

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 5. svibnja 2026.

Zadatak 1.

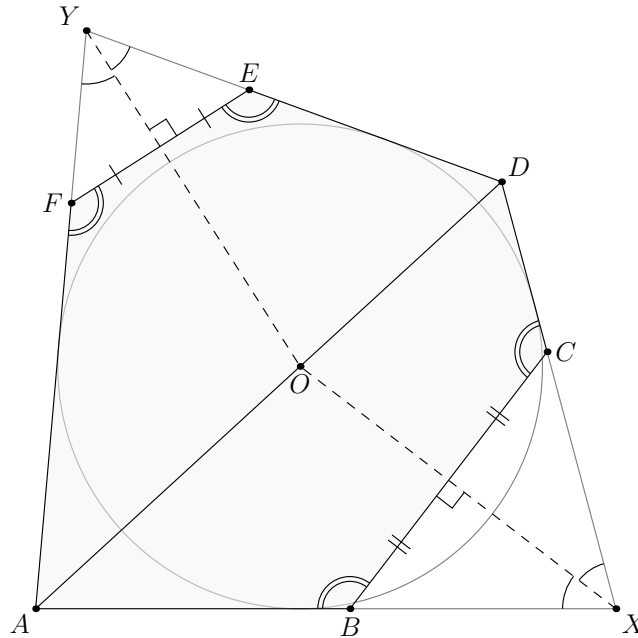
U konveksnom šesterokutu $ABCDEF$ unutarnji kutovi pri vrhovima B , C , E i F međusobno su sukladni te vrijedi

$$|AB| + |DE| = |AF| + |CD|.$$

Dokaži da se simetrale stranica $\overline{BC}$ i $\overline{EF}$ sijeku na dijagonali $\overline{AD}$.

Rješenje.

Označimo sa φ mjere kutova u vrhovima B , C , E i F šesterokuta $ABCDEF$. Neka je točka X sjecište pravaca AB i CD te neka je Y sjecište pravaca DE i AF .



Uočimo da je

$$\sphericalangle XBC = 180^\circ - \varphi = \sphericalangle BCX$$

iz čega slijedi da je trokut BXC jednakokrakan.

Posebno, vrijedi $|BX| = |CX|$ te je simetrala dužine $\overline{BC}$ ujedno i simetrala kuta $\sphericalangle BXC$.

Na isti način dobijemo $|EY| = |FY|$ te je simetrala dužine $\overline{EF}$ ujedno i simetrala kuta $\sphericalangle FYE$.

Iz uvjeta $|AB| + |DE| = |AF| + |CD|$ sada redom slijedi

$$\begin{aligned} |AX| + |DY| &= |AB| + |BX| + |DE| + |EY| \\ &= |CD| + |CX| + |AF| + |FY| \\ &= |DX| + |AY|. \end{aligned}$$

Iz gornje jednakosti slijedi da je četverokut $AXDY$ tangencijalan. Neka je k upisana kružnica četverokuta $AXDY$ te neka je O središte kružnice k .

Budući da su simetrale dužina $\overline{BC}$ i $\overline{EF}$ ujedno i simetrale kutova u vrhovima X i Y četverokuta $AXDY$ slijedi da se simetrale tih dužina sijeku u točki O .

Kako je

$$\sphericalangle AXD = \sphericalangle BXC = 2\varphi - 180^\circ = \sphericalangle FYE = \sphericalangle AYD,$$

slijedi da je $|OX| = |OY|$. Naime, ako sa P i Q redom označimo nožišta okomica iz središta O na AX i AY tada tražena jednakost slijedi iz sukladnosti trokuta OPX i OQY .

Neka je o simetrala kuta $\sphericalangle XOY$. Promotrimo osnu simetriju s obzirom na pravac o .

Kako je $|OX| = |OY|$, slijedi da je točka Y osnosimetrična slika točke X s obzirom na os o .

Nadalje, kako o prolazi kroz središte upisane kružnice k , slijedi da se kružnica k preslika u samu sebe pri osnoj simetriji s obzirom na os o . Posebno, to znači da osna simetrija s obzirom na os o slika tangentu AX na kružnicu k u tangentu AY na kružnicu k . Kako je točka A presjek tih tangenti, slijedi da se točka A mora nalaziti na osi o .

Analogno zaključujemo da se i točka D nalazi na osi o .

Dakle, os o je zapravo pravac AD i na njemu se nalazi točka O što smo i trebali dokazati.

Zadatak 2.

Za skup od 55 osoba kažemo da je *miroljubiv* ako za bilo koji njihov raspored oko okruglog stola vrijedi da ima više parova uzastopnih osoba koje su prijatelji nego onih koje to nisu. Odredi najveći prirodni broj N takav da u svakom miroljubivom skupu postoji grupa od barem N ljudi koji su svi međusobno prijatelji.

Prvo rješenje.

Odgovor je $N = 28$.

Izaberimo neki skup S od 28 ljudi i zadajmo da su dvije osobe prijatelji ako i samo ako nisu oba člano vi skupa S . Tvrdimo da je uvjet zadatka zadovoljen te da ne postoji 29 ljudi koji su svi međusobno prijatelji.

Zaista, kako god poredali ljude oko stola, postojat će najviše 27 parova uzastopnih ljudi koji su svi člano vi skupa S , pa će biti barem 28 parova uzastopnih prijatelja. S druge strane, kojih god 29 ili više ljudi odabrali, nekih dvoje će biti člano vi skupa S i neće biti prijatelji.

Dokažimo da uvijek postoji skup od 28 ljudi koji su svi međusobno prijatelji. Promotrimo raspored oko stola $(v_1, v_2, \dots, v_{55})$ u kojem je najmanji mogući broj parova uzastopnih prijatelja. Neka je P skup svih indeksa i takvih da su v_i i v_{i+1} prijatelji, gdje je $v_{56} = v_1$.

Tvrdimo da su svaka dva vrha v_i i v_j za brojeve $i < j$ iz P prijatelji. Zaista, ako v_i i v_j nisu prijatelji, onda možemo zamijeniti trenutni poredak poretkom

$$(v_1, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, \dots, v_{55}).$$

Tada smo zamijenili parove uzastopnih vrhova (v_i, v_{i+1}) i (v_j, v_{j+1}) parovima (v_i, v_j) i (v_{i+1}, v_{j+1}) , a ostali parovi uzastopnih vrhova ostaju isti. Kako su (v_i, v_{i+1}) i (v_j, v_{j+1}) prijatelji, a (v_i, v_j) nisu, ukupan broj parova uzastopnih prijatelja se smanjio, kontradikcija s minimalnošću.

Iz uvjeta zadatka slijedi da je P veličine barem 28, pa smo pronašli grupu od 28 ljudi koji su svi međusobno prijatelji.

Drugo rješenje.

Primjer za koji se postiže $N = 28$ isti je kao u prvom rješenju.

Dokažimo sada da uvijek postoji grupa od 28 ljudi koji su svi međusobno prijatelji.

