

7. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 14. veljače 2026.

Zadatak 1.

Odredi sve periodične nizove $a_0, a_1, a_2, \dots$ realnih brojeva različitih od 0 takve da za svaki cijeli broj $n \geq 0$ vrijedi

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2} \cdot \left(a_n - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right).$$

Napomena. Za niz realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \dots$ kažemo da je periodičan ako postoji prirodan broj d takav da je $a_n = a_{n+d}$ za svaki cijeli broj $n \geq 0$.

Prvo rješenje.

Ako pomnožimo obje strane u jednakosti iz zadatka s $a_{n+1} \cdot (n+2)$, dobivamo

$$(n+2)a_{n+1}a_{n+2} = a_n a_{n+1} - (n+1).$$

Neka je d broj takav da je $a_n = a_{n+d}$ za svaki $n \geq 0$. Tada je

$$(n+d+2)a_{n+d+1}a_{n+d+2} = a_{n+d}a_{n+d+1} - (n+d+1).$$

Kako je $a_n = a_{n+d}$, $a_{n+1} = a_{n+d+1}$ i $a_{n+2} = a_{n+d+2}$, slijedi da je

$$\begin{aligned}(n+2)a_{n+1}a_{n+2} &= a_n a_{n+1} - (n+1), \\ (n+d+2)a_{n+1}a_{n+2} &= a_n a_{n+1} - (n+d+1).\end{aligned}$$

Oduzimanjem prve jednakosti od druge slijedi $da_{n+1}a_{n+2} = -d$, odnosno $a_{n+1}a_{n+2} = -1$. Ta jednakost vrijedi za svaki cijeli broj $n \geq 0$. Zbog periodičnosti, vrijedi i $a_0a_1 = a_da_{d+1} = -1$. Dakle, $a_{n+1} = \frac{-1}{a_n}$ za svaki $n \geq 0$, i $a_{n+2} = \frac{-1}{a_{n+1}} = a_n$. Zaključujemo da postoji realan broj $t \neq 0$ takav da je $a_n = t$ za sve parne indekse n i $a_n = \frac{-1}{t}$ za sve neparne indekse n .

S druge strane, za svaki takav niz vrijedi uvjet zadatka: za svaki n vrijedi

$$(n+2)a_{n+1}a_{n+2} = -(n+2) = a_n a_{n+1} - (n+1).$$

Dakle, odgovor su svi nizovi oblika

$$t, \frac{-1}{t}, t, \frac{-1}{t}, \dots$$

za realan broj $t \neq 0$.

Drugo rješenje.

Neka je d period niza $a_0, a_1, \dots$. Tada uvrštavanjem $n+kd$ umjesto n i korištenjem periodičnosti slijedi da za svaki prirodan broj k i svaki $n \geq 0$ vrijedi

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+kd+2} \cdot \left(a_n - \frac{n+kd+1}{a_n} \right).$$

Puštanjem $k \rightarrow \infty$ i korištenjem $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+kd+2} = 0$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n+kd+1}{(n+kd+2)a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}}$ slijedi

$$a_{n+2} = -\frac{1}{a_{n+1}}.$$

Dakle, umnožak bilo koja dva uzastopna člana niza je jednak -1 .

Provjera da su svi takvi nizovi rješenje zadatka je ista kao u prvom rješenju.

Zadatak 2.

Maja ima 2025 pločica označenih brojevima od 1 do 2025 i želi ih postaviti na ploču dimenzija 1×2025 koja je na početku prazna. U svakom koraku, Maja izabire pločicu koju još nije postavila i jedno od praznih polja, postavlja pločicu na to polje, a zbroj brojeva koji su već postavljeni na njemu susjedna polja zapisuje na papir. Na kraju, Maja zbraja svih 2025 brojeva zapisanih na papiru. Koji je najveći zbroj koji Maja može postići?

Rješenje.

Zamislamo da Maja umjesto zbroja brojeva, u svakom koraku zapiše sve brojeve koji se nalaze u susjednim poljima. Maja će na kraju imati isti zbroj brojeva uz ovu interpretaciju.

Promotrimo neki par susjednih polja (A, B) i pretpostavimo da je broj upisan u polje A prije nego je upisan u polje B . Onda u trenutku upisivanja broja u polje A Maja na papir neće zapisati broj koji se na kraju nalazi u polju B , a u trenutku upisivanja broja u polje B hoće na papir zapisati broj koji se nalazi u polju A . Dakle, za svaki par susjednih brojeva u tablici na kraju, svaki će biti upisan na papir točno jednom. Ukupno će na papir biti upisano točno 2024 broja.

