila bazene A, B i C za $3 \cdot 18 = 54$ minute, bazene A i B za $2 \cdot 21 = 42$ minute, a bazene B i C za $2 \cdot 14 = 28$ minuta.

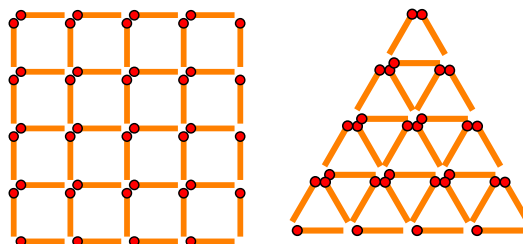
Zato bi jedna cijev napunila bazen C za $54 - 42 = 12$ minuta, a bazen A za $54 - 28 = 26$ minuta, odakle slijedi da bi bazen B napunila za $54 - 12 - 26 = 16$ minuta.

16 minuta = $16 \cdot 60$ sekundi = 960 sekundi

10. Šibice

Ivica je od šibica sastavio kvadrat stranice duljine 36. Marica je uzela sve te šibice i sastavila jednakostranični trokut stranice duljine 36. Koliko je šibica ostalo neiskorišteno?

Na slikama su prikazani kvadrat i jednakostranični trokut stranice duljine 4 sastavljeni od šibica.



Rezultat: 666

Rješenje, prvi način.

Prebrojimo koliko je šibica potrebno za kvadrat, a koliko za trokut stranice duljine 36.

Šibice koje tvore kvadrat su postavljene horizontalno ili vertikalno. Odredimo najprije koliko je horizontalno postavljenih šibica. U svakom redu je po 36 šibica, a redova ima 37. Zato je broj horizontalno postavljenih šibica $36 \cdot 37 = 1332$. Isto je toliko i vertikalno postavljenih šibica. Za kvadrat stranice duljine 36 je potrebno $2 \cdot 1332 = 2664$ šibica.

Šibice koje tvore trokut su postavljene u tri smjera. U svakom smjeru je broj šibica

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Zato je za trokut stranice duljine 36 utrošeno ukupno $3 \cdot 666 = 1998$ šibica.

Ostalo je neiskorišteno $2664 - 1998 = 666$ šibica.

Napomena: Šibice koje tvore trokut možemo podijeliti u grupice po tri koje tvore male trokute. Odredimo koliko ih je. Na dnu je 36 trokuta, u sljedećem redu ih je 35 i u svakom sljedećem po jedan manje, dok ne dođemo do vrha gdje je samo jedan trokut. Ukupan broj tako uočenih malih trokuta je

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

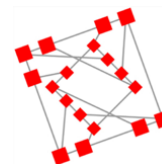
Rješenje, drugi način.

Od kvadrata stranice duljine 36 možemo ukloniti sve šibice koje čine male kvadrate u prvom redu i prvom stupcu. Tako ćemo dobiti kvadrat duljine 35.

Uklonili smo 4 puta po 36 šibica (36 na stranici kvadrata, te 36 između kvadrata). Od tih šibica možemo složiti 36 trokuta na dnu velikog trokuta i ostat će nam još 36 šibica viška.

Postupak možemo nastaviti sa kvadratom duljine 35 (složimo 35 trokuta u drugom redu velikog trokuta i preostane nam 35 šibica viška), pa kvadratom duljine 34 itd. Na kraju tog postupka imamo kvadrat duljine 1 od kojeg napravimo mali trokut na vrhu velikog trokuta i ostane nam jedna šibica viška. Ukupno nam je viška

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666 \text{ šibica.}$$



HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

subota, 6. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. Šesteroznamenasti broj

Svaka znamenka šesteroznamenkastog broja, počevši od znamenke tisućica, jednaka je zbroju prethodnih dviju znamenaka (koje se nalaze njoj slijeva). Koji je troznamenasti završetak najvećeg broja s tim svojstvom?

Rezultat: 369

Rješenje, prvi način.

Ako je početna znamenka 1, imamo sljedeće mogućnosti: 101123 i 112358.

Naime, ako bi druga znamenka slijeva bila 2, onda bi prvih pet znamenki slijeva bilo redom 1,2,3,5,8 i više ne možemo odabrati znamenku jedinica da uvjeti zadatka budu zadovoljeni. Pogotovo nije moguće da druga znamenka slijeva bude veća od 2.

Ako je početna znamenka 2 imamo mogućnost 202246.

Naime, ako bi druga znamenka slijeva bila 1, onda bi prvih pet znamenki slijeva bilo redom 2,1,3,4,7 i više ne možemo odabrati znamenku jedinica da uvjeti zadatka budu zadovoljeni. Pogotovo nije moguće da druga znamenka slijeva bude veća od 1.

Na sličan način zaključujemo da je jedina mogućnost da prva znamenka slijeva bude 3 te da druga slijeva bude 0; tako dobivamo broj 303369.

Također, na sličan način zaključujemo da početna znamenka ne može biti 4 ili veća od 4.

Vidimo da je najveći takav broj 303369, a zadnje tri znamenke su 369.

Rješenje, drugi način.

Neka je $\overline{abcdef}$ šesteroznamenasti broj za zadanim svojstvom.

Tada za znamenke c, d, e i f vrijedi: $c = a + b$, $d = b + c$, $e = c + d$, $f = d + e$.

Iz svih tih jednakosti slijedi $f = 5b + 3a$.

Iz uvjeta $3a + 5b \leq 9$, slijedi da je $b=1$ ili $b=0$. Pritom, a je veći (time je i šesteroznamenasti broj veći) ako je $b=0$. Tada znamenka a može biti 1, 2 ili 3. Najveći šesteroznamenasti broj dobivamo za $a = 3$. Ako je $a = 3$, ostale znamenke su: $c = 3$, $d = 3$, $e = 6$ i $f = 9$. Radi se o broju 303369, pa je traženi troznamenasti završetak 369.

2. U supermarketu

Jurica šee supermarketom i razgledava. Sviđa mu se jedna knjiga, a sviđa mu se i lopta. Knjiga je skuplja od lopte za 72 kune. Jurica primijeti da bi za cijenu 5 lopti mogao kupiti dvije takve knjige i još čokoladu. Lopla je tri puta skuplja od čokolade. Na kraju Jurica ipak odlučuje kupiti jednu knjigu, jednu loptu i jednu čokoladu. Koliko će ukupno platiti?

Rezultat: 198

Rješenje, prvi način.