Pretpostavimo da takva grupa ne postoji. Numerirajmo ljude s $v_1, v_2, \dots, v_{55}$ na proizvoljan način. Provodimo sljedeći algoritam. Za početak, stavimo svaki od vrhova u zasebnu listu. U svakom koraku, ako postoje dvije liste $(x_1, \dots, x_k)$ i $(y_1, \dots, y_j)$ takve da x_k i y_j nisu prijatelji, spojimo te dvije liste u listu

$$(x_1, \dots, x_k, y_j, \dots, y_1).$$

Algoritam staje kad više ne postoje dvije liste koje na taj način možemo spojiti. Tada su svi posljednji članovi lista međusobno prijatelji, pa ima najviše 27 listi, i svaka dva uzastopna člana svake liste su neprijatelji po konstrukciji. Ukupno ima barem 28 parova uzastopnih članova u svim listama, jer je zbroj broja listi i parova uzastopnih članova u listi jednak 55.

Sada spojimo dobivene liste na proizvoljan način u krug. Postoji barem 28 parova uzastopnih članova koji nisu prijatelji, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Zadatak 3.

Odredi sve funkcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ takve da za svaki prirodan broj n i za svaki djelitelj d broja n postoji djelitelj d' broja n takav da vrijedi

$$n \mid d + f(d').$$

Prvo rješenje.

Primijetimo da funkcija $f(n) = -n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ zadovoljava tvrdnju zadatka - tada možemo uzeti $d' = d$ i vrijedi $d + f(d') = 0$. Dokažimo da je to ujedno i jedina takva funkcija.

Označimo skup djelitelja broja n sa D_n , Dokaz provodimo po 6 kratkih točaka:

1. Ako su $d, k \in D_n$ različiti te $d', k' \in D_n$ odabrani da zadovoljavaju uvjet djeljivosti, vrijedi $f(d') \neq f(k')$ a napose i $d' \neq k'$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(k') = f(d')$. Tada imamo

$$n \mid d + f(d') - k - f(k') = d - k$$

ali kako je $|d - k| < n$ imamo $d = k$, kontradikcija.

2. Neka je $g_n: D_n \rightarrow D_n$ bilo koja funkcija takva da $n \mid d + f(g_n(d))$ za sve $d \in D_n$. Tada je g_n bijekcija.

Dokaz: Po 1. vrijedi da je g_n injekcija, a kako je iz D_n u samoga sebe, mora biti bijekcija.

3. Ako vrijedi $n \mid d + f(d')$ i g_n funkcija sa svojstvom iz 2), mora biti $g_n(d) = d'$. Prema tome, g_n je jedinstvena za svaki n .

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. Neka je $k \in D_n$ takav da je $g(k) = d'$ (postoji po 2.). Tada imamo $n \mid d + f(d') = d + f(g_n(k))$ ali i $n \mid k + f(g_n(k))$ što je kontradikcija sa 1.

4. f je injekcija.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da je $f(a) = f(b)$ za neke $a, b \in \mathbb{N}$. Za $n = ab$ i neki $k \mid n$ tada imamo

$$n \mid k + f(a) = k + f(b)$$

što je kontradikcija sa 1.

5. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je ili $f(n) = 0$ ili $f(n) = -d$ za neki $d \in D_n$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno i uzmimo da $f(n)$ nije tog oblika, te uzmimo $p > n + |f(n)|$ prost. Neka je $d = g_{pn}^{-1}(n)$. Tada vrijedi

$$pn \mid d + f(n)$$

Međutim, ako $p \mid d$ mora biti i $p \mid f(n)$ što ne može vrijediti (jer $p > |f(n)| > 0$), a u suprotnom imamo $d \mid n$ pa je $|d + f(n)| < p$ te mora biti 0, što je opet kontradikcija.

6. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) = -n$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, i neka je n najmanji protuprimjer. Tada imamo $f(n) = 0$ te $f(d) = -d$ za svaki djeljitelj d od n takav da $d \mid n$. Uzmimo neki prosti broj $p > 2n$. Promotrimo li $m = g_{pn}(n)$ (koji je djeljitelj pn) znamo da vrijedi

$$p \mid pn \mid n + f(m)$$

pa kako n nije djeljiv sa p vidimo da niti $f(m)$ nije djeljiv sa p . Također, zbog $p > 2n$ znamo da m nije djeljitelj n manji od n (inače $f(m) = -m$ pa $p \mid n - m$ ali $0 < |n - m| < p$). Po prethodnoj tvrdnji vidimo da za sve djelitelje $t \mid pn$ koji su djeljivi sa p vrijedi i da je $f(t)$ djeljivo sa p , pa nam jedino preostaje $m = n$ ali tada je $g_{pn}(n) = n = g_{pn}(pn)$, kontradikcija.

Drugo rješenje.

Provjeru obavljamo isto kao u prvom rješenju.

Označimo sa $v_p(n)$ najveći $k \in \mathbb{Z}$ takav da $p^k \mid n$, a sa $r(n)$ umnožak svih prostih djelitelja n .

Ovaj dokaz strukturiramo u 13 kratkih točaka:

1. Ako su $d, k \in D_n$ različiti te $d', k' \in D_n$ odabrani da zadovoljavaju uvjet djeljivosti, vrijedi $f(d') \neq f(k')$ a napose i $d' \neq k'$.

Dokaz: Kao i u prvom rješenju.

2. Neka je $g_n: D_n \rightarrow D_n$ bilo koja funkcija takva da $n \mid d + f(g_n(d))$ za sve $d \in D_n$. Tada je g_n bijekcija.

Dokaz: Kao i u prvom rješenju.

3. Ako vrijedi $n \mid d + f(d')$ i g_n funkcija sa svojstvom iz 2), mora biti $g_n(d) = d'$. Prema tome, g_n je jedinstvena za svaki n .

Dokaz: Kao i u prvom rješenju.

4. Uzmimo neke $k, d \in \mathbb{N}$, te u najmanji zajednički višekratnik k i d . Tada vrijedi sljedeća tvrdnja: $f(d) = -k$ ako i samo ako $g_{mu}(k) = d$ za beskonačno mnogo $m \in \mathbb{N}$, te tvrdnja vrijedi i ako zamijenimo “beskonačno mnogo” u prethodnoj rečenici sa “sve”.

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je $f(d) = -k$. Tada je $k + f(d) = 0$ pa imamo $mu \mid k + f(d)$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Međutim, kako su i k i d djelitelji mu , tvrdnja 3. nam daje $g_{mu}(k) = d$.

U suprotnom smjeru, pretpostavimo da je $g_{mu}(k) = d$ za beskonačno mnogo vrijednosti m . Tada za njih vrijedi $mu \mid k + f(d)$ ali kako ih je beskonačno je nužno i $f(d) = -k$.

5. f je injekcija.

Dokaz: Kao i u prvom rješenju.

6. Vrijedi $f(d) \leq 0$ za svaki $d \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno te uzmimo $n = 6df(d)$. Po 2. imamo $6df(d) \mid k + f(d)$ za neki $k \mid 6df(d)$.

Za $k = 6df(d)$ ovo je nemoguće, jer je tada

$$6df(d) < k + f(d) = (6d + 1)f(d) < 12df(d)$$

pa je $k + f(d)$ između uzastopnih višekratnika $6df(d)$.

Ako je $k < 6df(d)$ vrijedi i $k \leq 3df(d)$ pa je tada

$$0 < k + f(d) \leq (3d + 1)f(d) < 6df(d)$$

pa $k + f(d)$ isto ne može biti djeljiv sa $6df(d)$.