Nadalje, kako svako polje ima najviše dva susjedna, svaki broj će biti upisan na papir najviše dva puta. Dakle, ukupan zbroj brojeva na papiru je najviše jednak dvostrukom zbroju 1012 najvećih brojeva, odnosno

$$2 \cdot (2025 + 2024 + \dots + 1014) = 2025 \cdot 2026 - 1013 \cdot 1014.$$

Da bismo dokazali da se taj broj može postići, postavimo prvo u sve parne pozicije na ploči brojeve 2026, 2025, $\dots$, 1014 a zatim postavimo preostale brojeve u bilo kojem poretku na neparne pozicije. Svaki od brojeva u parnoj poziciji će tada prije svojih susjeda biti napisan na ploči, pa će dva puta biti zapisan na papir.

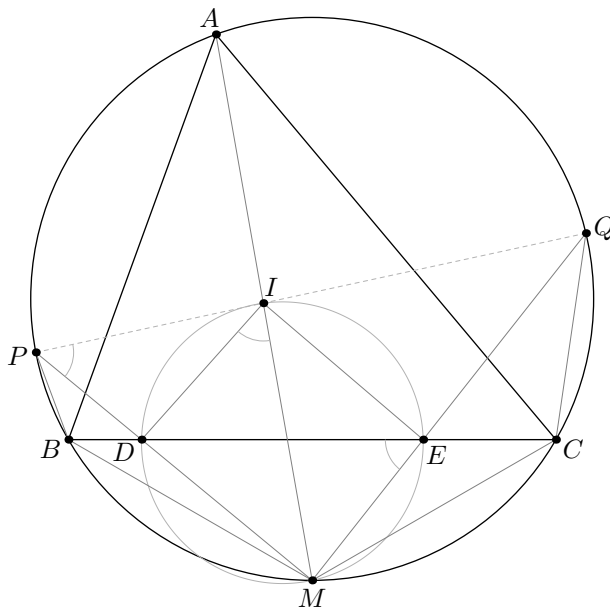
Zadatak 3.

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC , a k tom trokutu opisana kružnica te neka je M polovište luka $\widehat{BC}$ kružnice k koji ne sadrži točku A . Kružnica ω prolazi točkama M i I te siječe pravac BC u točkama D i E . Pravci MD i ME ponovo sijeku kružnicu k , redom u točkama P i Q . Dokaži da svi pravci PQ prolaze istom točkom neovisnoj o izboru kružnice ω .

Rješenje.

Označimo s $\alpha = \sphericalangle BAC$.

Dokazat ćemo da svi pravci PQ prolaze točkom I .



Kako je točka M polovište luka $\widehat{BC}$ slijedi da se M nalazi na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$. Posebno, točke A , I i M se nalaze na istom pravcu.

Iz obodnih kutova nad istom tetivom redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle MBD &= \sphericalangle MBC = \sphericalangle MAC = \frac{\alpha}{2}, \\ \sphericalangle BPM &= \sphericalangle BAM = \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Prema K-K poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti MDB i MBP slični jer imaju zajednički kut u vrhu M te je $\sphericalangle MBD = \sphericalangle BPM = \frac{\alpha}{2}$.

Iz prethodne sličnosti imamo

$$\frac{|MB|}{|MD|} = \frac{|MP|}{|MB|},$$

odnosno imamo da vrijedi

$$|MD| \cdot |MP| = |MB|^2.$$

Analogno se pokaže da su trokuti MCE i MQC slični te da vrijedi

$$|ME| \cdot |MQ| = |MC|^2.$$

Nadalje, iz leme o trozubcu imamo da je $|MB| = |MC| = |MI|$ pa spajanjem prethodnih jednakosti dobivamo

$$|MD| \cdot |MP| = |ME| \cdot |MQ| = |MI|^2.$$

Iz jednakosti $|MD| \cdot |MP| = |ME| \cdot |MQ|$ slijedi da je četverokut $DEQP$ tetivan. Time imamo da je

$$\sphericalangle DEM = \sphericalangle DPQ = \sphericalangle MPQ.$$

Iz jednakosti $|MD| \cdot |MP| = |MI|^2$ slijedi da je pravac MI tangenta na opisanu kružnicu trokuta PDI . Primjenom teorema o kutu između tetive i tangente dobivamo da je

$$\sphericalangle DIM = \sphericalangle DPI = \sphericalangle MPI.$$

Konačno, kako je četverokut $DMEI$ tetivan, slijedi da je

$$\sphericalangle DEM = \sphericalangle DIM = \sphericalangle MPI.$$

Iz gornjih jednakosti napokon imamo da je

$$\sphericalangle MPQ = \sphericalangle DEM = \sphericalangle MPI$$

iz čega slijedi da se točka I nalazi na pravcu PQ .

