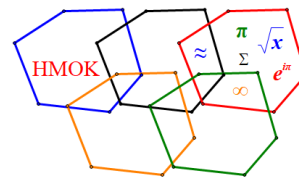


Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – utorak, 23. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. zadatak

Točno u 9 sati Petar je istovremeno zapalio dvije svijeće, duljina 29 cm i 34 cm. Poznato je da 2 mm kraće svijeće izgori za 4 minute, a 2 mm dulje svijeće za 3 minute. Nakon nekog vremena, Petar je primijetio da je jedna svijeća dulja od druge za 2 cm. U koliko sati se to moglo dogoditi?

Rješenje:

Prvi način

Kraća se svijeća za 4 minute smanji za 2 mm, pa se za 1 sat smanji $15 \cdot 2 = 30 \text{ mm} = 3 \text{ cm}$.

Dulja se svijeća za 3 minute smanji za 2 mm, pa se za 1 sat smanji $20 \cdot 2 = 40 \text{ mm} = 4 \text{ cm}$.

Dakle, svakim se satom razlika njihovih duljina smanjuje za 1 cm.

Kako je početna razlika u duljinama $34 - 29 = 5 \text{ cm}$, od paljenja tih svijeća proći će 3 sata da bi razlika bila 2 cm. Dakle, u 12:00.

No, dulja svijeća gori brže pa promotrimo situaciju kad će od nje ostati manji dio nego od kraće svijeće.

Kako je početna razlika u duljinama 5 cm, a svakim se satom razlika smanjuje za 1 cm, nakon 5 sati te će svijeće biti jednakih visina.

To znači da nakon još 2 sata, razlika njihovih duljina opet biti 2 cm.

Kako je $29 : 3 = 9$ i ostatak 2, a $34 : 4 = 8$ i ostatak 2, obje svijeće će gorjeti više od 8 sati.

To znači da će razlika opet biti 2 cm i to 7 sati od paljenja. Dakle, u 16:00.

Drugi način

Kraća se svijeća za 4 minute smanji za 2 mm, pa se za 1 sat smanji $15 \cdot 2 = 30 \text{ mm} = 3 \text{ cm}$.

Dulja se svijeća za 3 minute smanji za 2 mm, pa se za 1 sat smanji $20 \cdot 2 = 40 \text{ mm} = 4 \text{ cm}$.

U 9:00 duljine svijeća su 29 cm i 34 cm.

U 10:00 duljine svijeća su 26 cm i 30 cm.

U 11:00 duljine svijeća su 23 cm i 26 cm.

U 12:00 duljine svijeća su 20 cm i 22 cm, pa je razlika u njihovim duljinama 2 cm.

U 13:00 duljine svijeća su 17 cm i 18 cm.

U 14:00 duljine svijeća su 14 cm i 14 cm.

U 15:00 duljine svijeća su 11 cm i 10 cm.

U 16:00 duljine svijeća su 8 cm i 6 cm, pa je razlika u njihovim duljinama 2 cm.

Nakon toga razlika njihovih duljina se povećava, sve dok jedna svijeća ne izgori.

Treći način (skica)

gorenje kraće svijeće: 2 mm za 4 min
 1 cm za 20 min
 3 cm za 1 h

gorenje dulje svijeće: 2 mm za 3 min
 1 cm za 15 min
 4 cm za 1 h

proteklo vrijeme u satima	0	1	2	3	4	5	6	7
duljina kraće svijeće u cm	29	26	23	20	17	14	11	8
duljina dulje svijeće u cm	34	30	26	22	18	14	10	6

Razlika duljina svijeća od 2 cm biti će u 12:00 i 16:00 sati.

Četvrti način (skica)

Za 12 minuta, prva svijeća se smanji za 6 mm, a druga za 8 mm.

Neka je proteklo x puta po 12 minuta.

Tada je duljina prve svijeće u milimetrima $290 - 6x$, a druge svijeće $340 - 8x$.

Dvije svijeće će biti jednake ako vrijedi

$$(290 - 6x) + 20 = 340 - 8x \quad \text{ili} \quad 290 - 6x = (340 - 8x) + 20$$

Rješenje prve jednadžbe je $x = 15$, a druge jednadžbe $x = 35$.

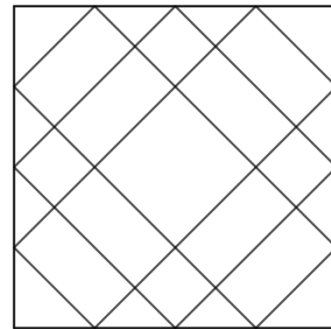
U prvom slučaju je proteklo $15 \cdot 12 = 180$ minuta, odnosno 3 sata.

U drugom slučaju je proteklo $35 \cdot 12 = 420$ minuta, odnosno 7 sati.

Razlika duljina svijeća od 2 cm biti će u 12:00 i 16:00 sati.

2. zadatak

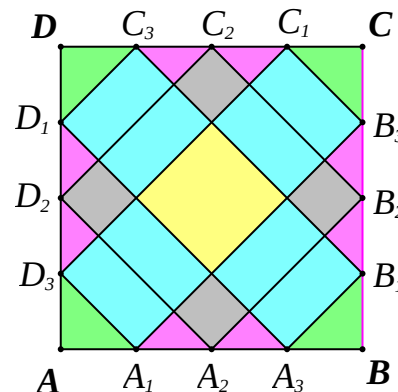
U kvadrat na slici ucrtana su tri pravokutnika s vrhovima na stranicama kvadrata. Koliko je različitih trokuta, a koliko različitih pravokutnika na slici?



Rješenje:

Dužine koje su nacrtane dijele početni kvadrat na manje trokute i pravokutnike koji se ne preklapaju, a koje ćemo zvati **osnovni trokuti i pravokutnici**. Svi ostali trokuti i pravokutnici se sastoje od osnovnih.

Kvadrat je podijeljen na 8 malih (ružičastih) i 4 veća (zeleni) osnovna trokuta te 4 mala (siva) osnovna kvadrata, 8 srednjih (plavih) osnovnih pravokutnika i 1 veći (žuti) osnovni kvadrat.



Trokuti:

- 8 ružičastih trokuta
- 4 zelena trokuta
- 4 trokuta koja se sastoje od 2 ružičasta trokuta i 1 sivog kvadrata
- 4 trokuta koje čine 1 zeleni trokut, 2 ružičasta trokuta i 1 plavi pravokutnik
- 4 trokuta koje čine 1 zeleni trokut, 4 ružičasta trokuta, 2 siva kvadrata i 2 plava pravokutnika

Ukupno ima 24 trokuta.