7. Za $n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i^{v_{p_i}(n)}$ gdje $i < j \iff p_i < p_j$ definirajmo $u_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^{\omega(n)}$ sa

$$u_n(k) = (v_1^n(k), v_2^n(k), \dots, v_{\omega(n)}^n(k))$$

gdje je $v_i^n(k) = \min(v_{p_i}(k), v_{p_i}(n))$.

Tada imamo $u_n(f(g_n(d))) = u_n(d)$ za sve $d \mid n$ i $u_n: f(D_n) \rightarrow \prod_{i=1}^{\omega(n)} [v_{p_i}(n)]$ je bijekcija. Posebno, ako je $u_n(f(k)) = u_n(d)$, imamo $k = g_n(d)$.

Dokaz: Imamo $n \mid d + f(g_n(d))$ pa vrijedi $v_{p_i}(d + f(g_n(d))) \geq v_{p_i}(n)$. Kako vrijedi $v_p(a + b) = \min(v_p(a), v_p(b))$ ako je $v_p(a) \neq v_p(b)$, dobivamo $v_i^n(f(g_n(d))) = v_i^n(d)$ kao što smo i željeli. Budući da je $u_n: D_n \rightarrow \prod_{i=1}^{\omega(n)} [v_{p_i}(n)]$ bijekcija, isto vrijedi i za sliku $f(D_n)$ zbog prethodno dokazane tvrdnje.

Naposljetku, imamo $u_n(d) = u_n(f(k)) = u_n(f(g_n(g_n^{-1}(k)))) = u_n(g_n^{-1}(k))$, što implicira $k = g_n(d)$.

8. Za svaki cijeli broj $k > 1$ postoji jedinstven $d_k \in \mathbb{N}$ takav da je $f(d_k) = -k$ i imamo $g_{mu}(k) = d_k$ za sve m , gdje je u najmanji zajednički višekratnik k, d . Dodatno, imamo $d_k \mid k \cdot r(k)$.

Dokaz: Uzmimo $n = k \cdot r(k)$. Mora vrijediti $k \cdot \text{rad}(k) \mid k + f(d)$ za neki $d_k = g_n(k) \mid n$. Kako imamo $v_p(k) < v_p(n) \leq lv_p(n)$ za sve $p \mid n$, vrijedi

$$u_{n^l}(f(d_k)) = u_n(f(d_k)) = u_n(k) = u_{n^l}(k)$$

pa prema 7. imamo $d_k = g_{n^l}(k)$ za sve $l \geq 1$. Tvrdnja 4. sada dovršava dokaz.

9. Za jedinstveni d_k takav da je $f(d_k) = -k$ naveden u prethodnoj tvrdnji, imamo $k \mid d_k$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. Tvrdnja 2. tada implicira da $d_k \mid a + f(d_k) = a - k \neq 0$ za neki jedinstveni (prema tvrdnji 3) djeljitelj $a \mid d_k$.

Razmotrimo neki prost broj p takav da p ne dijeli $(a - k)k$. Kako $d_k \mid pd_k$, moramo imati (prema tvrdnji 2) da $pd_k \mid a' + f(d_k) = a' - k$ za neki $a' \mid pd_k$. Budući da je a bio jedinstven i $d_k \mid a' - k$, ali p ne dijeli $a - k$, ne možemo imati $a' = a$, pa a' ne može dijeliti d_k i djeljiv je s p . Međutim, sada imamo $p \mid a' - k \implies p \mid k$, što je kontradikcija.

10. Imamo da je $d_k = k$ (dakle $f(k) = -k$) ili $f(g_k(k)) = 0$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. Sada imamo $k \mid k + f(g_k(k))$, što povlači $f(g_k(k)) \in \{0, -k, \dots\}$ prema tvrdnji 6. Ako je $f(g_k(k)) < 0$, imamo $f(g_k(k)) = -mk$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Međutim, tada dobivamo (prema tvrdnji 9)

$$mk \mid d_{mk} = g_k(k) \leq k$$

što prisiljava $m = 1$ i $g_k(k) = k$, pa je $f(k) = -k$.

11. Imamo $f(1) = -1$.

Dokaz: Ako je $f(1) = -k$ za neki $k > 1$, tvrdnja 9. daje kontradikciju. Sada imamo $f(1) \in \{0, -1\}$ prema tvrdnji 6.

Pretpostavimo da je $f(1) = 0$. Razmatrajući neki prost broj p , moramo imati $p \mid 1 + f(p)$ pa je $f(p) \equiv -1 \pmod{p}$. Razmatrajući p^2 , sada moramo imati $p^2 \mid p + f(p^2)$ pa je $f(p^2) \equiv -p \pmod{p^2}$ i $p^2 \mid 1 + f(p)$. Međutim, tvrdnje 8 i 9 daju $p \mid d_p \mid p^2$ pa moramo imati $f(p^2) = -p$. Možemo nastaviti indukcijom, dobivajući $p^k \mid 1 + f(p)$ za sve $k \in \mathbb{N}$, što prisiljava $f(p) = -1$.

Ponavljajući ovaj argument s nekim prostim brojem $q > p$ dobivamo $f(q) = -1 = f(p)$, što je kontradikcija s tvrdnjom 5.

12. Imamo $f(k) < 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da je $f(k) = 0$ za neki cijeli broj $k > 1$ (prema tvrdnji 11). Razmotrimo neki prost broj p koji ne dijeli k . Kako imamo $k \mid k + f(k)$ (dakle $g_k(k) = k$), razmatranje pk i

$$pk \mid k + f(g_{pk}(k))$$

povlači da $p \mid g_{pk}(k)$ jer bismo u suprotnom imali kontradikciju s tvrdnjom 3. Tada imamo $g_{pk}(k) = pd$ za neki $d \mid k$, a kako je $f(pd) \equiv -k \pmod{pk}$ imamo, za neki cijeli broj $m \geq 0$, da je

$$f(pd) = -k - mpk$$

što daje $d_{k+mpk} = pd$ pa

$$k + mpk \mid pd \leq pk$$

što implicira $m = 0, d = k$, dakle $f(pk) = -k$.

Međutim, ovaj argument možemo ponoviti za neki prost broj $q > p$ kako bismo dobili $f(qk) = -k = f(pk)$, što je kontradikcija s tvrdnjom 5.

13. Imamo $f(k) = -k$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Imamo $f(1) = -1$ prema tvrdnji 11., a tvrdnje 10. i 12. zajedno daju $f(k) = -k$ za sve $k > 0$ kao što smo i željeli.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 6. svibnja 2026.

Zadatak 1.

Dokaži da za svaki prost broj $p > 5$ postoji prirodan broj n takav da broj

$$2^n \cdot p - 3 \cdot (2^n - 1)$$

ima prost djelitelj manji od p .

Rješenje.

Stavimo $n = q - 2$ za prost broj $q > 2$ koji ćemo tek odrediti. Tada je

$$2 \cdot (2^n(p - 3) + 3) \equiv 2^{q-1}(p - 3) + 6 \equiv p + 3 \pmod{q},$$

gdje druga kongruencija slijedi po malom Fermatovom teoremu. Ako $p + 3$ nije potencija broja 2, možemo za q uzeti neki neparni prosti faktor od $p + 3$, koji je svakako manji od $\frac{p+3}{2}$, pa je manji od p .