Zadatak 4.

Polovitelj je uređaj koji konstruira polovište dužine zadane dvjema krajnjim točkama.

Počevši od dviju točaka čija je udaljenost 1 treba konstruirati dvije točke za čiju međusobnu udaljenost d vrijedi $\frac{1}{2033} < d < \frac{1}{2032}$.

Ako se za konstrukciju koristi samo polovitelj, koliko ga najmanje puta treba upotrijebiti?

Rješenje.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su nam na početku zadane točke 0 i 1 na brojevnom pravcu.

Primijetimo da su udaljenosti koje možemo konstruirati u točno n koraka točno one oblika $\frac{a}{2^n}$ gdje je $a \leq 2^n$ neparan prirodan broj i $n \geq 0$.

Dokažimo to matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da sve brojeve oblika $\frac{a}{2^n}$ možemo konstruirati u točno n koraka. Neka je $a \leq 2^{n+1}$ neparan.

Ako je $a > 2^n$, onda broj $\frac{2^n - a}{2^n}$ možemo konstruirati u n koraka, pa udaljenost $\frac{a}{2^{n+1}}$ možemo konstruirati kao $\frac{1 - \frac{2^n - a}{2^n}}{2}$. Ako je $a < 2^n$, onda $\frac{a}{2^{n+1}}$ možemo konstruirati kao $\frac{\frac{a}{2^n} - 0}{2}$.

Dakle, tražimo najmanji prirodan broj n za koji postoji prirodan broj $a < 2^n$ takav da je

$$\frac{1}{2033} < \frac{a}{2^n} < \frac{1}{2032}.$$

Ekvivalentno, treba vrijediti $\frac{2^n}{2033} < a < \frac{2^n}{2032}$, odnosno interval $(\frac{2^n}{2033}, \frac{2^n}{2032})$ treba sadržavati cijeli broj. Ako je $2^n < 2032$, onda je interval sadržan u $(0, 1)$ pa ne sadrži cijeli broj. Dakle,

$2^n \geq 2032$ pa je $n \geq 11$. Neka je $n = 11 + k$. Vrijedi $2^{11} = 2048$, pa je $\frac{2^{11+k}}{2033} = 2^k + \frac{15}{2033} \cdot 2^k$ i $\frac{2^{11+k}}{2032} = 2^k + \frac{16}{2032} \cdot 2^k$.

Slijedi da interval $(\frac{15}{2033} \cdot 2^k, \frac{16}{2032} \cdot 2^k)$ treba sadržavati cijeli broj. Posebno, treba vrijediti $\frac{16}{2032} \cdot 2^k > 1$. To je ekvivalentno s $2^k > 127$ odnosno $k \geq 7$.

Za $k = 7$ je $\frac{15}{2033} \cdot 2^7 < 1$ jer je $15 \cdot 128 = 1920 < 2033$, pa traženi interval u tom slučaju sadrži broj 1.

Zaključujemo da je najmanji n za koji je moguće postići udaljenost strogo između $\frac{1}{2033}$ i $\frac{1}{2032}$ jednak 18.

7. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 15. veljače 2025.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x^2 + yf(x)) = xf(x + y).$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $x = y = 0$ slijedi $f(0) = 0$.

Pretpostavimo da je $f(a) = 0$ za neki $a \neq 0$. Tada uvrštavanjem $x = a$ slijedi $f(a^2) = af(a + y)$ za svaki $y \in \mathbb{R}$. Zamjenom y sa $y - a$ i dijeljenjem s a slijedi da je $f(y) = \frac{f(a^2)}{a}$, odnosno funkcija je konstantna. Ta konstanta je jednaka 0 jer je $f(0) = 0$. Direktnom provjerom vidimo da je funkcija zadana s $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ uistinu rješenje zadatka.

Inače, vrijedi $f(a) \neq 0$ za svaki $a \neq 0$.