Označimo cijenu čokolade jednim kvadratićem.

cijena jedne čokolade:



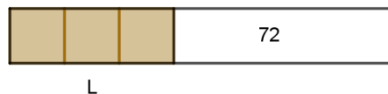
Kako je lopta tri puta skuplja od čokolade, cijenu lopte možemo prikazati ovako:

cijena jedne lopte:



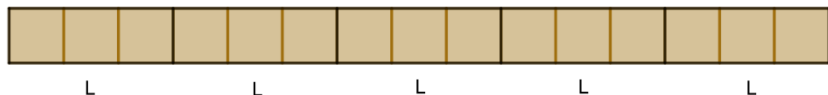
Knjiga je skuplja od lopte za 72 kune, što možemo prikazati ovako:

cijena jedne knjige:

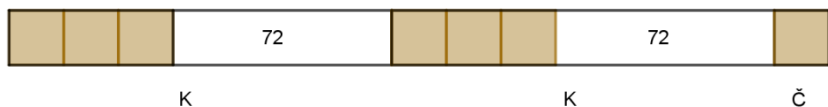


Nadalje, cijena 5 lopti jednaka je kao cijena dviju knjiga i čokolade.

cijena 5 lopti:



cijena dviju knjiga i
1 čokolade



Iz slike se može zaključiti da vrijednost 8 kvadratića, od kojih svaki prikazuje cijenu jedne čokolade, treba biti $2 \cdot 72 = 144$.

Prema tome, cijena jedne čokolade je $144 : 8$, a to je 18 kuna. Cijena jedne lopte je $3 \cdot 18$, a to je 54 kune. Cijena knjige je $54 + 72$, a to je 126 kuna.

Za sve troje Jurica je na blagajni platio $126 + 54 + 18 = 198$ kuna.

Rješenje, drugi način.

Označimo s K , L i $\check{C}$ redom cijene knjige, lopte i čokolade. Vrijedi:

$$K - L = 72$$

$$2K + \check{C} = 5L$$

$$3\check{C} = L$$

Iz druge i treće jednačbe slijedi:

$$2K + \check{C} = 15\check{C}$$

$$2K = 14\check{C}$$

$$K = 7\check{C}$$

Dakle, knjiga košta kao 7 čokolada. Kako je lopta tri puta skuplja od čokolade, slijedi da je razlika cijene knjige i cijene lopte ($K - L = 72$) jednaka cijeni 4 čokolade:

$$4\check{C} = 72$$

Iz toga slijedi

$$\check{C} = 18$$

Dakle, cijena čokolade je 18 kuna, cijena lopte je $3 \cdot 18 = 54$ kune, a cijena knjige je

$$7 \cdot 18 = 126 \text{ kuna.}$$

Za sve troje Jurica je na blagajni platio $126 + 54 + 18 = 198$ kuna.

3. Pravokutnici

Pravokutnik je dužinama, koje su usporedne s njegovim stranicama, podijeljen na četiri pravokutnika. Površine triju manjih od tih četiriju pravokutnika iznose 240 cm^2 , 320 cm^2 i 480 cm^2 . Koliko iznosi (u cm^2) površina najvećeg od četiriju nastalih pravokutnika?

Rezultat: 640

Rješenje, prvi način.

	c	d
a	320 cm^2	240 cm^2
b	?	480 cm^2

Uz oznake kao na slici vrijedi:

$$ac = 320 \quad ad = 240 \quad bd = 480 \quad bc = ?$$

Množenjem dobivamo $(ac)(bd) = 320 \cdot 480$,

odnosno

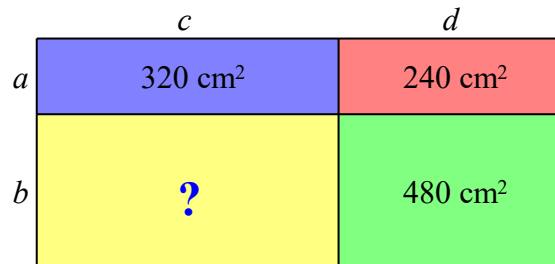
$$(ac)(bd) = 153600$$

Grupiranjem na drugačiji slijedi $(ad)(bc) = 153600$, a primjenom $ad = 240$ dobivamo

$$240(bc) = 153600.$$

Stoga je tražena površina $bc = 640$.

Rješenje, drugi način.



S obzirom da je površina zelenog pravokutnika dva puta veća od površine crvenog pravokutnika, te oba pravokutnika imaju jednu stranicu jednake duljine d , znači da je duljina druge stranice zelenog pravokutnika, b , dva puta veća od duljine druge stranice crvenog pravokutnika, a , odnosno $b = 2a$.

Kako plavi i žuti pravokutnik imaju jednu stranicu duljine c , a druga stranica žutog pravokutnika je dva puta dulja od druge stranice plavog pravokutnika, znači da je površina žutog pravokutnika dva puta veća od površine plavog pravokutnika.

Prema tome, površina žutog pravokutnika je $2 \cdot 320 \text{ cm}^2 = 640 \text{ cm}^2$.

Rješenje, treći način.

Nacrtajmo dužinu, usporednu s jednom stranicom velikog pravokutnika, koja dijeli donje pravokutnike na dva jednaka dijela.

320 cm ²	240 cm ²

Time je pravokutnik površine 480 cm^2 podijeljen na dva pravokutnika površina 240 cm^2 , pa se može uočiti da su dvije usporedne dužine unutar pravokutnika podijelile pravokutnik na tri jednaka dijela.

320 cm ²	240 cm ²
	240 cm ²
	240 cm ²

Prema tome, površina četvrtog pravokutnika je $2 \cdot 320 \text{ cm}^2 = 640 \text{ cm}^2$.

4. Magična tablica

U svako polje tablice na slici upisan je po jedan od brojeva 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 i 99. Zbrojevi triju brojeva u poljima svakog retka, odnosno stupca međusobno su jednaki. Ako je u središnje polje tablice upisan broj 33, koliki je zbroj brojeva upisanih u četiri obojena polja?

	33	

Rezultat: 198

Rješenje, prvi način

S obzirom da je $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99 = \dots = 495$, zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu mora biti $495/3 = 165$.

Promotrimo brojeve A, B, C i D (na slici):

	C	
A	33	B
	D	

S obzirom da treba biti $A + 33 + B = 165$ i $C + 33 + D = 165$, treba vrijediti $A + B = 132$ i $C + D = 132$. Kako je $A+B+C+D+33 = 132+132+33 = 297$, zaključujemo da je zbroj preostalih četiriju brojeva $495 - 297 = 198$.

Rješenje, drugi način

S obzirom da je $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99 = \dots = 495$, zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu mora biti $495/3 = 165$.