Pretpostavimo da $p + 3$ jest potencija broja 2. Tada je $p > 7$ jer $7 + 3 = 10$ nije potencija broja 2. Stavimo $n = q - 3$ za prost broj $q > 2$ koji ćemo tek odrediti. Tada je

$$4 \cdot (2^n(p - 3) + 3) \equiv 2^{q-1}(p - 3) + 12 \equiv p + 9 \pmod{q},$$

gdje druga kongruencija slijedi po malom Fermatovom teoremu. Broj $p + 9$ nije potencija broja 2 jer $p + 3$ jest, a $p + 9 < 2(p + 3)$ za $p > 5$. Stoga za q možemo uzeti bilo koji neparan prost faktor od $p + 9$. Vrijedi $q < \frac{p+9}{2} \leq p$.

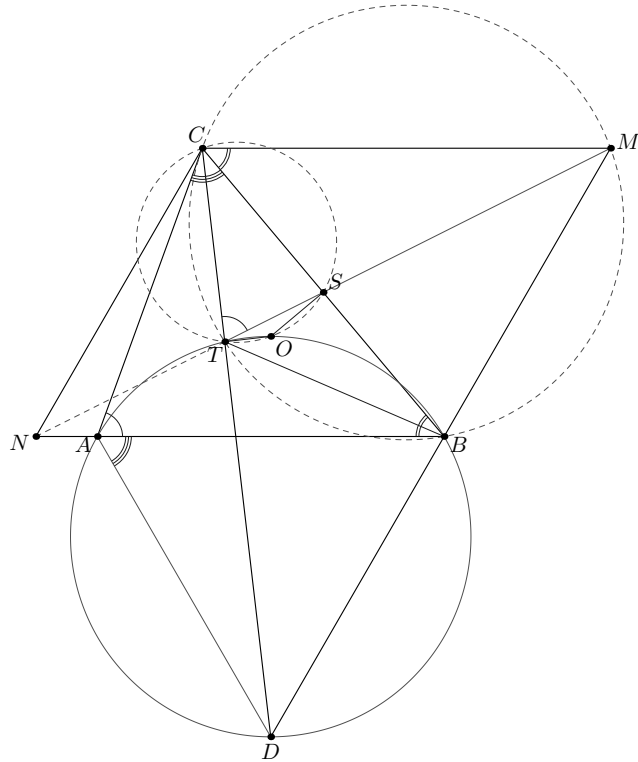
Zadatak 2.

Neka je ABC šiljastokutni trokut i O središte opisane kružnice tom trokutu. Trokutu ABO opisana je kružnica k , a D je točka takva da je $\overline{OD}$ njen promjer. Neka je N točka na pravcu AB takva da se A nalazi između B i N te neka je M točka na BD takva da je $BMCN$ paralelogram. Dokaži da se pravci CD i MN sijeku na kružnici k .

Prvo rješenje.

Neka je T točka u kojoj pravac CD ponovno siječe kružnicu k , a S polovište dužine $\overline{BC}$. Dokazat ćemo da se točka T također nalazi i na pravcu MN .

Budući da je četverokut $BMCN$ paralelogram, dovoljno nam je pokazati da se točka T nalazi na pravcu MS .



Uočimo da je četverokut $CSTO$ tetivan jer je

$$\sphericalangle CTO = \sphericalangle CSO = 90^\circ.$$

Iz te tetivnosti posebno imamo da je

$$\sphericalangle STC = \sphericalangle SOC = \alpha.$$

Neka je M' sjecište pravaca BD i ST .

Kako je

$$\sphericalangle M'TC = \alpha = \sphericalangle M'BC$$

slijedi da je četverokut $BM'CT$ tetivan.

Iz gornje tetivnosti sada redom imamo

$$\sphericalangle BCM' = \sphericalangle BTM' = 180^\circ - \sphericalangle M'TC - \sphericalangle DTB = \beta.$$

Konačno, kako je

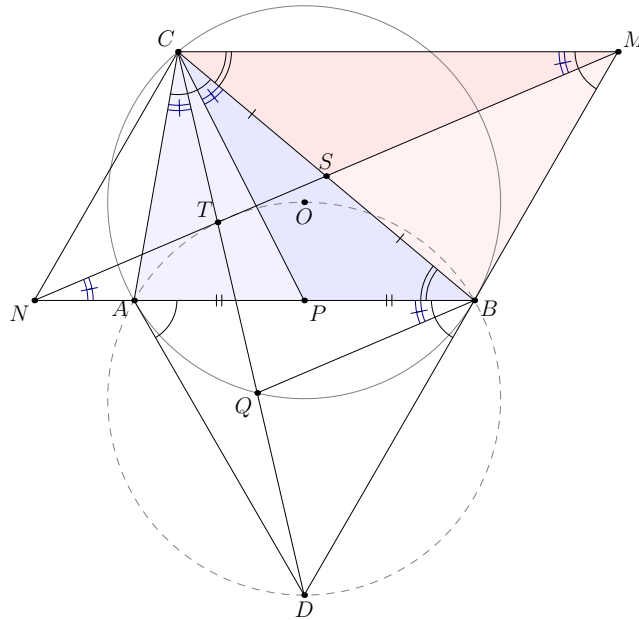
$$\sphericalangle BCM' = \beta = \sphericalangle CBA,$$

slijedi da je CM' paralelno s AB , tj. $M' = M$.

Dakle, točke S , T i M su kolinearne što smo i htjeli dokazati.

Drugo rješenje.

Neka je T presjek pravaca MN i CD , a Q drugo sjecište CD sa opisanom kružnicom trokuta ABC . Kako bismo pokazali da točka T leži na k dovoljno je pokazati da je točka T polovište segmenta $\overline{CQ}$. Tada je, naime, pravac OT okomit na CQ u točki T pa je $\angle DTO = 90^\circ$, odakle slijedi da T leži na kružnici s promjerom $\overline{OD}$.



Neka su P i S redom polovišta stranica AB i BC . Kako je $\overline{BC}$ dijagonala paralelograma $BMCN$ to je S sjecište dijagonala $\overline{BC}$ i $\overline{MN}$ te ujedno i polovište dijagonale $\overline{MN}$. Dakle, N, T, S i M su kolinearne točke.

Pokažimo sada da je $\overline{TS}$ srednjica u trokutu CQB , to jest da je pravac MN paralelan sa pravcem QB . Kako je pravac NB paralelan sa MC vrijedi

$$\angle BNM = \angle CMN = \angle CMS \quad (1)$$

Kako je $\overline{OD}$ promjer kružnice k , to je $\angle DAO = \angle OBD = 90^\circ$. Odakle slijedi da je D presjek tangenata na opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama A i B . Po teoremu o tetivi i tangenti je sada $\angle ACB = \angle ABD$. Koristeći paralelnosti pravaca NB i MC dobivamo da je

$$\angle ABD = \angle CMB \quad \text{i} \quad \angle CBN = \angle BCM,$$

odakle slijedi da su trokuti ABC i BCM slični. Posebno kako je P polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC i S polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta BCM imamo

$$\angle CMS = \angle PCB. \quad (2)$$

Budući da je D presjek tangenata na opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama A i B , imamo da je pravac CD jedna od simedijana trokuta. Dakle CD i CP su izogonalne konjugate te vrijedi:

$$\angle PCB = \angle ACD = \angle ACQ. \quad (3)$$

Konačno, kako je Q na opisanoj kružnici trokuta ABC imamo jednakost obodnih kutova:

$$\sphericalangle ACQ = \sphericalangle ABQ = \sphericalangle NBQ. \quad (4)$$

Jednakosti kutova (1), (2), (3) i (4) zajedno daju $\sphericalangle BNM = \sphericalangle NBQ$, odakle slijedi da je pravac TS paralelan sa BQ . Time smo pokazali da je $\overline{TS}$ srednjica u trokutu CQB te da je T polovište segmenta $\overline{BQ}$.