Pravokutnici (brojeni redom prema broju osnovnih pravokutnika od kojih se sastoje):

- 1 žuti kvadrat
- 4 siva kvadrata
- 8 plavih pravokutnika
- 4 kvadrata koja čine po dva plava pravokutnika
- 4 pravokutnika koja čine plavi pravokutnik i žuti kvadrat
- 8 pravokutnika koja čine plavi pravokutnik i sivi kvadrat
- 4 pravokutnika koja čine plavi pravokutnik i dva siva kvadrata
- 6 pravokutnika koja čine po dva plava pravokutnika i žuti kvadrat
- 4 pravokutnika koja čine po tri plava pravokutnika i žuti kvadrat
- 4 kvadrata koja čine žuti kvadrat, jedan sivi kvadrat i dva plava pravokutnika
- 2 pravokutnika koja čine po četiri plava pravokutnika i žuti kvadrat
- 4 pravokutnika koja čine žuti kvadrat, dva siva kvadrata i tri plava pravokutnika
- 1 kvadrat kojeg čine žuti kvadrat, četiri siva kvadrata i četiri plava pravokutnika
- 1 početni kvadrat

Ukupno ima 55 pravokutnika.

3. zadatak

Broj se naziva *zanimljivim* ako su mu sve znamenke međusobno različite, a njegova prva znamenka jednaka je zbroju svih ostalih znamenaka. Na primjer, zanimljivi su brojevi 321 i 80413. Koliko ima zanimljivih brojeva?

Rješenje:

Najprije primijetimo da broj može imati 3, 4 ili 5 znamenaka. Ne može više, jer je $0+1+2+3+4=10$.

Troznamenkasti brojevi:

$$3 = 1 + 2$$

$$4 = 1 + 3$$

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3$$

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4$$

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$$

$$8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$$

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

To je 16 mogućnosti, no poredak druge i treće znamenke može biti po volji, pa ima ukupno $16 \cdot 2 = 32$ troznamenkastih zanimljivih brojeva.

Kod četveroznamenkastih imamo svih 16 kombinacija kao kod troznamenkastih jer njima možemo dodati pribrojnik 0 (npr. $6 = 0 + 2 + 4$), te imamo još dodatnih 7 mogućnosti:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$7 = 1 + 2 + 4$$

$$8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$$

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$$

To je ukupno $16 + 7 = 23$ različitih zbrojeva. Svaki zbroj daje šest zanimljivih brojeva jer znamenke (osim prve) mogu zamijeniti mjesta. Zato je ukupan broj četveroznamenkastih zanimljivih brojeva $23 \cdot 6 = 138$.

Kod peteroznamenkastih nisu moguće kombinacije bez 0, jer je $1 + 2 + 3 + 4 > 9$.

Dakle, imamo istih 7 mogućnosti kao kod četveroznamenkastih brojeva bez nule, te u svakoj mogućnosti dodajemo 0 (npr. $8 = 0 + 1 + 3 + 4$).

Svaki zbroj daje 24 zanimljivih brojeva jer zadnje 4 znamenke možemo rasporediti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Dakle, peteroznamenkastih zanimljivih brojeva ima $7 \cdot 24 = 168$.

Ukupno ima $168 + 138 + 32 = 338$ zanimljivih brojeva.

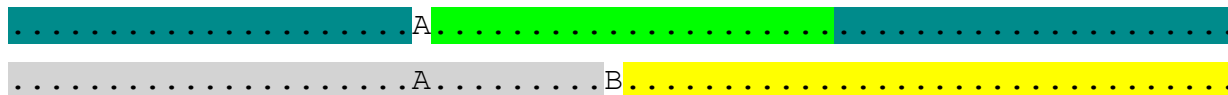
4. zadatak

Antun i Branko sudjelovali su u utrci. Svi su trkači završili utrku, a nikoja dva nisu završila utrku u isto vrijeme. Broj trkača koji su završili utrku prije Antuna dva je puta manji od broja trkača koji su završili nakon njega. Broj trkača koji su završili utrku prije Branka jednak je broju trkača koji su završili nakon njega. Točno 15 trkača završilo je utrku nakon Antuna, a prije Branka. Koliko je trkača sudjelovalo na utrci?

Rješenje:

Prvi način

Uočimo da je Branko završio utrku na sredini, a Antun ima više trkača nakon sebe, nego prije sebe, pa je Antun završio utrku ispred Branka. Označimo na crtežu Antunov (A) i Brankov (B) položaj.



Obojeni blokovi u svakom redu su jednaki.

Zato je na sljedećoj slici sivi blok za jedan manji od žutog bloka:



Prema uvjetu zadatka imamo:

$$\text{.....} = 15$$

$$\text{.....} = 15 + 1 = 16$$

$$\text{.....} = \text{.....} \cdot B \text{.....} = 15 + 1 + 16 = 32$$

Ukupno je sudjelovalo $3 \cdot 32 + 1 = 97$ trkača.

Drugi način

Neka je A broj trkača koji su završili utrku prije Antuna, a B broj trkača koji su završili nakon Branka.

Uočimo da je Branko završio utrku na sredini, a Antun ima više trkača nakon sebe, nego prije sebe, pa je Antun završio utrku ispred Branka. Broj trkača možemo grafički prikazati ovako:

$$A \text{ _ Antun _ } 15 \text{ _ Branko _ } B.$$

Tada vrijedi

$$2A = 16 + B \quad \text{i} \quad A + 16 = B.$$

Uvrštavanjem $B = A + 16$ u prvu jednadžbu dobivamo $2A = 16 + A + 16$, odnosno $A + A = 32 + A$.

Dobivamo $A = 32$ i slijedi $B = A + 16 = 48$.

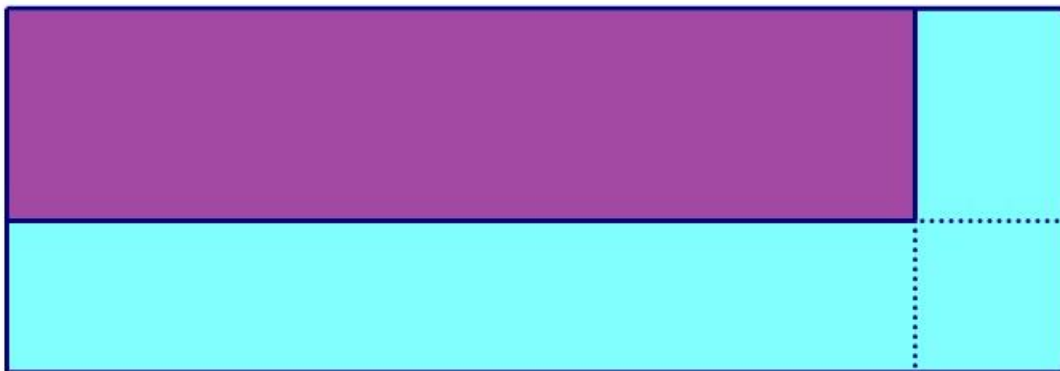
Ukupno je na utrci sudjelovalo $A + B + 17 = 97$ trkača.