Promotrimo brojeve A, B, C i D (na slici):

	C	
A	33	B
	D	

Treba odrediti koji par brojeva može biti u drugom retku. Uzmimo da je $A < B$. Budući da je

$A + 33 + B = 165$, treba vrijediti $A + B = 132$. Najveća vrijednost koju može imati B je 99, pa A ne može biti ni 11 ni 22 jer bi u tom slučaju B trebao biti veći od 99. Broj 33 je u sredini, pa je najmanji mogući broj $A = 44$. U tom slučaju $B = 132 - 44 = 88$.

Nadalje, A može biti 55. U tom slučaju $B = 132 - 55 = 77$. Kad bi A bio 66, tada bi i B trebao biti 66, a to ne može jer svi brojevi u tablici trebaju biti različiti.

Prema tome, jedina dva para brojeva koji dolaze u obzir su 44 i 88, te 55 i 77. Kako isto vrijedi i za brojeve C i D, znači da će jedan od tih parova brojeva biti A i B, a drugi C i D. Preostali brojevi, a to su 11, 22, 66 i 99 bit će u 4 obojena polja. Njihov zbroj je 198.

5. Kuglice u kutiji

U kutiji se nalazi 25 žutih, 42 crvene, 50 plavih, 78 zelenih i 105 bijelih kuglica. Ako kuglice iz kutije izvlačimo bez gledanja, koliko najmanje kuglica treba izvući kako bismo bili sigurni da će među izvučenim kuglicama biti barem 50 kuglica iste boje?

Rezultat: 215

Rješenje.

Odgovor na pitanje u zadatku je za 1 veći od odgovora na sljedeće pitanje: Koliko najviše kuglica možemo izvući, a da među njima ne bude više od 49 kuglice iste boje? A taj je broj jednak

$$25+42+3 \cdot 49=214.$$

Odnosno, moguće je izvući 214 kuglica tako da među njima nema 49 kuglice jedne boje. To će se dogoditi ako izvučemo 25 žutih, 42 crvene, 49 plavih, 49 zelenih i 49 bijelih kuglica. S druge strane, ako izvučemo 215 kuglica, onda možemo biti sigurni da smo izvukli ili 50 plavih ili 50 zelenih ili 50 bijelih kuglica.

Dakle, odgovor na pitanje postavljeno u zadatku je:

Ako kuglice iz kutije izvlačimo bez gledanja, treba izvući najmanje 215 kuglica da bismo bili sigurni da će među njima biti barem 50 kuglica iste boje.

6. Različite znamenke

Odredi najmanji troznamenkasti broj s različitim znamenkama koji ima točno tri djelitelja.

Rezultat: 169

Rješenje.

Svaki prirodni broj, osim broja 1, ima barem dva prirodna djelitelja, pri čemu brojevi imaju točno dva prirodna djelitelja ako i samo ako su prosti. Ako u rastavu na proste faktore broj ima barem dva različita prosta djelitelja (recimo p i q), ukupni broj djelitelja je barem 4 (taj broj je djeljiv s $1, p, q$ i pq).

Dakle, da bi prost broj imao točno tri prirodna djelitelja, mora imati točno jedan prost broj u rastavu na proste faktore. Ako se taj broj u rastavu na proste faktore javlja tri ili više puta, broj prirodnih djelitelja je veći od 3. Zašto? Neka je p prost faktor koji se pojavljuje bar 3 puta u rastavu nekog broja na proste faktore. Tada je taj broj, osim s brojem 1 i samim sobom, djeljiv s p i $p \cdot p$, koji su oba različiti od 1 i tog broja, što znači da ima bar 4 djelitelja. Ako je pak broj oblika $p \cdot p$, pri čemu je p prost, onda ima točno tri prirodna djelitelja $1, p$ i $p \cdot p$.

Da bi broj $p \cdot p$ bio dvoznamenkast, p mora biti barem 10, ali mora biti i prost broj. Sada redom uvrštavamo: za $p = 11$, $p \cdot p = 121$, no taj broj nema različite znamenke. Za $p = 13$, $p \cdot p = 169$ i to je traženi broj.

7. Zlatnici

Ante, Branimir, Celestin i Dubravko sjede oko okruglog stola (tim redom). Zajedno imaju 1600 zlatnika. Najprije Ante polovinu svojih zlatnika podijeli na dva jednaka dijela i po jedan dio preda svom lijevom i desnom susjedu, dok drugu polovinu zadržava za sebe. Nakon toga isto tako postupi Branimir, potom Celestin i na kraju Dubravko. Na kraju sva četvorica imaju jednak broj zlatnika. Koliko je zlatnika Branimir imao na početku?

Rezultat: 575

Rješenje:

Rješavanje unatrag:

	Ante	Branimir	Celestin	Dubravko
broj zlatnika na kraju	400	400	400	400
broj zlatnika nakon 3. koraka	200	400	200	800
broj zlatnika nakon 2. koraka	200	300	400	700
broj zlatnika nakon 1. koraka	50	600	250	700
broj zlatnika na početku	100	575	250	675

Napomena: Zadatak se može riješiti i tako da se postavi sustav od 4 jednačbe s 4 nepoznanice, ali je takav pristup puno kompliciraniji.

8. Dijagonalni kvadrati

Dijagonalu velikog kvadrata stranice duljine 2020 cm Vlado je prekrrio nizom kvadrata stranice duljine 4 cm izrezanih od zelenog kolaž-papira. Dijagonale zelenih kvadrata pripadaju dijagonali velikog kvadrata, a presjek svakih dvaju uzastopnih zelenih kvadrata je kvadrat stranice duljine 1 cm. Izračunaj opseg lika koji tvore zeleni kvadrati. Rezultat izrazi u decimetrima.