Zadatak 3.

Odredi sve funkcije $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$f(x) + f(xf(y) + y) = f(x)f(y + 1) + f(y).$$

Prvo rješenje.

Direktnom provjerom vidimo da su konstantne funkcije $f(x) = 1$ za $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x) = 0$ za $x \in \mathbb{Q}$ rješenja zadatka. Neka je f nekonstantna funkcija koja je rješenje zadatka.

Uvrštavanjem $(0, y)$ dobivamo $f(0)(f(y + 1) - 1) = 0$, pa je $f(0) = 0$.

Uvrštavanjem $(x, 0)$ dobivamo $f(x) = f(x)f(1)$, pa je $f(1) = 1$.

Uvrštavanjem $(x, 1)$ dobivamo

$$f(x + 1) = (f(2) - 1)f(x) + 1.$$

Ovu relaciju ćemo zvati $+1$ rekurzija.

Tvrdimo da je $f(2) \neq 1$. Zaista, ako je $f(2) = 1$, onda uvrštavanjem $x = -1$ u $+1$ rekurziju slijedi $f(0) = 1$, kontradikcija. Neka je $q = f(2) - 1$. Tvrdimo da je $q = 1$ ili $q = -1$.

Zaista, iz $+1$ rekurzije induktivno slijedi da je

$$f(n) = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1 \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da je $q \neq 1$ i $q \neq -1$. Uvrstimo paran prirodan broj $y > 1$, tako da je $f(y) > 0$, i uvrstimo prirodan broj $x > 1$ takav da je $xf(y)$ također prirodan broj. Tada iz početne jednadžbe slijedi

$$1 + q + \dots + q^{x-1} + 1 + q + \dots + 1 + q^{xf(y)+y-1} = (1 + q + \dots + q^{x-1})(1 + q + \dots + q^y) + 1 + q + \dots + q^{y-1}.$$

Ako neki prost broj p dijeli nazivnik od q i ako je $x - 1 \neq xf(y) + y - 1$, onda je v_p lijeve strane jednak $\max(x - 1, xf(y) + y - 1) \cdot v_p(q)$, jer je jedini član na lijevoj strani s minimalnom vrijednosti v_p upravo $q^{\max(x-1, xf(y)+y-1)}$.

S druge strane, član s minimalnom v_p na desnoj strani je q^{x+y-1} . Slijedi $x + y - 1 = \max(x - 1, xf(y) + y - 1)$. Međutim, to ne može vrijediti za beskonačno vrijednosti x , pa dobivamo kontradikciju. Dakle, q je cijeli broj.

Pretpostavimo sada da je $|q| > 1$. Tada promatranjem obje strane modulo q^2 dobivamo

$$1 + q + 1 + q \equiv (1 + q)(1 + q) + 1 + q \pmod{q^2},$$

iz čega slijedi $q \equiv 0 \pmod{q^2}$, kontradikcija. Dakle, $q = 1$ ili $q = -1$.

Slučaj $q = 1$.

U ovom slučaju iz $+1$ rekurzije slijedi $f(n) = n$ za svaki cijeli broj n i $f(x+1) = f(x) + 1$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$.

Uvrstimo $x = \frac{a}{b}$, $y = b$ za $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Dobivamo $f(\frac{a}{b}) + f(a+b) = f(\frac{a}{b})(b+1) + b$, iz čega slijedi $f(\frac{a}{b}) = \frac{f(a)}{b} = \frac{a}{b}$. Dakle, $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{Q}$. Lako se provjeri da je ta funkcija stvarno rješenje.

Slučaj $q = -1$.

U ovom slučaju iz $+1$ rekurzije slijedi $f(x) + f(x+1) = 1$, pa je $f(x+2) = f(x)$, te je $f(x) = 0$ za parne cijele brojeve x i $f(x) = 1$ za neparne cijele brojeve x .

Pretpostavimo da je $f(\frac{1}{2}) = 0$. Tada je $f(\frac{3}{2}) = 1 - f(\frac{1}{2}) = 1$. Uvrstimo $(x, \frac{3}{2})$ u početnu jednadžbu. Slijedi

$$f(x) + f\left(x + \frac{3}{2}\right) = f(x) f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 1,$$

jer je $f(\frac{5}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 0$. Međutim, kako je $f(x + \frac{3}{2}) = 1 - f(x + \frac{1}{2})$, slijedi $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$. Međutim, $f(\frac{1}{2}) \neq f(1)$ pa dobivamo kontradikciju. Dakle, $f(\frac{1}{2}) \neq 0$.

Neka je $f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{b}$ za relativno proste cijele brojeve a i b . Uvrstimo $(b, \frac{1}{2})$ u početnu jednadžbu. Slijedi

$$f(b) + f\left(a + \frac{1}{2}\right) = f(b) f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ako je b paran, onda je a neparan i $f(b) = 0$ i $f(a + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$, ali onda iz $+1$ rekurzije i neparnosti broja a slijedi $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2})$, odnosno $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Međutim, uvrštavanjem $(1, \frac{1}{2})$ u početnu jednadžbu dobivamo $1 + f(1) = 1$, što je kontradikcija. Dakle, b je neparan pa je $f(b) = 1$ i vrijedi

$$1 + f\left(a + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

odnosno $f(a + \frac{1}{2}) = 0$. Ako je a paran, dobivamo $f(\frac{1}{2}) = 0$, što je kontradikcija. Ako je a neparan, dobivamo $f(\frac{1}{2}) = 1$. Tada uvrštavanjem $(x, \frac{1}{2})$ slijedi $f(x) + f(x + \frac{1}{2}) = 1$, pa iz $+1$ rekurzije slijedi $f(x+1) = f(x + \frac{1}{2})$. Međutim, $f(0) \neq f(\frac{1}{2})$, pa opet dobivamo kontradikciju.

Kako smo iscrpili sve mogućnosti za $f(\frac{1}{2})$ i svaka vodi do kontradikcije, slijedi da u slučaju $q = -1$ nema rješenja.

Napomena: Moguće je dokazati da ako je u nultočka funkcije, vrijedi $f(x) = f(x+u)$ za sve x . Naime, uvrstimo $(x, u+1)$ u početnu jednadžbu. Iz $+1$ rekurzije znamo da je $f(u+1) = 1$ i $f(u+2) = f(2)$. Slijedi $f(x) + f(x+u+1) = f(x) f(2) + 1$. Korištenjem $+1$ rekurzije slijedi $f(x)(f(2)-1) + 1 = f(x+u+1)$, odnosno $f(x+1) = f(x+u+1)$. Dakle, svaka nultočka je period funkcije. Taj argument smo koristili u slučaju $q = 1$ kad je $f(\frac{1}{2})$ ili $f(\frac{3}{2})$ nultočka funkcije.