Uvrštavanjem $y = -x$ slijedi $f(x^2 - xf(x)) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $x^2 - xf(x) = 0$ je također jednako 0 za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Za $x \neq 0$ je tada $f(x) = x$ a kako smo već dokazali $f(0) = 0$ slijedi da je $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Direktnom provjerom se vidi da je ta funkcija također rješenje zadatka.

Zadatak 2.

Ana i Borna imaju 100 bijelih kuglica, 107 crvenih kuglica i 207 praznih kutija označenih brojevima od 1 do 207.

Na početku Ana potajno u svaku od kutija stavi po jednu kuglicu. Nakon toga Borna na ploču zapiše N parova (i, j) gdje je $1 \leq i < j \leq 207$. Tada Ana za svaki par (i, j) zapisan na ploči označava jesu li kuglice u i -toj i j -toj kutiji iste boje ili nisu.

Odredi najmanji prirodni broj N takav da Borna može zapisati N parova tako da na temelju Aninih odgovora može jednoznačno odrediti boju kuglice u svakoj kutiji, bez obzira na to kako ih Ana rasporedi.

Rješenje.

Tvrdimo da je odgovor 205. Ako su Bornini upiti $(1, k)$ za $2 \leq k \leq 206$, onda Borna zna za svaku od prvih 206 kutija je li u njima kuglica iste boje kao u kutiji 1, odnosno može grupirati prvih 206 kutija u dvije grupe po bojama kuglica. Međutim, Borna zna i njihove boje, jer ona grupa kutija kojih je više od 100 sadrži crvene kuglice, a preostale kutije sadrže bijele kuglice. Dakle, Borna za svaku od prvih 206 kutija zna boju kuglica u njima. Kako zna ukupan broj kuglica svake boje, Borna zna i boju kuglice u zadnjoj kutiji.

Preostaje dokazati da Borna ne može nakon $N < 205$ upita biti siguran u boju kuglice u svakoj kutiji.

Grupirajmo kutije zajedno na sljedeći način. Prije Borninih upita, neka je svaka kutija u svojoj grupi. Nakon svakog Borninog upita (a, b) , spojimo grupe u kojima se nalaze a i b u jednu grupu. Svaki upit (a, b) smanjuje broj grupa za 1 ako su a i b bile u različitim grupama, ili ostavlja broj grupa isti ako su a i b već bile u istoj grupi. Dakle, nakon N upita, ukupno će ostati barem $207 - N$ grupa, što je barem 3. Borna jedino zna koje od kutija sadrže istobojne kuglice u svakoj od grupa, ali ne zna kojih su boja.

Ako postoji grupa parne veličine manje ili jednake 200, onda je moguće postići da pola kutija u toj grupi sadrži crvenu kuglicu, a pola kutija bijelu i onda Borna ne može sa sigurnošću reći koja polovica je bijela a koja crvena.

Ako ne postoji grupa parne veličine manje ili jednake 200 a postoji grupa parne veličine veće od 200, onda postoje još tri grupe neparne veličine (jer je ukupan broj kutija neparan). Dvije od te tri grupe sadrže po jednu kuglicu, i ako stavimo crvenu kuglicu u jednu od kutija i bijelu kuglicu u drugu od kutija, Borna ne može biti siguran koja od kutija sadrži koju kuglicu.

Ako ne postoji niti jedna grupa parne veličine, onda postoje tri grupe neparne veličine. Promotrimo dvije najmanje. Ako ne postoji niti jedna grupa parne veličine, onda postoje tri grupe neparne veličine. Promotrimo dvije najmanje. Recimo da su veličine grupa $2A + 1$ i $2B + 1$. Možemo staviti A crvenih kuglica u prvu grupu i $B + 1$ crvenih kuglica u drugu grupu ili $A + 1$ crvenih kuglica u prvu grupu i B kuglica u drugu grupu. Borna na temelju svojih upita ne može razlikovati ta dva slučaja.