5. zadatak

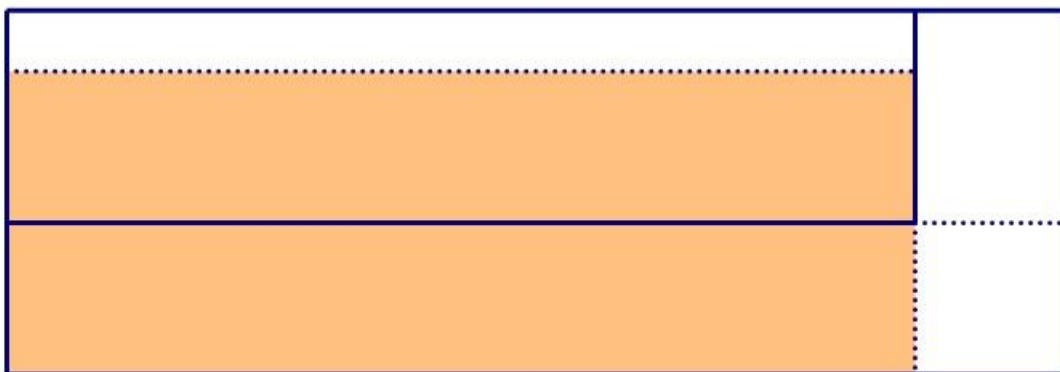
Lidija i Klara igraju se s hrpom jednakih štapića. Svaka od njih je od određenog broja štapića napravila rub pravokutnika. Svaka stranica Klarinog pravokutnika napravljena je s 5 štapića više od odgovarajuće stranice Lidijinog pravokutnika, a površina Klarinog pravokutnika dvostruko je veća od površine Lidijinog pravokutnika. Koliko je štapića, za rub svog pravokutnika, mogla upotrijebiti Lidija?

Rješenje:

Produljivanjem stranica za štapića dobivamo sljedeći pravokutnik:



Prema uvjetu zadatka površina novonastalog pravokutnika dva puta je veća od površine početnog, što zapravo znači da su površine plavog i ljubičastog dijela na slici jednake.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.



Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.



Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Preostali plavi dio površine sastoji se od dva kvadrata sa stranicom duljine 5 štapića. Uzmemo li za osnovnu mjernu jedinicu duljinu štapića, površina plavog dijela iznosi $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 50$.

Zato je umnožak duljina stranica preostalog pravokutnika ljubičaste boje (izraženih brojem štapića) jednak 50.

Mogućnosti su:

- I. širina 1 štapić i duljina 50 štapića
- II. širina 2 štapića i duljina 25 štapića
- III. širina 5 štapića i duljina 10 štapića.

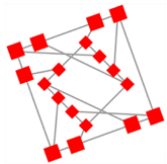
Duljine stranica početnog pravokutnika su za 5 štapića veće.

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

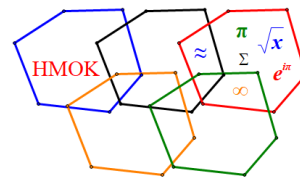
- I. širina 6 štapića i duljina 55 štapića
- II. širina 7 štapića i duljina 30 štapića
- III. širina 10 štapića i duljina 20 štapića.

Lidija je za rub svog pravokutnika mogla upotrijebiti

- I. $2 \cdot 6 + 2 \cdot 55 = 122$ štapića
- II. $2 \cdot 7 + 2 \cdot 30 = 74$ štapića
- III. $2 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 60$ štapića.



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – utorak, 23. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. zadatak

Ako troznamenkastom broju obrišemo jednu znamenku, dobivamo dvoznamenkasti broj šest puta manji od početnog troznamenkastog broja. Odredi sve brojeve s tim svojstvom.

Rješenje:

Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj.

1. slučaj. Ako obrišemo znamenku a dobije se dvoznamenkasti broj $\overline{bc}$.

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti: $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{bc}$

$$100a + 10b + c = 6 \cdot (10b + c)$$

$$100a + 10b + c = 60b + 6c$$

$$100a = 50b + 5c$$

$$20a = 10b + c$$

Zbog djeljivosti s 10 slijedi da je $c = 0$.

Prema tome je $20a = 10b$ odn. $2a = b$. Slijede mogućnosti:

$$a = 1, b = 2 \rightarrow \text{broj } 120$$

$$a = 2, b = 4 \rightarrow \text{broj } 240$$

$$a = 3, b = 6 \rightarrow \text{broj } 360$$

$$a = 4, b = 8 \rightarrow \text{broj } 480$$

2. slučaj. Ako obrišemo znamenku b dobije se dvoznamenkasti broj $\overline{ac}$.

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti: $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{ac}$

$$100a + 10b + c = 6 \cdot (10a + c)$$

$$100a + 10b + c = 60a + 6c$$

$$40a + 10b = 5c$$

$$8a + 2b = c$$

Kako je c znamenka, slijedi da je $a = 1, b = 0, c = 8 \rightarrow$ broj 108

3. slučaj. Ako obrišemo znamenku c dobije se dvoznamenkasti broj $\overline{ab}$.

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti: $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{ab}$

$$100a + 10b + c = 6 \cdot (10a + b)$$

$$100a + 10b + c = 60a + 6b$$

$$40a + 4b + c = 0$$

Jednakost vrijedi samo za $a = b = c = 0$ što ne daje troznamenkasti broj.

$\Rightarrow$ Traženi brojevi su 120, 240, 360, 480 i 108.

2. zadatak

Fran i Leon sudjelovali su u utrci. Svi su trkači završili utrku, a nikoja dva nisu završila utrku u isto vrijeme. Broj trkača koji su završili utrku prije Frana jednak je broju trkača koji su završili nakon njega. Broj trkača koji su završili utrku prije Leona dva je puta manji od broja trkača koji su završili nakon njega. Točno 15 trkača završilo je utrku između njih dvojice. Koliko je trkača sudjelovalo na utrci?

Rješenje:

Prvi način

Uočimo da je Fran završio utrku na sredini, a Leon ima više trkača nakon sebe, nego prije sebe, pa je Leon završio utrku ispred Frana. Označimo na crtežu Leonov (A) i Franov (B) položaj.