Drugo rješenje.

Tvrdimo da su sva rješenja $f(x) = x$ za sve racionalne x , $f(x) = 0$ za sve racionalne x te $f(x) = 1$ za sve racionalne x . Lako je provjeriti da ove tri funkcije uistinu jesu rješenja.

Prvo, možemo vidjeti da su jedina rješenja oblika $f(x) = c$ ona za koje je $c \in \{0, 1\}$ (jer mora vrijediti $2c = c^2 + c$). Nadalje, uzmimo da je f nekonstantna.

Uvrštavanjem $(0, y - 1)$ imamo $f(0) = f(0)f(y)$ za sve $y \in \mathbb{Q}$ pa je $f(0) = 0$ (zbog nekonstantnosti) a uvrštavanjem $(x, 0)$ dobivamo $f(x) = f(x)f(1)$ pa je $f(1) = 1$ (opet zbog nekonstantnosti).

Uvrstimo li sada $(x, 1)$ uz oznaku $C = f(2) - 1$ imamo

$$f(x + 1) = Cf(x) + 1$$

za sve x u domeni. Uvrštavanje $x = 0$ u ovu jednadžbu nam sada daje $f(-1) = -\frac{1}{C}$ (a usput i $C \neq 0$).

Sada želimo dokazati da mora vrijediti $|C| = 1$, tako da pretpostavimo suprotno. Indukcijom (iz x u $x + 1$ te iz x u $x - 1$) možemo dobiti da vrijedi

$$f(n) = \frac{C^n - 1}{C - 1}$$

za sve cijele brojeve n .

Takoder, vraćanjem izraza za $f(x + 1)$ u početnu jednadžbu, imamo

$$\begin{aligned} f(x) + f(xf(y) + y) &= f(x)f(y + 1) + f(y) \\ &= Cf(x)f(y) + f(x) + f(y) \\ &= f(y)(Cf(x) + 1) + f(x) \\ &= f(y)f(x + 1) + f(x) \end{aligned}$$

što nam daje $f(xf(y) + y) = f(x + 1)f(y)$, te ćemo sva daljnja uvrštavanja raditi ovdje.

Uvrštavanje $(kx, 2)$ gdje je k proizvoljan, a x višekratnik nazivnika od $C + 1$ nam daje

$$\begin{aligned} f(kx(C + 1) + 2) &= f(kx + 1)(C + 1) \\ C^{kx(C+1)+2} - 1 &= (C^{kx+1} - 1)(C + 1) \end{aligned}$$

za svaki cijeli broj k . Sada možemo rastaviti na slučajeve.

Ako je $|C| < 1$, puštanjem limesa kako k ide u beskonačnost dobivamo $-1 = -(C + 1)$ pa $C = 0$ što smo već isključili.

Ako je pak $C < -1$, imamo

$$\frac{C^{kx(C+1)+2} - 1}{C^{kx+1} - 1} = C + 1$$

ali puštanje k u beskonačnost sada daje $C + 1 = 0$ (jer je brojnik lijeve strane eksponencijalna funkcija sa negativnim argumentom, a nazivnik sa pozitivnim, pa apsolutna vrijednost brojnika konvergira u -1 dok nazivnika u beskonačnost) pa $C = -1$, kontradikcija.

Konačno, ako je $C > 1$ imamo

$$\frac{C^{kx(C+1)} - 1/C^{kx+1}}{1 - 1/C^{kx+1}} = \frac{C^{kx(C+1)+2} - 1}{C^{kx+1} - 1} = C + 1$$

te puštanje k u beskonačnost nam daje $\infty = C + 1$, kontradikcija.

Sada nam preostaju slučajevi $C \in \{-1, 1\}$.

Kada je $C = 1$, imamo $f(n) = n$ za sve cijele n te vrijedi i

$$f(xf(y) + y) = (f(x) + 1)f(y).$$

Uvrštavanje $x = \frac{p}{q}, y = q$ za $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ daje

$$f\left(\frac{p}{q}f(q) + q\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)f(q) + f(q) \iff p + q = qf\left(\frac{p}{q}\right) + q$$

pa je $f(p/q) = p/q$ tj. $f(x) = x$ za sve racionalne x i gotovi smo.

Ako je $C = -1$, induktivno dobivamo da $f(n)$ na cijelim brojevima iznosi 0 ako je n paran, a 1 ako je neparan, a jednačba nam se pretvara u

$$f(xf(y) + y) = (1 - f(x))f(y).$$

Podijelimo skup $\mathbb{Q}$ na *lance* brojeva gdje su dva broja u istom lancu ako im je razlika cijeli broj. Tada zbog

$$f(x + 1) = 1 - f(x)$$

imamo da funkcija f na svakom lancu ili poprima točno dvije različite vrijednosti koje se izmjenjuju, ili iznosi $\frac{1}{2}$ na cijelom lancu. Na lancu cijelih brojeva, na primjer, izmjenjuju se vrijednosti 0 i 1.

Promotrimo sada neki lanac L racionalnih brojeva na kojem vrijednost f nije $\frac{1}{2}$. Primijetimo da tada za $x, y \in L$ imamo $f(x) = f(y)$ ako i samo ako je $x - y = 2k$ za neki cijeli broj k .

Uzmimo $y \in L$ te x takav da je $2x$ višekratnik nazivnika od $f(y)$ (to jest, $2xf(y)$ je cijeli broj). Uvrštavanjem $(2x, y)$ u jednačbu dobivamo

$$f(y + 2xf(y)) = f(y)$$

pa je $2xf(y)$ nužno paran broj. Iz ovoga vidimo da najmanji nazivnik od $f(y)$ (nazovimo ga q) mora biti neparan, jer bismo inače mogli uvrstiti $x = q/2$ i $2xf(y)$ bi bio neparan. Uvrstimo li sada (q, y) imamo da je $f(y + qf(y)) = 0$ pa je slika tog lanca nužno upravo $\{0, 1\}$.

Prema tome, imamo da funkcija može poprimati samo vrijednosti $0, 1, \frac{1}{2}$. Promotrimo sada $f(\frac{1}{2})$. Uvrstimo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i dobivamo

$$f\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Ako je $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, isto vrijedi i za $f(\frac{3}{2})$ pa je iz izraza gore $\frac{1}{4}$ u slici f što ne vrijedi.

Ako je $f(\frac{1}{2}) = 1$, izraz gore daje $f(1) = 0$, što također ne vrijedi.

Prema tome, preostaje jedino da je $f(\frac{1}{2}) = 0$. Tada je nužno $f(\frac{3}{2}) = 1$ te uvrštavanjem $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ imamo $f(3) = 0$ što je opet kontradikcija, pa u ovom slučaju rješenja nema.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Treći dan

Zagreb, 16. svibnja 2026.

Zadatak 1.

Na ploči dimenzija 6×6 žaba skače paralelno s rubovima ploče naizmjenice za jedno ili dva polja. U prvom skoku skače za jedno polje.

Postoji li polje ploče takvo da žaba, počevši skakati s tog polja, može u 35 skokova obići sva polja ploče i pritom stati na svako polje točno jednom?

Rješenje.

Pretpostavimo da odgovarajući niz postoji i označimo polja ploče kao na slici.

