

7. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 14. veljače 2026.

1. Odredi sve periodične nizove $a_0, a_1, a_2, \dots$ realnih brojeva različitih od 0 takve da za svaki cijeli broj $n \geq 0$ vrijedi

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2} \cdot \left(a_n - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right).$$

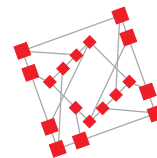
Napomena. Za niz realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \dots$ kažemo da je periodičan ako postoji prirodan broj d takav da je $a_n = a_{n+d}$ za svaki cijeli broj $n \geq 0$.

2. Maja ima 2025 pločica označenih brojevima od 1 do 2025 i želi ih postaviti na ploču dimenzija 1×2025 koja je na početku prazna. U svakom koraku, Maja izabire pločicu koju još nije postavila i jedno od praznih polja, postavlja pločicu na to polje, a zbroj brojeva koji su već postavljeni na njemu susjedna polja zapisuje na papir. Na kraju, Maja zbraja svih 2025 brojeva zapisanih na papiru. Koji je najveći zbroj koji Maja može postići?
3. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC , a k tom trokutu opisana kružnica te neka je M polovište luka $\widehat{BC}$ kružnice k koji ne sadrži točku A . Kružnica ω prolazi točkama M i I te siječe pravac BC u točkama D i E . Pravci MD i ME ponovo sijeku kružnicu k , redom u točkama P i Q . Dokaži da svi pravci PQ prolaze istom točkom neovisnoj o izboru kružnice ω .
4. *Polovitelj* je uređaj koji konstruira polovište dužine zadane dvjema krajnjim točkama. Počevši od dviju točaka čija je udaljenost 1 treba konstruirati dvije točke za čiju međusobnu udaljenost d vrijedi $\frac{1}{2033} < d < \frac{1}{2032}$. Ako se za konstrukciju koristi samo polovitelj, koliko ga najmanje puta treba upotrijebiti?

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.



7. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 15. veljače 2026.

1. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x^2 + yf(x)) = xf(x + y).$$

2. Ana i Borna imaju 100 bijelih kuglica, 107 crvenih kuglica i 207 praznih kutija označenih brojevima od 1 do 207.

Na početku Ana potajno u svaku od kutija stavi po jednu kuglicu. Nakon toga Borna na ploču zapiše N parova (i, j) gdje je $1 \leq i < j \leq 207$. Tada Ana za svaki par (i, j) zapisan na ploči označava jesu li kuglice u i -toj i j -toj kutiji iste boje ili nisu.

Odredi najmanji prirodni broj N takav da Borna može zapisati N parova tako da na temelju Aninih odgovora može jednoznačno odrediti boju kuglice u svakoj kutiji, bez obzira na to kako ih Ana rasporedi.

3. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$. Točka D nalazi se na dužini $\overline{AC}$ tako da je $|AB| = |AD|$. Neka je X točka na dužini $\overline{BC}$ takva da pravac BD dira opisanu kružnicu trokuta CDX . Opisane kružnice trokuta CDX i ABC sijeku se u točkama M i C . Dokaži da pravac MD prolazi polovištem onog luka $\widehat{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC koji sadrži točku A .

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (n, k) za koje vrijedi

$$n^3 - 5n + 10 = 2^k.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.