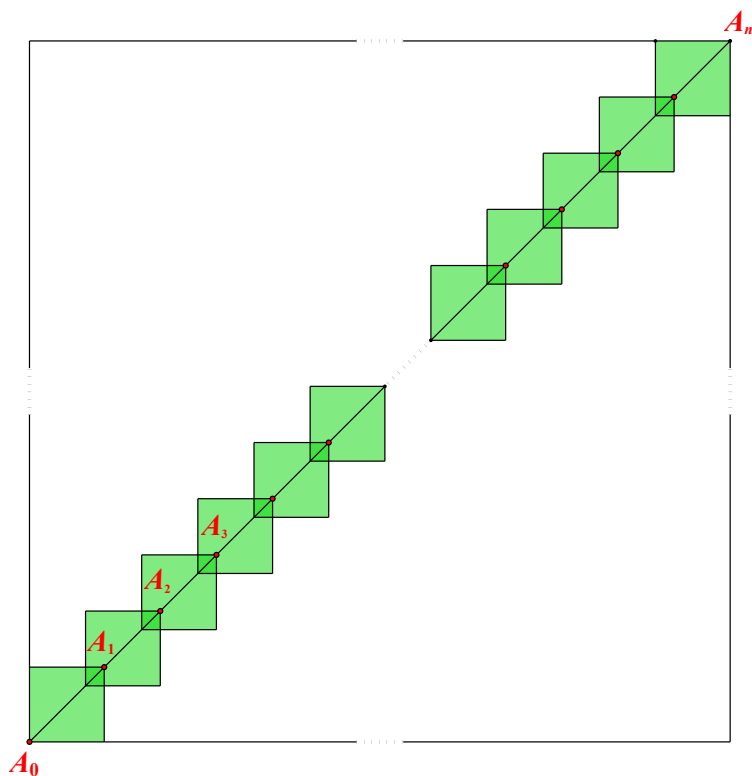
Rezultat: 808

Rješenje, prvi način.

Izračunajmo koliko je ukupno kvadrata duljine stranice 4 cm.

Krenimo s ucrtavanjem kvadrata počevši od donjeg lijevog vrha velikog kvadrata koji označimo s A_0 . Gornji desni vrh prvog ucrtanog kvadrata označimo s A_1 , gornji desni vrh drugog ucrtanog kvadrata označimo s A_2 itd.

Od vrha A_0 do vrha A_1 može se doći tako da se pomakne 4 cm desno i 4 cm gore. Da bi se došlo do vrha A_2 , treba ići još 3 cm desno i još 3 cm gore, do vrha A_3 još 3 cm desno i još 3 cm gore. Dakle, nakon prvog kvadrata, svakim sljedećim kvadratom dolazi se do točke koja je 3 cm desno i 3 cm gore u odnosu na posljednju točku na dijagonali velikog kvadrata.



S obzirom da se dodavanjem kvadrata pomiče prema gore jednako koliko i udesno, dovoljno je gledati pomake udesno. Od početne točke zbroj svih pomaka treba biti jednak duljini stranice velikog kvadrata, što iznosi 2020 cm. Kod prvog kvadrata pomak je 4 cm, a kod svakog sljedećeg po 3 cm.

Označimo s n ukupan broj kvadrata duljine stranice 4 cm u tom nizu. Tada je $4 \text{ cm} + (n - 1) \cdot 3 \text{ cm} = 2020 \text{ cm}$.

Odnosno imamo $3n + 1 = 2020$, odakle dobivamo da je $n = 673$.

Opseg dobivenog lika može se dobiti tako da se od zbroja opsega svih

kvadrata duljine stranice 4 cm, oduzme zbroj opsega malih kvadrata duljine stranice 1 cm koji su nastali preklapanjem susjednih kvadrata.

Traženi opseg je $673 \cdot 16 \text{ cm} - 672 \cdot 4 \text{ cm} = 8080 \text{ cm} = 808 \text{ dm}$.

Rješenje, drugi način

Kao u prvom načinu, odredimo da je ukupan broj kvadrata 673.

Prvi i posljednji kvadrat u nizu pridonose opsegu lika sa $4+4+3+3=14 \text{ cm}$, dok svi ostali pridonose sa $3+3+3+3=12 \text{ cm}$. Stoga je opseg zelenog lika

$$2 \cdot 14 \text{ cm} + 671 \cdot 4 \text{ cm} = 8080 \text{ cm} = 808 \text{ dm}.$$

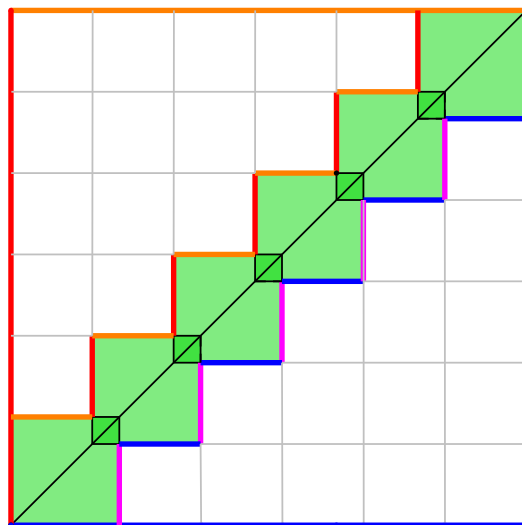
Rješenje, treći način.

Produljimo stranice zelenih kvadrata tako da na svakoj polovici velikog kvadrata dobijemo kvadratnu mrežu (na slici je prikazano kako to izgleda na manjem primjeru).

Sada lako uočavamo da je opseg tog lika jednak opsegu velikog kvadrata. Naime, zeleni lik je omeđen plavim, ružičastim, narančastim i crvenim dužinama. Ukupna duljina plavih dužina jednaka je duljini plave stranice velikog kvadrata, a slično vrijedi i za ružičaste, narančaste i crvene dužine.

Opseg lika jednak je opsegu kvadrata:

$$4 \cdot 2020 = 8080 \text{ cm} = 808 \text{ dm}.$$



9. U kinu

Nino, Miro, Bruno, Damjan, Ivana i Ana kupili su ulaznice za kino za prvih šest sjedala u trećem redu. Ivana i Ana žele sjediti jedna pored druge. Na koliko se načina njih šestero može rasporediti ako žele udovoljiti Ivani i Ani?

Rezultat: 240

Rješenje, prvi način.

Odgovorimo najprije na jednostavnije pitanje: na koliko bi načina moglo sjesti petero djece na pet sjedala? Na prvo sjedalo može sjesti bilo tko od petero djece, što je 5 načina, na drugo može sjesti bilo tko od preostalih četvero pa su to 4 načina itd.

Prema tome, bilo bi ukupno $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina.

Promotrimo sada naš zadatak: šestero je djece, ali s obzirom da Ivana i Ana žele sjediti jedna do druge, povežimo njih dvije, pa se možemo pitati na koliko načina je moguće smjestiti ovih 5 blokova:



Odgovor bi bio: na 120 načina. No, u svakom od dobivenih načina djevojke mogu zamijeniti mjesta pa se na taj način dobiva novih 120 načina, što je ukupno 240 načina

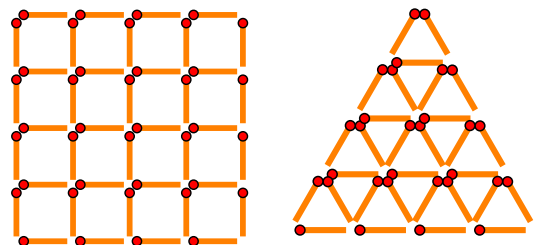
Rješenje, drugi način.