Obojeni blokovi u svakom redu su jednaki.

Zato je na sljedećoj slici sivi blok za jedan manji od žutog bloka:



Prema uvjetu zadatka imamo:

$$\text{grey block} = 15$$

$$\text{yellow block} = 15 + 1 = 16$$

$$\text{green block} = \text{grey block} + \text{yellow block} = 15 + 1 + 16 = 32$$

Ukupno je sudjelovalo $3 \cdot 32 + 1 = 97$ trkača.

Drugi način

Neka je A broj trkača koji su završili utrku prije Leona, a B broj trkača koji su završili nakon Frana. Uočimo da je Fran završio utrku na sredini, a Leon ima više trkača nakon sebe, nego prije sebe, pa je Leon završio utrku ispred Frana. Broj trkača možemo grafički prikazati ovako:

$$A _ \text{Leon} _ 15 _ \text{Fran} _ B.$$

Tada vrijedi

$$2A = 16 + B \quad \text{i} \quad A + 16 = B.$$

Uvrštavanjem $B = A + 16$ u prvu jednadžbu dobivamo $2A = 16 + A + 16$.

Dobivamo $A = 32$ i slijedi $B = A + 16 = 48$.

Ukupno je na utrci sudjelovalo $A + B + 17 = 97$ trkača.

3. zadatak

Na školskom igralištu nacrtan je veliki krug. Središte kruga je točka O , a na rubu su označene točke A , B i C . Pritom su kutovi $\angle AOB$ i $\angle BOC$ šiljasti, a dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OC}$ međusobno su okomite. Dio kruga omeđen dužinama $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ i kružnim lukom $\widehat{AB}$ obojen je zelenom bojom, a dio kruga omeđen dužinama $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ i kružnim lukom $\widehat{BC}$ obojen je narančastom bojom. Ivica je svojim stopama izmjerio da je opseg kruga 240 stopa te da je opseg zelenog lika za 18 stopa veći od opsega narančastog lika. Ako je površina čitavog kruga 72 m^2 , kolika je površina narančastog lika?



Napomena: Opseg geometrijskog lika je duljina njegovog ruba.

Rješenje:

Narančasti i zeleni kružni isječak zajedno čine četvrtinu kruga koju omeđuje dio kružnice (ili kružni luk) duljine $240 : 4 = 60$ stopa.

Zeleni isječak omeđen je dvama polumjerima i kružnim lukom $\widehat{AB}$, a narančasti isječak dvama polumjerima i kružnim lukom $\widehat{BC}$.

Opseg zelenog isječka je $2r + |\widehat{AB}|$, a opseg narančastog isječka $2r + |\widehat{BC}|$.

Opseg zelenog isječka je za 18 stopa veći pa vrijedi

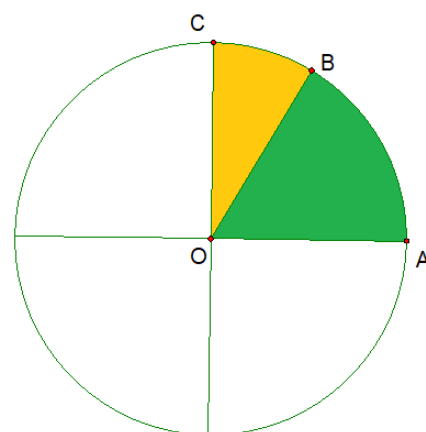
$$2r + |\widehat{BC}| + 18 = 2r + |\widehat{AB}|. \text{ Odatle slijedi da je } |\widehat{BC}| + 18 \text{ stopa} = |\widehat{AB}|.$$

Kako oba kružna luka zajedno čine četvrtinu kružnice,

$$\text{vrijedi } 2|\widehat{BC}| + 18 \text{ stopa} = 60 \text{ stopa, odnosno } |\widehat{BC}| = 21 \text{ stopa, } |\widehat{AB}| = 39 \text{ stopa.}$$

Površina kruga je 72 m^2 , pa je površina kružnog isječka kojem pripada kružni luk duljine 1 stope $72 : 240 = 0.3 \text{ m}^2$.

Površina narančastog kružnog isječka je $21 \cdot 0.3 = 6.3 \text{ m}^2$.



4. zadatak

Koliko ima peteroznamenastih brojeva djeljivih s tri kojima su sve znamenke različite?

Prvo rješenje:

Broj je djeljiv s tri ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.

Podijelimo znamenke ovako: $A = \{0,3,6,9\}$, $B = \{1,4,7\}$, $C = \{2,5,8\}$.

U prvoj grupi su znamenke djeljive s 3. Bilo koja znamenka iz druge grupe zbrojena sa bilo kojom znamenkom iz treće grupe daje broj djeljiv s tri. Za broj koji je djeljiv s 3 imamo tri mogućnosti za odabir njegovih znamenaka:

a) po dvije znamenke iz skupova B i C, jedna iz A,

b) po jedna znamenka iz B i C, tri iz A,

c) sva tri broja iz B odnosno C i dva broja iz A.

Još treba razlikovati koristimo li znamenku 0 ili ne.

Ako se ne koristi 0, onda imamo pod a) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ mogućnosti, pod b) $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$, pod c) $3 \cdot 2 = 6$. Ukupno 42.

Ako se koristimo 0, pod a) imamo $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ mogućnosti, pod b) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, a pod c) $3 \cdot 2 = 6$. Ukupno 42.

Ako se ne koristi znamenka 0, možemo permutirati znamenke na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ načina.

Ako se pojavljuje znamenka 0, onda imamo samo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 - 24 = 96$ mogućnosti.

Traženo rješenje je $42 \cdot 120 + 42 \cdot 96 = 9072$.

Drugo rješenje:

Broj je djeljiv s tri ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3. Odredimo najprije koliki taj zbroj može biti. Najmanji mogući zbroj različitih znamenaka peteroznamenkastog broja je $1 + 0 + 2 + 3 + 4 = 10$, a najveći je $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$.

Kako tražimo peteroznamenaste brojeve djeljive brojem 3, zbroj njihovih znamenaka mora biti djeljiv s 3. Mogući zbrojevi znamenaka su: 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 i 33.