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

Skokovi duljine 1 prelaze s neparnog broja na paran i obratno. Skokovi duljine 2 prelaze s parnog broja na različit paran broj ili s neparnog broja na različit neparan broj. Ako s

$$P_1, P_2, \dots, P_{36}$$

označimo brojeve posjećenih polja, tada slijedi da se među

$$P_2, P_3, P_4, P_5$$

svaki broj od 1 do 4 pojavljuje točno jednom. Naime, P_2 i P_3 različiti su brojevi iste parnosti, a isto vrijedi za P_4 i P_5 , samo je parnost suprotna. Iz istog razloga, za svaki

$$k \in \{0, 1, \dots, 7\},$$

među brojevima

$$P_{4k+2}, P_{4k+3}, P_{4k+4}, P_{4k+5}$$

pojavljuje se svaki od četiriju brojeva. Dakle, među brojevima

$$P_2, P_3, \dots, P_{33}$$

svaki od brojeva od 1 do 4 pojavljuje se točno osam puta.

Broj 4 nalazi se na ploči točno osam puta, pa nijedan od

$$P_1, P_{34}, P_{35}, P_{36}$$

ne može biti 4. Brojevi P_{34} i P_{35} iste su parnosti i različiti su, jer su udaljeni za skok duljine 2. Budući da broj 4 nije među njima, oba moraju biti neparna. Tada P_{36} mora biti paran, a isto tako i P_1 . Zato P_1 mora biti broj 2. Početno polje stoga mora biti jedno od obojenih polja na lijevoj ploči.

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2

Argumente možemo ponoviti za numeraciju desne ploče, koja je dobivena rotacijom lijeve. Budući da nijedno polje nema broj 2 u objema numeracijama, dolazimo do kontradikcije. Dakle, početno polje ne može se odabrati na željeni način.

Zadatak 2.

Za pozitivni realni broj c , funkcija $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je c -mala ako za sve prirodne brojeve x i y vrijedi

$$f(x, y) \leq x^c + y^c.$$

Odredi sve pozitivne realne brojeve c takve da za svaku c -malu funkciju f postoji 2026 različitih parova prirodnih brojeva (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 2026$ takvih da je

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \dots = f(x_{2026}, y_{2026}).$$

Rješenje.

Tvrdimo da je odgovor $c < 2$.

Pokažimo prvo da $c \geq 2$ ne zadovoljavaju uvjet zadatka. Ako je

$$f(x, y) = \max(x, y)^2 + \min(x, y),$$

onda vrijedi

$$f(x, y) \leq \max(x, y)^2 + \min(x, y)^2 = x^2 + y^2 \leq x^c + y^c.$$

Očito vrijedi $f(x, y) = f(y, x)$. Ako je $f(x, y) = x^2 + y = n$ za neki $x \geq y$, onda vrijedi

$$x^2 < n = x^2 + y \leq x^2 + x,$$

pa je $x < \sqrt{n} \leq \sqrt{x^2 + x} < x + 1$ te mora vrijediti $x = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ i $y = n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$, pa f poprima vrijednost n točno dva puta.

S druge strane, za $c < 2$ prema svojstvu $f(x, y) \leq x^c + y^c$ za svaki $N \in \mathbb{N}$ na skupu

$$S_N = \{(x, y) \mid 1 \leq x, y \leq N\}$$

vrijedi $f(x, y) \leq x^c + y^c \leq 2N^c$, te funkcija poprima vrijednosti manje ili jednake $\lfloor 2N^c \rfloor$ (kojih je manje od $2N^c$). Međutim, imamo $|S_N| = N^2$, pa funkcija poprima neku vrijednost barem $\frac{N^2}{2N^c} = \frac{1}{2}N^{2-c}$ puta, što je za N takve da

$$\frac{1}{2}N^{2-c} \geq 2026 \iff N \geq (4052)^{\frac{1}{2-c}},$$

veće od 2026, pa za takav c svaka c -mala funkcija zadovoljava uvjet iz zadatka.

Napomena: Uzmemo li

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y, & \text{za } x \geq y \\ y^2 - x, & \text{inače} \end{cases}$$

imamo čak i injekciju u slučaju $c \geq 2$.

Zadatak 3.

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC i D njezino diralište sa stranicom $\overline{BC}$. Pravac AD siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama A i E . Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$, a N polovište luka opisane kružnice trokuta ABC nad tetivom $\overline{BC}$ koji sadrži točku A . Točka P sjecište je dužine $\overline{EN}$ i opisane kružnice trokuta BIC .

Dokaži da je $\angle IPM$ pravi kut.

Rješenje.

$\overline{II_A}$ je promjer kružnice opisane trokutu BIC pa je dovoljno dokazati da su točke I_A , M i P kolinearne. Za to, dovoljno je da se pravci $I_A M$ i EN sijeku na kružnici opisanoj trokutu BIC .

Neka je S polovište luka BC opisane kružnice trokuta ABC koji ne sadrži A . Lema o trozupcu nam govori da je S polovište dužine $\overline{II_A}$.

Neka je U presjek pravaca ID i EN . Dokažimo da točka U leži na kružnici opisanoj trokutu BIC . Jer je $ID \parallel MN$, imamo

$$\angle EAS = \angle ENS = \angle EUI$$

pa je četverokut $EUAI$ tetivan. Sada potencija točke D na kružnicu opisanu četverokutu $EUAI$ daje

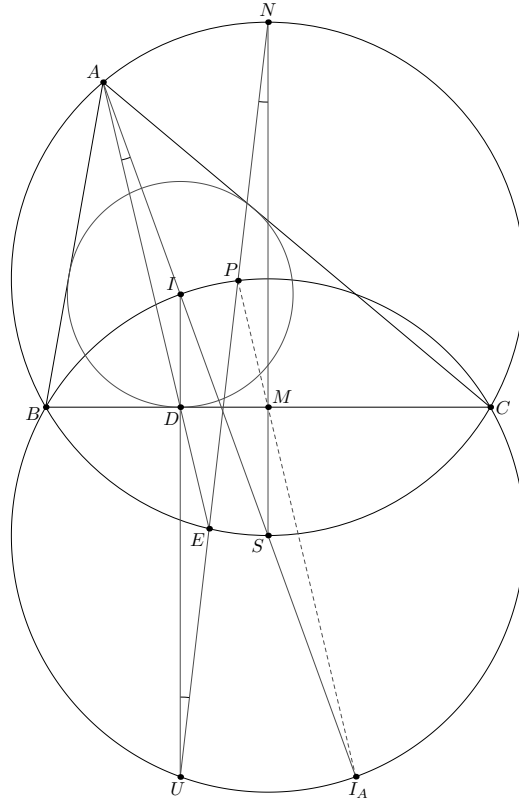
$$|DI| \cdot |DU| = |DA| \cdot |DE| = |DB| \cdot |DC|$$

pa je četverokut $IUBC$ također tetivan, to jest, U nalazi na kružnici opisanoj trokutu BIC .

Neka je P^* drugi presjek pravaca $I_A M$ i kružnice opisane trokutu BIC . Potencija točke M na tu kružnicu daje

$$|MP^*| \cdot |MI_A| = |MB| \cdot |MC| = |MS| \cdot |MN|$$

pa je P^* na kružnici opisanoj trokutu $I_A S N$.