Ivana i Ana mogu sjesti na 1. i 2. sjedalo na dva različita načina. Kad su se one smjestile, ostalih četvero prijatelja mogu sjesti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Prema tome, ukupno je 48 načina u slučaju da su Ivana i Ana na prva dva mjesta. Ako Ivana i Ana sjednu na 2. i 3. mjesto, na sličan način dobiva se također 48 načina. Kako se Ivana i Ana mogu smjestiti na 1. i 2., 2. i 3., 3. i 4., 4. i 5. ili 5. i 6. mjesto, što je ukupno 5 slučajeva, dobiva se ukupno $5 \cdot 48 = 240$ načina sjedenja svih šestero prijatelja.

10. Šibice

Ivica je od šibica sastavio kvadrat stranice duljine 36. Marica je uzela sve te šibice i sastavila jednakostranični trokut stranice duljine 36. Koliko je šibica ostalo neiskorišteno?

Na slikama su prikazani kvadrat i jednakostranični trokut stranice duljine 4 sastavljeni od šibica.



Rezultat: 666

Rješenje, prvi način.

Prebrojimo koliko je šibica potrebno za kvadrat, a koliko za trokut stranice duljine 36.

Šibice koje tvore kvadrat su postavljene horizontalno ili vertikalno. Odredimo najprije koliko je horizontalno postavljenih šibica. U svakom redu je po 36 šibica, a redova ima 37. Zato je broj horizontalno postavljenih šibica $36 \cdot 37 = 1332$. Isto je toliko i vertikalno postavljenih šibica. Za kvadrat stranice duljine 36 je potrebno $2 \cdot 1332 = 2664$ šibica.

Šibice koje tvore trokut su postavljene u tri smjera. U svakom smjeru je broj šibica

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Zato je za trokut stranice duljine 36 utrošeno ukupno $3 \cdot 666 = 1998$ šibica.

Ostalo je neiskorišteno $2664 - 1998 = 666$ šibica.

Napomena: Šibice koje tvore trokut možemo podijeliti u grupice po tri koje tvore male trokute. Odredimo koliko ih je. Na dnu je 36 trokuta, u sljedećem redu ih je 35 i u svakom sljedećem po jedan manje, dok ne dođemo do vrha gdje je samo jedan trokut. Ukupan broj tako uočenih malih trokuta je

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

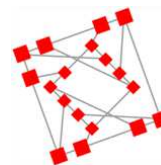
Rješenje, drugi način.

Od kvadrata stranice duljine 36 možemo ukloniti sve šibice koje čine male kvadrate u prvom redu i prvom stupcu. Tako ćemo dobiti kvadrat duljine 35.

Uklonili smo 4 puta po 36 šibica (36 na stranici kvadrata, te 36 između kvadrata). Od tih šibica možemo složiti 36 trokuta na dnu velikog trokuta i ostatak će nam još 36 šibica viška.

Postupak možemo nastaviti sa kvadratom duljine 35 (složimo 35 trokuta u drugom redu velikog trokuta i preostane nam 35 šibica viška), pa kvadratom duljine 34 itd. Na kraju tog postupka imamo kvadrat duljine 1 od kojeg napravimo mali trokut na vrhu velikog trokuta i oстане nam jedna šibica viška. Ukupno nam je viška

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666 \text{ šibica.}$$



HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

subota, 6. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Šesteroznamenasti broj

Svaka znamenka šesteroznamenastog broja, počevši od znamenke tisućica, jednaka je zbroju prethodnih dviju znamenaka (koje se nalaze njoj slijeva). Koji je troznamenasti završetak najvećeg broja s tim svojstvom

Rezultat: 369

Rješenje, prvi način.

Ako je početna znamenka 1, imamo sljedeće mogućnosti: 101123 i 112358.

Naime, ako bi druga znamenka slijeva bila 2, onda bi prvih pet znamenki slijeva bilo redom 1,2,3,5,8 i više ne možemo odabrati znamenku jedinica da uvjeti zadatka budu zadovoljeni. Pogotovo nije moguće da druga znamenka slijeva bude veća od 2.

Ako je početna znamenka 2 imamo mogućnost 202246.

Naime, ako bi druga znamenka slijeva bila 1, onda bi prvih pet znamenki slijeva bilo redom 2,1,3,4,7 i više ne možemo odabrati znamenku jedinica da uvjeti zadatka budu zadovoljeni. Pogotovo nije moguće da druga znamenka slijeva bude veća od 1.

Na sličan način zaključujemo da je jedina mogućnost da prva znamenka slijeva bude 3 te da druga slijeva bude 0; tako dobivamo broj 303369.

Također, na sličan način zaključujemo da početna znamenka ne može biti 4 ili veća od 4.

Vidimo da je najveći takav broj 303369, a zadnje tri znamenke su 369.

Rješenje, drugi način.

Neka je $\overline{abcdef}$ šesteroznamenasti broj za zadanim svojstvom.

Tada za znamenke c, d, e i f vrijedi: $c = a + b$, $d = b + c$, $e = c + d$, $f = d + e$.

Iz svih tih jednakosti slijedi $f = 5b + 3a$.

Iz uvjeta $3a + 5b \leq 9$, slijedi da je $b=1$ ili $b=0$. Pritom, a je veći (time je i šesteroznamenasti broj veći) ako je $b=0$. Tada znamenka a može biti 1, 2 ili 3. Najveći šesteroznamenasti broj dobivamo za $a = 3$. Ako je $a = 3$, ostale znamenke su: $c = 3$, $d = 3$, $e = 6$ i $f = 9$. Radi se o broju 303369, pa je traženi troznamenasti završetak 369.

2. Pravokutnici

Izračunaj zbroj svih mogućih različitih opsega koje mogu imati pravokutnici površine 144 kojima su duljine svih stranica prirodni brojevi.

Rezultat: 830

Rješenje.

U tablici su prikazane sve mogućnosti za dimenzije pravokutnika $a \times b$, te pripadni opseg.

a	1	2	3	4	6	8	9	12
b	144	72	48	36	24	18	16	12
Opseg	290	148	102	80	60	52	50	48

Zbroj opsega je 830.