Zbroj znamenaka	Znamenke bez 0	Broj takvih brojeva	Znamenke s 0	Broj takvih brojeva
12			1, 0, 2, 3, 6	$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$
			1, 0, 2, 4, 5	96
15	1, 2, 3, 4, 5	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$	1, 0, 2, 3, 9	96
			1, 0, 2, 4, 8	96
			1, 0, 2, 5, 7	96
			1, 0, 3, 4, 7	96
			1, 0, 3, 5, 6	96

			2, 0, 3, 4, 6	96
18	1, 2, 3, 4, 8	120	1, 0, 2, 6, 9	96
	1, 2, 3, 5, 7	120	1, 0, 2, 7, 8	96
	1, 2, 4, 5, 6	120	1, 0, 3, 5, 9	96
			1, 0, 3, 6, 8	96
			1, 0, 4, 5, 8	96
			1, 0, 4, 6, 7	96
			2, 0, 3, 4, 9	96
			2, 0, 3, 5, 8	96
			2, 0, 3, 6, 7	96
			2, 0, 4, 5, 7	96
			3, 0, 4, 5, 6	96
21	1, 2, 3, 6, 9	120	1, 0, 3, 8, 9	96
	1, 2, 3, 7, 8	120	1, 0, 4, 7, 9	96
	1, 2, 4, 5, 9	120	1, 0, 5, 7, 8,	96
	1, 2, 4, 6, 8	120	1, 0, 5, 6, 9	96
	1, 2, 5, 6, 7	120	2, 0, 3, 7, 9	96
	1, 3, 4, 5, 8	120	2, 0, 4, 6, 9	96
	1, 3, 4, 6, 7	120	2, 0, 4, 7, 8	96
	2, 3, 4, 5, 7	120	2, 0, 5, 6, 8	96
			3, 0, 4, 5, 9	96
			3, 0, 4, 6, 8	96
			3, 0, 5, 6, 7	96
24	1, 2, 4, 8, 9	120	1, 0, 6, 8, 9	96
	1, 2, 5, 7, 9	120	2, 0, 5, 8, 9	96
	1, 2, 6, 7, 8	120	2, 0, 6, 7, 9	96
	1, 3, 4, 7, 9	120	3, 0, 4, 8, 9	96
	1, 3, 5, 6, 9	120	3, 0, 5, 7, 9	96
	1, 3, 5, 7, 8	120	3, 0, 6, 7, 8	96
	1, 4, 5, 6, 8	120	4, 0, 5, 6, 9	96
	2, 3, 4, 6, 9	120	4, 0, 5, 7, 8	96
	2, 3, 4, 7, 8	120		
	2, 3, 5, 6, 8	120		
	2, 4, 5, 6, 7	120		
27	1, 2, 7, 8, 9	120	3, 0, 7, 8, 9	96
	1, 3, 6, 8, 9	120	4, 0, 6, 8, 9	96
	1, 4, 5, 8, 9	120	5, 0, 6, 7, 9	96
	1, 4, 6, 7, 9	120		
	1, 5, 6, 7, 8	120		
	2, 3, 5, 8, 9	120		
	2, 3, 6, 7, 9	120		
	2, 4, 5, 7, 9	120		
	2, 4, 6, 7, 8	120		
	3, 4, 5, 6, 9	120		
	3, 4, 5, 7, 8	120		
30	1, 5, 7, 8, 9	120	6, 0, 7, 8, 9	96
	2, 4, 7, 8, 9	120		
	2, 5, 6, 8, 9	120		
	3, 4, 6, 8, 9	120		
	3, 5, 6, 7, 9	120		
	4, 5, 6, 7, 8	120		
33	3, 6, 7, 8, 9	120		
	4, 5, 7, 8, 9	120		

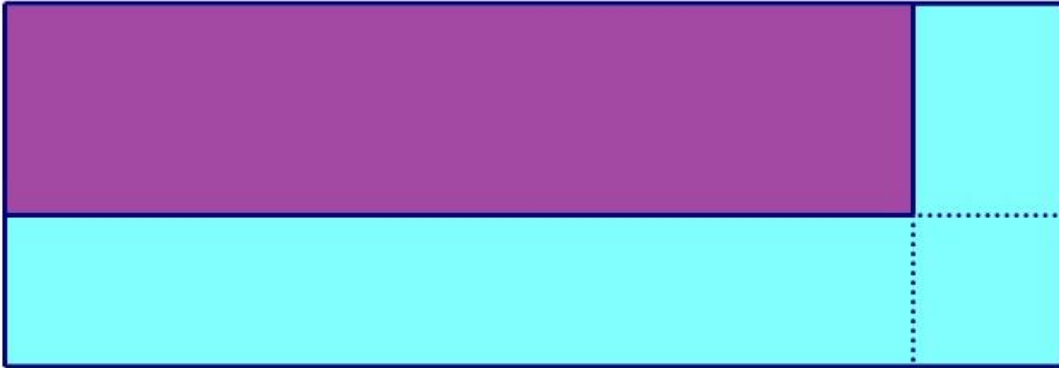
Ukupno ih ima $42 \cdot 120 + 42 \cdot 96 = 42 \cdot 216 = 9072$.

5. zadatak

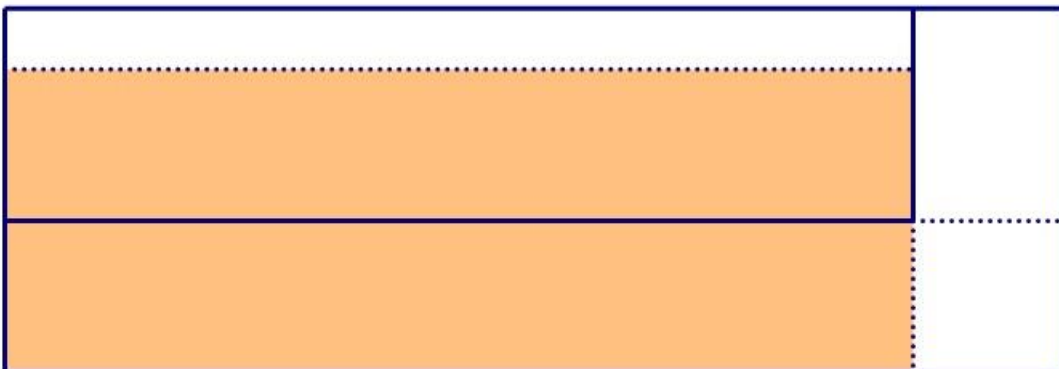
Duljine svih stranica pravokutnika, izražene u centimetrima, prirodni su brojevi. Povećamo li širinu i visinu tog pravokutnika za 10 cm, njegova će se površina udvostručiti. Odredi dimenzije svih takvih pravokutnika.

Rješenje:

Produljivanjem stranica za 10 cm dobivamo sljedeći pravokutnik:



Prema uvjetu zadatka površina novonastalog pravokutnika dva puta je veća od površine početnog, što zapravo znači da su površine plavog i ljubičastog dijela na slici jednake.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.



Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.



Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Preostali plavi dio površine sastoji se od dva kvadrata sa stranicom duljine 10 cm, ukupne površine $100 \text{ cm}^2 + 100 \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2$. Znači, preostali pravokutnik ljubičaste boje ima površinu 200 cm^2 .

Moguće duljine stranica tog pravokutnika su:

- I. 1 cm i 200 cm
- II. 2 cm i 100 cm
- III. 4 cm i 50 cm
- IV. 5 cm i 40 cm
- V. 8 cm i 25 cm
- VI. 10 cm i 20 cm.

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

- I. 11 cm i 210 cm
- II. 12 cm i 110 cm
- III. 14 cm i 60 cm
- IV. 15 cm i 50 cm
- V. 18 cm i 35 cm
- VI. 20 cm i 30 cm.

Drugo rješenje.

$$(a + 10) \cdot (b + 10) = 2 \cdot a \cdot b$$

$$ab + 10a + 10b + 100 = 2ab$$

$$ab - 10a = 10b + 100$$

$$a(b - 10) = 10b + 100$$

$$a = \frac{10b + 100}{b - 10} = \frac{10b - 100 + 200}{b - 10} = 10 + \frac{200}{b - 10}$$

Dakle, $b - 10$ mora biti djelitelj broja $200 = 2^3 \cdot 5^2$. Za svaki takav b izračunamo odgovarajući a i dobivamo 3 rješenja:

$b - 10$	1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200
b	11	12	14	15	18	20	30	35	50	60	110	210
a	210	110	60	50	35	30	20	18	15	14	12	11

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

- I. 11 cm i 210 cm
- II. 12 cm i 110 cm
- III. 14 cm i 60 cm
- IV. 15 cm i 50 cm
- V. 18 cm i 35 cm
- VI. 20 cm i 30 cm.

Treće rješenje.

$$(a + 10) \cdot (b + 10) = 2 \cdot a \cdot b$$

$$ab + 10a + 10b + 100 = 2ab$$

$$ab - 10a - 10b = 100$$

$$a(b - 10) - 10b + 100 - 100 = 100$$

$$a(b - 10) - 10(b - 10) = 200$$

$$(a - 10)(b - 10) = 200$$

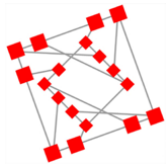
Zaključujemo da $b - 10$ mora biti djelitelj broja $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

Sve mogućnosti su dane tablicom:

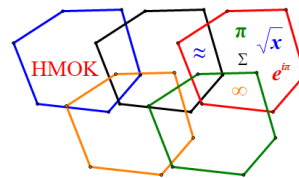
$a - 10$	1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200
$b - 10$	200	100	50	40	10	8	10	8	5	4	2	1
a	11	12	14	15	18	20	30	35	50	60	110	210
b	210	110	60	50	35	30	20	18	15	14	12	11

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

- I. 11 cm i 210 cm
- II. 12 cm i 110 cm
- III. 14 cm i 60 cm
- IV. 15 cm i 50 cm
- V. 18 cm i 35 cm
- VI. 20 cm i 30 cm



Hrvatsko matematičko društvo



Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – utorak, 23. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. zadatak

Nađi najmanji višeznamenkasti broj koji započinje znamenkom 1 sa svojstvom da, premjestimo li tu znamenku 1 s početka na kraj, iza znamenke jedinica, dobivamo broj tri puta veći od početnog.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da postoji takav dvoznamenkasti broj; tj. pretpostavimo da broj $10 + x$ (pri čemu je x jednoznamenkasti broj ili 0) koji zadovoljava uvjete zadatka. Tada je $10x + 1 = 3 \cdot (10 + x)$, što vodi na jednadžbu $7x = 29$ koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Pretpostavimo li da postoji takav troznamenkasti broj $100 + x$, dobivamo uvjet $10x + 1 = 3 \cdot (100 + x)$ i jednadžbu $7x = 299$ koja također nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Za četveroznamenasti broj dobivamo uvjet $10x + 1 = 3 \cdot (1000 + x)$, i jednadžbu $7x = 2999$ koja također nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Za peteroznamenasti broj dobivamo uvjet $10x + 1 = 3 \cdot (10000 + x)$, i jednadžbu $7x = 29999$ koja također nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Za šestoroznamenasti broj, iz uvjeta $10x + 1 = 3 \cdot (100000 + x)$, dobivamo jednadžbu $7x = 299999$, čije je rješenje $x = 42857$.

Broj 142857 je najmanji broj koji zadovoljava uvjete zadatka.

Napomena:

"Zadatak se može riješiti i određivanjem jedne po jedne znamenke u umnošku

$$1 \dots 7 \cdot 3 = \dots 71."$$

2. zadatak

Na jednom natjecanju iz matematike sudjeluje 12 Varaždinaca, 8 Zadrana i 2 Osječana. Trebaju sastaviti peteročlanu ekipu u kojoj će biti barem po jedan učenik iz svakog od tih triju gradova, ali ne smiju biti tri učenika iz istog grada. Na koliko različitih načina oni mogu sastaviti ekipu?

Rješenje.

Ekipa se može sastojati od

- jednog učenika iz Varaždina, dvoje iz Zadra i dvoje iz Osijeka (VZZOO)

- dva učenika iz Varaždina, jednog iz Zadra i dva iz Osijeka (VVZOO)
- po dva učenika iz Varaždina i Zadra i jedan iz Osijeka (VVZZO).

U prva dva slučaja, oba Osječana su u ekipi.

U prvom slučaju, jednog Varaždinca biramo na 12 načina, a dvoje Zadrana možemo odabrati na $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ načina. Ukupan broj ekipa tipa "VZZOO" je $12 \cdot 28 = 336$.

U drugom slučaju, par Varaždinaca biramo na $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ načina, a jednog Zadrana na 8 načina. Ukupan broj ekipa tipa "VVZOO" je $66 \cdot 8 = 528$.

Konačno, u trećem slučaju dva Varaždinca biramo na 66 načina, dva Zadrana na 28 načina, a jednog Osječanina na 2 načina, pa je ekipa tipa "VVZZO" ukupno $66 \cdot 28 \cdot 2 = 3696$.