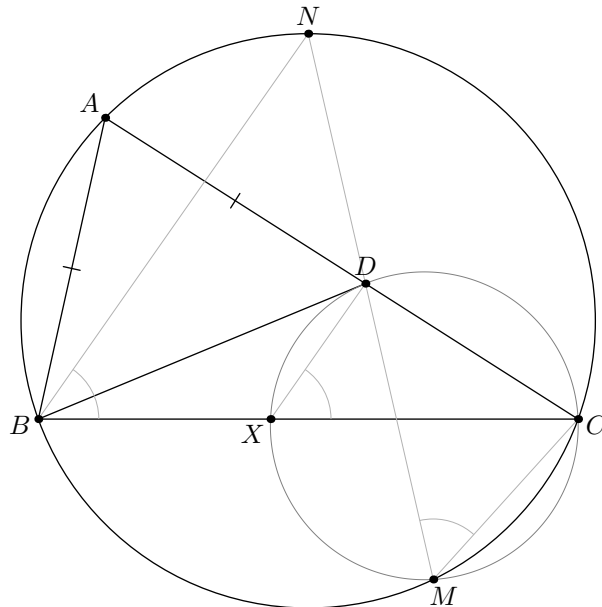
Dakle, kako god izgledali Bornini upiti, nakon 204 upita ne može biti siguran za boju kuglice u svakoj kutiji.

Zadatak 3.

Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$. Točka D nalazi se na dužini $\overline{AC}$ tako da je $|AB| = |AD|$. Neka je X točka na dužini $\overline{BC}$ takva da pravac BD dira opisanu kružnicu trokuta CDX . Opisane kružnice trokuta CDX i ABC sijeku se u točkama M i C . Dokaži da pravac MD prolazi polovištem onog luka $\widehat{BC}$ kružnice opisane trokutima ABC koji sadrži točku A .

Rješenje.

U trokutu ABC označimo redom s α , β i γ mjere kutova u vrhovima A , B i C . Označimo s N točku u kojoj pravac MD ponovno siječe opisanu kružnicu trokuta ABC .



Iz uvjeta zadatka je trokut ABD jednakokračan pa slijedi da je

$$\sphericalangle DBA = \sphericalangle ADB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Nadalje, imamo da je

$$\sphericalangle XBD = \sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA - \sphericalangle DBA = \beta + \frac{\alpha}{2} - 90^\circ.$$

Primjenom teorema o kutu između tetive i tangente slijedi da je

$$\sphericalangle BDX = \sphericalangle XCD = \gamma.$$

Iz gornjeg konačno možemo izračunati

$$\sphericalangle CXD = \sphericalangle XBD + \sphericalangle BDX = \left(\beta + \frac{\alpha}{2} - 90^\circ\right) + \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Korištenjem tetivnosti četverokuta $BMCN$ i $XMCD$ redom imamo

$$\sphericalangle CBN = \sphericalangle CMN = \sphericalangle CXD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Također, iz obodnih kutova nad istom tetivom imamo da je

$$\triangleleft BNC = \triangleleft BAC = \alpha.$$

Konačno u trokutu BCN imamo da je $\sphericalangle BNC = \alpha$ i $\sphericalangle CBN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ pa možemo izračunati i preostali kut u tom trokutu

$$\sphericalangle NCB = 180^\circ - \sphericalangle BNC - \sphericalangle CBN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Dakle, $\sphericalangle CBN = \sphericalangle NCB$ iz čega slijedi da je točka N polovište luka $\widehat{BAC}$.

Zadatak 4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (n, k) za koje vrijedi

$$n^3 - 5n + 10 = 2^k.$$

Rješenje.

Promotrimo ostatak koji lijeva strane jednadžbe daju pri dijeljenju sa 7.

n	$n^3 - 5n + 10 \pmod{7}$
0	3
1	6
2	1
3	1
4	5
5	5
6	0

Dakle, mogući ostatci su 3, 6, 1, 5, 0. S druge strane, 2^k daje ostatak 2, 4 ili 1 pri dijeljenju sa 7. Zaključujemo da obje strane trebaju dati ostatak 1 pri dijeljenju sa 7. Vrijednosti broja k za koje je $2^k \equiv 1 \pmod{7}$ su točno one za koje je k djeljiv s 3. Dakle, $k = 3m$ za neki prirodan broj m .

Međutim, tada je $n^3 - 2^{3m} = 5n - 10$, iz čega slijedi

$$(n - 2^m)(n^2 + 2^m n + 4^m) = 5n - 10.$$

Posebno, vrijedi $n^2 + 2^m n + 4^m \leq 5n - 10$, iz čega slijedi $n < 5$. S druge strane, vrijedi $n > 2^m$ pa je $n \geq 3$.

Za $n = 3$ je nužno $m = 1$ i imamo $1^3 - 5 + 10 = 6 \neq 2^3$, pa nema rješenja. Za $n = 4$ i $n = 5$ prema tablici vidimo da $n^3 - 5n + 10$ ne daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 7. Zaključujemo da jednadžba nema prirodnih rješenja.