3. Dezinfekcija

Obitelj Ekološki na ulazu u stan ima bocu s dezinfekcijskim sredstvom koje, naravno, rade sami. Majka je istočila $\frac{3}{5}$ ukupne količine i prelila u svoju bočicu. Potom je otac istočio $\frac{1}{6}$ ostatka u svoju bočicu. Nakon toga je sin ulio $\frac{6}{7}$ ostatka u svoju bočicu, ali je još 15 ml prolio. Poslije toga, u boci je ostalo samo 10 ml tekućine. Koliko je mililitara tekućine za dezinfekciju bilo u boci na početku?

Rezultat: 525

Rješenje, prvi način.

Kako je u boci ostalo 10 ml, a sin je 15 ml prolio znači da je u boci ostalo 25 ml nakon što je sin odlio svoj dio. Kako je sin odlio $\frac{6}{7}$ količine tekućine iz boce, koja je ostala nakon oćevog dijela, znači da 25 ml čini $\frac{1}{7}$ količine tekućine koja je ostala nakon oćevog dijela.

Zaključujemo: nakon istakanja oćevog dijela, u boci je ostalo $7 \cdot 25 = 175$ ml tekućine.

Otac je potrošio $\frac{1}{6}$ količine tekućine iz boce, koja je ostala nakon majćinog dijela, pa 175 ml čini $\frac{5}{6}$ količine tekućine iz boce koja je ostala nakon majćinog dijela.

Ako je $\frac{5}{6}$ količine 175 ml, onda je $\frac{1}{6}$ količine $175 : 5 = 35$ ml.

Zaključujemo: nakon istakanja majćinog dijela, u boci je ostalo $6 \cdot 35 = 210$ ml tekućine.

Majka je potrošila $\frac{3}{5}$ količine tekućine iz boce pa je u boci ostalo $\frac{2}{5}$ količine.

Konaćno, ako je $\frac{2}{5}$ količine tekućine iz boce 210 ml, onda je $\frac{1}{5}$ te količine $210 : 2 = 105$ ml, pa je u boci bilo ukupno $5 \cdot 105 = 525$ ml tekućine za dezinfekciju.

Rješenje, drugi način.

Označimo s x količinu tekućine u ml za dezinfekciju u boci na početku.

Nakon što je majka istočila svoj dio, preostalo je $\frac{2}{5}x$ tekućine. Kako je otac istočio $\frac{1}{6}$ ostatka, tj. $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{1}{15}x$ tekućine, ukupno je istočeno $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{15}\right)x = \frac{10}{15}x = \frac{2}{3}x$ tekućine, te je nakon toga je preostalo $\frac{1}{3}x$ tekućine.

Kako je sin istočio $\frac{6}{7}$ ostatka, tj. $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{2}{7}x$ tekućine, ukupno je istočeno $\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7}\right)x = \frac{20}{21}x$ tekućine. Preostalo je $\frac{1}{21}x$ tekućine. Kako je u boci ostalo 10 ml, a sin je 15 ml prolio znači da je u boci ostalo 25 ml nakon što je sin odlio svoj dio.

Zato iz $\frac{1}{21}x = 25$ ml, slijedi da je $x = 525$ ml.

4. Magična tablica

U svako polje tablice na slici upisan je po jedan od brojeva 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 i 99. Zbrojevi triju brojeva u poljima svakog retka, odnosno stupca međusobno su jednaki. Ako je u središnje polje tablice upisan broj 33, koliki je zbroj brojeva upisanih u četiri obojena polja?

	33	

Rezultat: 198

Rješenje, prvi način

S obzirom da je $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99 = \dots = 495$, zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu mora biti $495/3 = 165$.

Promotrimo brojeve A, B, C i D (na slici):

	C	
A	33	B
	D	

S obzirom da treba biti $A + 33 + B = 165$ i $C + 33 + D = 165$, treba vrijediti $A + B = 132$ i

$C + D = 132$. Kako je $A+B+C+D+33 = 132+132+33 = 297$, zaključujemo da je zbroj preostalih četiriju brojeva $495 - 297 = 198$.

Rješenje, drugi način

S obzirom da je $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99 = \dots = 495$, zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu mora biti $495/3 = 165$.

Promotrimo brojeve A, B, C i D (na slici):

	C	
A	33	B
	D	

Treba odrediti koji par brojeva može biti u drugom retku. Uzmimo da je $A < B$. Budući da je

$A + 33 + B = 165$, treba vrijediti $A + B = 132$. Najveća vrijednost koju može imati B je 99, pa A ne može biti ni 11 ni 22 jer bi u tom slučaju B trebao biti veći od 99. Broj 33 je u sredini, pa je najmanji mogući broj $A = 44$. U tom slučaju $B = 132 - 44 = 88$.

Nadalje, A može biti 55. U tom slučaju $B = 132 - 55 = 77$. Kad bi A bio 66, tada bi i B trebao biti 66, a to ne može jer svi brojevi u tablici trebaju biti različiti.

Prema tome, jedina dva para brojeva koji dolaze u obzir su 44 i 88, te 55 i 77. Kako isto vrijedi i za brojeve C i D, znači da će jedan od tih parova brojeva biti A i B, a drugi C i D. Preostali brojevi, a to su 11, 22, 66 i 99 bit će u 4 obojena polja. Njihov zbroj je 198.

5. Veće od 6

Koliko ima troznamenastih prirodnih brojeva kojima je barem jedna znamenka veća od 6?

Rezultat: 606

Rješenje, prvi način

Ukupno troznamenastih brojeva ima 900. Izračunajmo koliko ima onih za koje ne vrijedi da je barem jedna znamenka veća od 6, tj. onih za koje vrijedi da je svaka znamenka manja ili jednaka 6. Za takve brojeve znamenku stotica možemo birati na 6 načina (znamenka stotica može biti 1,2,3,4,5,6), a znamenku desetica i jedinica na 7 načina (znamenka desetica i jedinica može biti 0,1,2,3,4,5,6) pa takvih brojeva ima $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$.

Zato traženih brojeva ima $900 - 294 = 606$.

Rješenje, drugi način

1. slučaj - samo jedna od znamenaka iz skupa {7,8,9}

Ako je ta znamenka znamenka stotica, onda to znači da su i znamenka desetica i znamenka jedinica iz skupa {0,1,2,3,4,5,6}. Takvih brojeva ima $3 \cdot 7 \cdot 7 = 147$.

Ako je ta znamenka znamenka desetica, onda to znači da je znamenka stotica iz skupa {1,2,3,4,5,6}, a znamenka jedinica iz skupa {0,1,2,3,4,5,6}. Takvih brojeva ima $3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$.