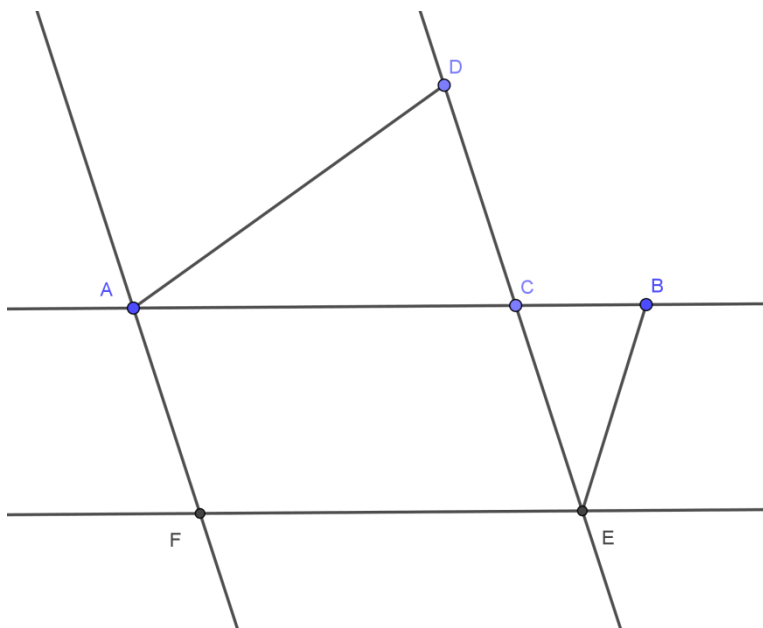
Ekipu je moguće odabrati na $336 + 528 + 3696 = 4560$ načina.

3. zadatak

Pravac p siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki C . Točka D nalazi se na pravcu p , različita je od C i vrijedi $|AC| = |AD|$. Točka E nalazi se na pravcu p i vrijedi $|EC| = |EB|$. Pravac paralelan s pravcem p koji prolazi točkom A i pravac paralelan s pravcem AB koji prolazi točkom E sijeku se u točki F . Dokaži da vrijedi $|FB| = |FD|$.

Rješenje.

Prema uvjetima zadatka, trokuti ACD i EBC su jednakokračni ($|AC| = |AD|$, $|EC| = |EB|$). Njihovi kutovi uz osnovicu su jednaki, jer su kutovi $|\angle DCA| = |\angle ECB|$ vršni. Stoga su i kutovi nasuprot osnovice jednaki, $|\angle CAD| = |\angle BEC|$.



Uočimo da je zbog $AB \parallel r$ i $p \parallel q$ četverokut $ACEF$ paralelogram, pa je $|AC| = |FE|$, $|CE| = |AF|$.

Promotrimo trokute FAD i BEF . Vrijedi $|AF| = |CE| = |BE|$, $|AD| = |AC| = |FE|$.

Uočimo da je $|\angle FAD| = |\angle FAC| + |\angle CAD|$, $|\angle BEF| = |\angle BEC| + |\angle CEF|$.

Kako su $\angle FAC$ i $\angle CEF$ nasuprotni kutovi paralelograma, vrijedi $|\angle FAD| = |\angle FAC| + |\angle CAD| = |\angle CEF| + |\angle BEC| = |\angle BEF|$.

Prema SKS poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti FAD i BEF sukladni.

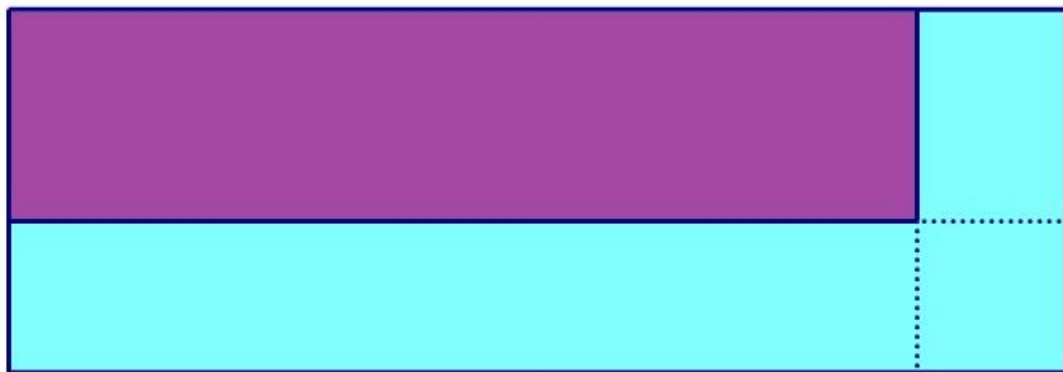
Zato je i $|FB| = |FD|$ što je trebalo dokazati.

4. zadatak

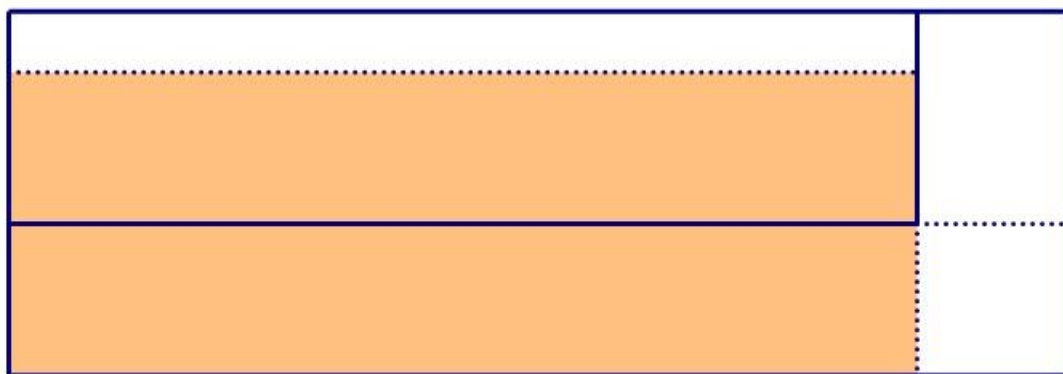
Duljine svih stranica pravokutnika, izražene u centimetrima, prirodni su brojevi. Povećamo li širinu i visinu tog pravokutnika za 10 cm, njegova će se površina udvostručiti. Odredi dimenzije svih takvih pravokutnika.

Rješenje:

Produljivanjem stranica za 10 cm dobivamo sljedeći pravokutnik:



Prema uvjetu zadatka površina novonastalog pravokutnika dva puta je veća od površine početnog, što zapravo znači da su površine plavog i ljubičastog dijela na slici jednake.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.



Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.



Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Preostali plavi dio površine sastoji se od dva kvadrata sa stranicom duljine 10 cm, ukupne površine $100 \text{ cm}^2 + 100 \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2$. Znači, preostali pravokutnik ljubičaste boje ima površinu 200 cm^2 .

Moguće duljine stranica tog pravokutnika su:

- I. 1 cm i 200 cm
- II. 2 cm i 100 cm
- III. 4 cm i 50 cm
- IV. 5 cm i 40 cm
- V. 8 cm i 25 cm
- VI. 10 cm i 20 cm.

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

- I. 11 cm i 210 cm

- II. 12 cm i 110 cm
- III. 14 cm i 60 cm
- IV. 15 cm i 50 cm
- V. 18 cm i 35 cm
- VI. 20 cm i 30 cm.

Drugo rješenje.

$$(a + 10) \cdot (b + 10) = 2 \cdot a \cdot b$$

$$ab + 10a + 10b + 100 = 2ab$$

$$ab - 10a = 10b + 100$$

$$a(b - 10) = 10b + 100$$

$$a = \frac{10b + 100}{b - 10} = \frac{10b - 100 + 200}{b - 10} = 10 + \frac{200}{b - 10}$$

Dakle, $b - 10$ mora biti djeljitelj broja $200 = 2^3 \cdot 5^2$. Za svaki takav b izračunamo odgovarajući a i dobivamo 3 rješenja:

$b - 10$	1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200
b	11	12	14	15	18	20	30	35	50	60	110	210
a	210	110	60	50	35	30	20	18	15	14	12	11

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

- I. 11 cm i 210 cm
- II. 12 cm i 110 cm
- III. 14 cm i 60 cm
- IV. 15 cm i 50 cm
- V. 18 cm i 35 cm
- VI. 20 cm i 30 cm

Treće rješenje.

$$(a + 10) \cdot (b + 10) = 2 \cdot a \cdot b$$

$$ab + 10a + 10b + 100 = 2ab$$

$$ab - 10a - 10b = 100$$

$$a(b - 10) - 10b + 100 - 100 = 100$$

$$a(b - 10) - 10(b - 10) = 200$$

$$(a - 10)(b - 10) = 200$$

Zaključujemo da $b - 10$ mora biti djeljitelj broja $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

Sve mogućnosti su dane tablicom:

$a - 10$	1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200
$b - 10$	200	100	50	40	10	8	10	8	5	4	2	1
a	11	12	14	15	18	20	30	35	50	60	110	210
b	210	110	60	50	35	30	20	18	15	14	12	11

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

- I. 11 cm i 210 cm
- II. 12 cm i 110 cm
- III. 14 cm i 60 cm
- IV. 15 cm i 50 cm
- V. 18 cm i 35 cm
- VI. 20 cm i 30 cm

5. zadatak

Jelena i Krešo igraju igru zapisujući pomoću znamenaka iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ šesteroznamenasti broj s različitim znamenkama. Najprije Jelena bira znamenku jedinica, zatim Krešo bira znamenku desetica i dalje redom: Jelena bira znamenku stotica, Krešo znamenku tisućica, Jelena znamenku desettisućica i na kraju Krešo bira znamenku stotisućica. Ako je tako nastali šesteroznamenasti broj s različitim znamenkama djeljiv s 3, onda pobjeđuje Krešo, a ako taj broj nije djeljiv s 3, onda pobjeđuje Jelena.

Odredi koji od igrača ima strategiju za pobjedu i objasni tu strategiju.

Rješenje.

Šesteroznamenasti broj je djeljiv s 3 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3. Nakon što se potroši 6 znamenaka, ostat će neiskorištena tri broja iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zbroj svih tih brojeva je djeljiv s 3, pa je dobiveni šesteroznamenasti broj djeljiv s 3 ako i samo ako je zbroj preostala tri broja djeljiv s 3. U tom slučaju pobjeđuje Krešo.

Može li Jelena osigurati da nakon njenog zadnjeg poteza preostanu četiri broja koja ne omogućuju Kreši da odabere broj koji bi mu osigurao pobjedu?

Podijelimo brojeve 1,2,3,4,5,6,7,8,9 u tri skupine, ovisno o ostacima pri dijeljenju brojem 3:

$$\{1, 4, 7\} \quad \{2, 5, 8\} \quad \{3, 6, 9\}.$$

Ako nakon Krešinog zadnjeg poteza ostanu neiskorištena tri broja iz iste skupine, njihov zbroj će biti djeljiv s 3. Ako ostane po jedan broj iz svake skupine, zbroj će također biti djeljiv s tri.

U ostalim slučajevima – a to znači kada ostanu dva broja iz jedne skupine i još jedan broj iz neke druge – zbroj neće biti djeljiv s tri. Dakle, Jelena treba osigurati da Krešo ne može ostaviti niti tri broja iz iste skupine, niti po jedan broj iz svake skupine. Drugim riječima, nakon njenog zadnjeg (trećeg) poteza, moraju još ostati neiskorištena po dva broja iz dviju skupina.

Dokažimo da Jelena ima strategiju za pobjedu.

Najprije Jelena bira bilo koji broj. Nakon toga Krešo ima dvije različite mogućnosti.

Ako Kreše odabere broj iz iste skupine, onda će Jelena nakon toga opet odabrati broj iz iste skupine (to je već treći broj iz iste skupine) pa će Krešo morati izabrati broj iz jedne od dvije preostale

skupine. U svom zadnjem izboru Jelena će birati broj iz treće skupine. Sada su ostala još po dva broja u dvije skupine. Što god da Krešo odabere na kraju, izabrani brojevi ne mogu biti ni svi brojevi iz dvije skupine niti po dva broja iz svake od tri skupine.

Ako Krešo u svom prvom "potezu" odabere broj iz skupine iz koje nije Jelenin prvi broj, tada će Jelena u sljedećem izboru birati broj iz preostale treće skupine. Nakon toga Krešo, kojem su preostala po dva broja iz svake skupine bira neki od tih brojeva, a potom Jelena bira broj iz iste skupine. Tada su preostala po dva broja u dvije skupine, dok su iz treće skupine sva tri broja iskorištena. Što god da Krešo odabere u svom zadnjem potezu, izabrani brojevi ne mogu biti ni svi brojevi iz dvije skupine niti po dva broja iz svake od tri skupine.

Napomena. Skraćeno možemo pisati koliko u svakom koraku preostaje neiskorištenih brojeva u pojedinoj skupini. Tako na početku zapisujemo 333 jer u svakoj skupini imamo 3 broja.

Za ishod igre nije važno iz koje su skupine birani brojevi, pa broj neiskorištenih brojeva možemo pisati od najvećeg prema najmanjem. Jelenini potezi su označeni crvenom bojom, a Krešini plavom.

Kad tako promatramo, Krešo samo u prvom potezu ima više mogućnosti. Za Jelenu su označeni oni potezi koje treba odabrati da bude sigurna u pobjedu.