Ako je ta znamenka znamenka jedinica, slično kao u prethodnom slučaju zaključujemo da takvih brojeva ima $3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$.

Ukupan ima $147 + 2 \cdot 126 = 399$ brojeva kojima je samo jedna od znamenaka iz skupa {7,8,9}.

2. slučaj - dvije znamenke iz skupa {7,8,9}

Ako su te dvije znamenke znamenke desetica i jedinica, onda to znači da je znamenka stotica iz skupa {1,2,3,4,5,6}. Takvih brojeva ima $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$.

Ako se među te dvije znamenke nalazi znamenka stotica, onda imamo još $2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 = 126$.

Ukupno, ako su dvije znamenke iz skupa {7,8,9}, takvih brojeva ima $54 + 126 = 180$.

3. slučaj - sve tri znamenke iz skupa {7,8,9}

U tom slučaju imamo $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ takvih brojeva.

Konačno, ukupni broj traženih brojeva je $399 + 180 + 27 = 606$.

6. Zlatnici

Ante, Branimir, Celestin i Dubravko sjede oko okruglog stola (tim redom). Zajedno imaju 1600 zlatnika. Najprije Ante polovinu svojih zlatnika podijeli na dva jednaka dijela i po jedan dio preda svom lijevom i desnom susjedu, dok drugu polovinu zadržava za sebe. Nakon toga isto tako postupi Branimir, potom Celestin i na kraju Dubravko. Na kraju sva četvorica imaju jednak broj zlatnika. Koliko je zlatnika Branimir imao na početku?

Rezultat: 575

Rješenje:

Rješavanje unatrag:

	Ante	Branimir	Celestin	Dubravko
broj zlatnika na kraju	400	400	400	400
broj zlatnika nakon 3. koraka	200	400	200	800
broj zlatnika nakon 2. koraka	200	300	400	700
broj zlatnika nakon 1. koraka	50	600	250	700
broj zlatnika na početku	100	575	250	675

Napomena: Zadatak se može riješiti i tako da se postavi sustav od 4 jednačbe s 4 nepoznanice, ali je takav pristup puno kompliciraniji.

7. Tupi kut

Zadan je tupokutni trokut $\triangle ABC$ kojemu su veličine svih kutova izražene u stupnjevima prirodni brojevi. Simetrala tupog kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D , a nožište visine iz vrha A je točka N . Točka D nalazi se između točaka N i B . Veličina kuta $\sphericalangle CBA$ deset je puta veća od veličine kuta $\sphericalangle DAN$ koja je, izražena u stupnjevima, također prirodni broj. Kolika je najveća moguća veličina tupog kuta tog trokuta izražena u stupnjevima?

Rezultat: 158

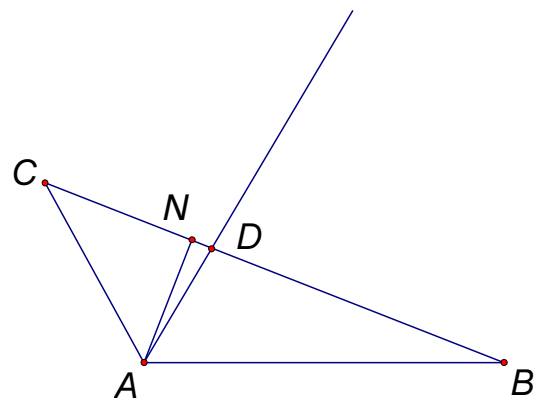
Rješenje:

Uvedimo oznake $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $x = |\sphericalangle DAN|$.

Tada je $|\sphericalangle ABC| = 10x$.

Kako je trokut $\triangle ABN$ pravokutan, imamo $\frac{\alpha}{2} + x + 10x = 90^\circ$, odnosno $\alpha + 22x = 180^\circ$.

Kako je najmanji mogući x jednak 1° , onda je najveći mogući α jednak 158° .



8. Zajednička mjera i višekratnik

Neka su a , b i c prirodni brojevi za koje vrijedi

$$D(a, b) = 4, \quad D(b, c) = 6 \quad \text{i} \quad V(a, b, c) = 36000.$$

Koliko najviše može iznositi $D(a, c)$?

$D(m, n)$ je oznaka za najveći zajednički djelitelj brojeva m i n , a $V(p, q, r)$ za najmanji zajednički višekratnik brojeva p , q i r .

Rezultat: 250

Rješenje:

Rastavom na proste faktore dobivamo da je $36000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$a = 2 \cdot 2 \cdot x$$

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y$$

$$c = 2 \cdot 3 \cdot z$$

Pri čemu x ne može biti djeljiv s 3, a z ne može biti djeljiv s 2. Slijedi da $D(x, z)$ dijeli $5 \cdot 5 \cdot 5$ pa $D(a, c)$ može najviše biti $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 250$.

9. Dijagonalni kvadrati

Dijagonalu velikog kvadrata stranice duljine 2020 cm Vlado je prekrpio nizom kvadrata stranice duljine 4 cm izrezanih od zelenog kolaž-papira. Dijagonale zelenih kvadrata pripadaju dijagonali velikog kvadrata, a presjek svakih dvaju uzastopnih zelenih kvadrata je kvadrat stranice duljine 1 cm. Izračunaj površinu lika koji tvore zeleni kvadrati. Rezultat izrazi u kvadratnim decimetrima i zaokruži na najbliži cijeli broj.

Rezultat: 101

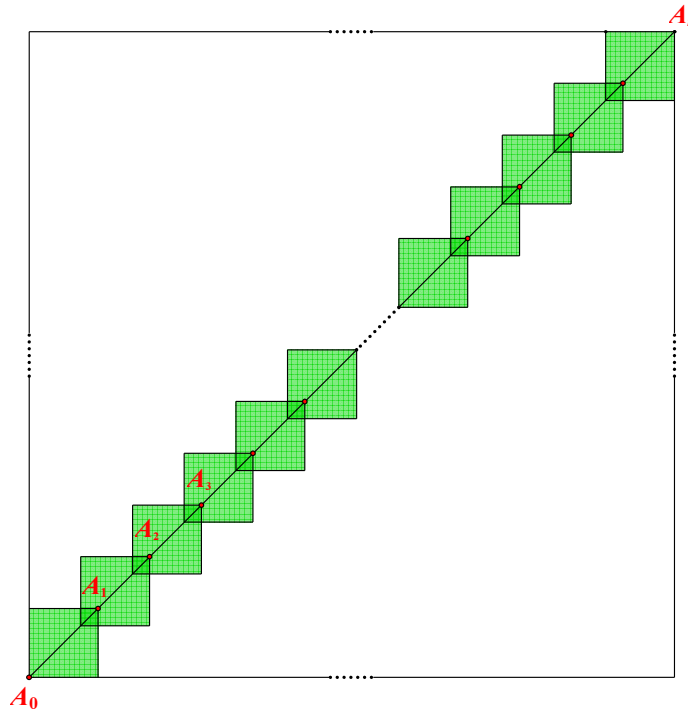
Rješenje, prvi način.

Izračunajmo koliko je ukupno kvadrata duljine stranice 4 cm.

Krenimo s ucrtavanjem kvadrata počevši od donjeg lijevog vrha velikog kvadrata koji označimo s A_0 . Gornji desni vrh prvog ucrtanog kvadrata označimo s A_1 , gornji desni vrh drugog ucrtanog kvadrata označimo s A_2 itd.

Od vrha A_0 do vrha A_1 može se doći tako da se pomakne 4 cm desno i 4 cm gore. Da bi se došlo do vrha A_2 , treba ići još 3 cm desno i još 3 cm gore, do vrha A_3 još 3 cm desno i još 3 cm gore. Dakle, nakon prvog kvadrata, svakim sljedećim kvadratom dolazi se do točke koja je 3 cm desno i 3 cm gore u odnosu na posljednju točku na dijagonali velikog kvadrata.

S obzirom da se dodavanjem kvadrata pomiče prema gore jednako koliko i udesno, dovoljno je gledati pomake udesno. Od početne točke zbroj svih pomaka treba biti jednak duljini stranice velikog kvadrata, što iznosi 2020 cm. Kod prvog kvadrata pomak je 4 cm, a kod svakog sljedećeg po 3 cm.



Označimo s n ukupan broj kvadrata duljine stranice 4 cm u tom nizu.

Tada je $4 \text{ cm} + (n - 1) \cdot 3 \text{ cm} = 2020 \text{ cm}$.

Odnosno imamo $3n + 1 = 2020$, odakle dobivamo da je $n = 673$.

Pri računanju površine promatramo da je prvi kvadrat cijeli, a svi ostali su kvadrati stranice 4 cm od kojih je izrezan kvadrat stranice 1 cm. Površina je $16 + 672 \cdot 15 = 10096 \text{ cm}^2 = 100,96 \text{ dm}^2$

Zaokruženo na najbliži cijeli broj dobivamo da je površina približno jednaka 101 dm^2 .

Rješenje, drugi način.

Od površine početnog kvadrata stranice 2020 cm oduzet ćemo dijelove koji nisu obojeni zeleno.

Imamo dva sukladna dijela, od kojih se svaki sastoji od pravokutnika visine 3 cm i duljina redom 3 cm, 6 cm, ..., 2016 cm.

Zbroj njihovih površina u cm^2 iznosi

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + \dots + 3 \cdot 2016) &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 672) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{672 \cdot 673}{2} \\ &= 2016 \cdot 2019 \end{aligned}$$

Stoga je konačni rezultat u cm^2 :

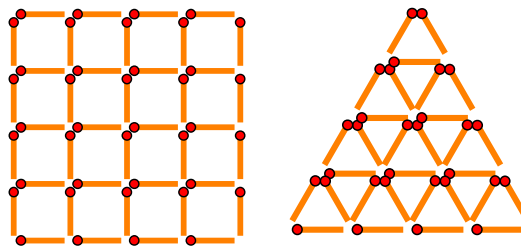
$$\begin{aligned} 2020 \cdot 2020 - 2016 \cdot 2019 &= 2020 \cdot 2020 - (2020 - 4) \cdot (2020 - 1) \\ &= 2020 \cdot 2020 - 2020 \cdot 2020 + 4 \cdot 2020 + 1 \cdot 2020 - 4 = 5 \cdot 2020 - 4 \\ &= 10096 \end{aligned}$$

Rezultat iznosi $100,96 \text{ dm}^2$. Zaokruženo na najbliži cijeli broj dobivamo da je površina približno jednaka 101 dm^2 .

10. Šibice

Ivica je od šibica sastavio kvadrat stranice duljine 36. Marica je uzela sve te šibice i sastavila jednakostranični trokut stranice duljine 36. Koliko je šibica ostalo neiskorišteno?

Na slikama su prikazani kvadrat i jednakostranični trokut stranice duljine 4 sastavljeni od šibica.



Rezultat: 666

Rješenje, prvi način.

Prebrojimo koliko je šibica potrebno za kvadrat, a koliko za trokut stranice duljine 36.

Šibice koje tvore kvadrat su postavljene horizontalno ili vertikalno. Odredimo najprije koliko je horizontalno postavljenih šibica. U svakom redu je po 36 šibica, a redova ima 37. Zato je broj horizontalno postavljenih šibica $36 \cdot 37 = 1332$. Isto je toliko i vertikalno postavljenih šibica. Za kvadrat stranice duljine 36 je potrebno $2 \cdot 1332 = 2664$ šibica.

Šibice koje tvore trokut su postavljene u tri smjera. U svakom smjeru je broj šibica

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Zato je za trokut stranice duljine 36 utrošeno ukupno $3 \cdot 666 = 1998$ šibica.

Ostalo je neiskorišteno $2664 - 1998 = 666$ šibica.

Napomena: Šibice koje tvore trokut možemo podijeliti u grupice po tri koje tvore male trokute. Odredimo koliko ih je. Na dnu je 36 trokuta, u sljedećem redu ih je 35 i u svakom sljedećem po jedan manje, dok ne dođemo do vrha gdje je samo jedan trokut. Ukupan broj tako uočenih malih trokuta je

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Rješenje, drugi način.

Od kvadrata stranice duljine 36 možemo ukloniti sve šibice koje čine male kvadrate u prvom redu i prvom stupcu. Tako ćemo dobiti kvadrat duljine 35.

Uklonili smo 4 puta po 36 šibica (36 na stranici kvadrata, te 36 između kvadrata). Od tih šibica možemo složiti 36 trokuta na dnu velikog trokuta i ostat će nam još 36 šibica viška.

Postupak možemo nastaviti sa kvadratom duljine 35 (složimo 35 trokuta u drugom redu velikog trokuta i preostane nam 35 šibica viška), pa kvadratom duljine 34 itd. Na kraju tog postupka imamo kvadrat duljine 1 od kojeg napravimo mali trokut na vrhu velikog trokuta i oстане nam jedna šibica viška. Ukupno nam je viška

$$36 + 35 + 34 + \dots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \dots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666 \text{ šibica.}$$