Naposljetku, kružnice (P^*SI_AN) i (BIC) se sijeku u točkama P^* i I_A . Primjena Reimovog teorema na pravce P^*N i I_AS daje da vrijedi

$$NS \parallel IU'$$

gdje je $U' := P^*N \cap (BIC)$. Sada je jasno da je $U' \equiv U$ pa su točke U , P^* i N kolinearne. Konkretnije, točka P^* se nalazi na pravcu $NU \equiv EN$ zbog čega je $P^* \equiv P$, odnosno, točka P je na pravcu I_AM , kao što je i trebalo dokazati.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Četvrti dan

Zagreb, 17. svibnja 2026.

Zadatak 1.

Neka su a, b, c i d nenegativni realni brojevi za koje vrijedi $ab + bc + cd = ad$ i $a + b + c + d \neq 0$. Odredi najveću moguću vrijednost izraza

$$\frac{ab + 2cd}{(a + b + c + d)^2}.$$

Rješenje.

Primijetimo da je uvjet ekvivalentan (dodajući ad na obje strane) sa $(a + c)(b + d) = 2ad$. Kako imamo $(a + b + c + d)^2 \geq 4(a + c)(b + d) = 8ad$, primijenjujući to na izraz iz zadatka dobivamo

$$\frac{ab + 2cd}{(a + b + c + d)^2} \leq \frac{ab + 2cd}{8ad} = \frac{1}{8} \left(\frac{b}{d} + 2 \cdot \frac{c}{a} \right).$$

Ako sada uzmemo $u = \frac{b}{d}$, $v = \frac{c}{a}$, preostaje naći maksimum od $u + 2v$ uz uvjet $(u + 1)(v + 1) = 2$. Znamo da $u, v \geq 0$ pa iz uvjeta imamo i $u, v \leq 1$. Možemo izraziti

$$u + 2v = (u + 1) + 2(v + 1) - 3 = \frac{2}{v + 1} + 2(v + 1) - 3 = 2 \left((v + 1) + \frac{1}{v + 1} \right) - 3$$

pa tražimo maksimalnu vrijednost funkcije $f(x) = x + \frac{1}{x}$ za $x = v + 1 \in [1, 2]$.

Za $2 \geq x > y \geq 1$ zbog $xy \geq 1$ vrijedi

$$f(x) - f(y) = (x - y) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) = (x - y) \left(1 - \frac{1}{xy} \right) \geq 0$$

pa je f rastuća i imamo $u + 2v \leq 2f(2) - 3 = 5 - 3 = 2$.

Konačno, imamo

$$\frac{ab + 2cd}{(a + b + c + d)^2} \leq \frac{1}{8} (u + 2v) \leq \frac{1}{4}.$$

Pokažimo da se postiže i jednakost. Tada mora vrijediti $(u, v) = (0, 1)$ pa moramo imati $b = 0, c = a$, a mora vrijediti i $a + c = b + d$ što daje $d = 2a$. Uvrstimo li $(a, 0, a, 2a)$ dobivamo

$$\frac{ab + 2cd}{(a + b + c + d)^2} = \frac{4a^2}{(4a)^2} = \frac{1}{4}$$

i gotovi smo.

Zadatak 2.

Neka je p prost broj veći od 2. Na ploči je napisan prirodni broj veći od 2. U svakom potezu bira se par (a, b) prirodnih brojeva takav da je broj $a^2 + b$ jednak broju zapisanom na ploči, te se broj na ploči zamijeni brojem $a + b^2$.

Dokaži da se, neovisno o tome koji je broj napisan na početku, konačnim nizom takvih poteza može postići da broj na ploči bude djeljiv brojem p .

Rješenje.

Primijetimo da uvijek možemo napraviti potez sa $a = 1$. Tada se broj N s ploče zamijeni brojem $1 + (N - 1)^2$, što je strogo veći broj od N . Zbog toga možemo postići da trenutni broj na ploči bude proizvoljno velik u odnosu na p . Nadalje, ako je broj na ploči veći od $2p^2$, uvijek možemo izabrati par (a, b) tako da je $a \leq p$, pa je $a^2 + b < a + b^2$. Dakle, ako je broj na ploči dovoljno velik, možemo izabrati bilo koju od p vrijednosti za a modulo p . Stoga, operacije možemo promatrati modulo p , a pitanje reformulirati na sljedeći način.

Neka je $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}$ skup ostataka modulo p na kojem vršimo operacije zbrajanja i množenja modulo p . Promatramo graf kojem su vrhovi elementi skupa $\mathbb{F}_p$, te za sve $a, b \in \mathbb{F}_p$ postoji (neusmjereni) brid između $a^2 + b$ i $a + b^2$. Treba dokazati da je taj graf povezan.

Uočimo da za svaka dva elementa $a, b \in \mathbb{F}_p$ postoji niz bridova od $a^2 + b$ do $a^2 - b$ preko $a + b^2$. To znači da se svaka dva vrha $x, y \in \mathbb{F}_p$ takva da $x + y = 2a^2$ za neki $a \in \mathbb{F}_p$ nalaze u istoj komponenti povezanosti promatranog grafa. Drugim riječima, x se nalazi u istoj komponenti kao $2a^2 - x$ za svaki $a \in \mathbb{F}_p$. Iz toga pak slijedi da se, za sve $a, a' \in \mathbb{F}_p$, vrhovi

$$x \quad \text{i} \quad 2a'^2 - (2a^2 - x) = x + 2(a'^2 - a^2)$$

nalaze u istoj komponenti povezanosti. No, poznata je činjenica da se svaki ostatak modulo p može napisati kao razlika dva kvadrata modulo p . Na primjer, uzimanjem $a' = a + 1$ posebno dobivamo da se x i $x + 4a + 2$ nalaze u istoj komponenti povezanosti. Budući da a može poprimiti bilo koju vrijednost iz $\mathbb{F}_p$, $4a + 2$ postiže sve ostatke modulo p , pa slijedi tvrdnja.

Zadatak 3.

U nekoj državi, neke su zračne luke međusobno povezane direktnim letovima tako da se iz svake zračne luke može nizom letova doći u bilo koju drugu zračnu luku. Kažemo da je zračna luka *bitna* ako bi nakon njenog zatvaranja (tj. ukidanja svih letova koje povezuju tu zračnu luku s ostalima) postojale neke druge dvije zračne luke koje nisu povezane nizom letova. Pretpostavimo da nikoje dvije bitne zračne luke nisu povezane direktnim letom te da postoji $n \geq 3$ zračnih luka koje nisu bitne.

U ovisnosti o broju n , odredi najveći mogući broj bitnih zračnih luka u toj državi.

Prvo rješenje.

Tvrdimo da je odgovor $n - 2$.

Na početku sve zračne luke čine povezanu mrežu, te ćemo promatrati broj različitih podskupova luka koje ostaju povezane kako zatvaramo pojedinu bitnu zračnu luku. Podskup svih zračnih luka koje se u nekom trenutku mogu povezati nekim nizom preostalih linija nazivamo komponentom povezanosti.

Neka su $u_1, \dots, u_r$ bitne zračne luke zapisane bilo kojim redom. Zatvaranjem tih luka redom u svakom koraku dobivamo barem jednu komponentu povezanosti više nego u prethodnom koraku. Stoga je broj komponenti povezanosti nakon zatvaranja svih bitnih luka barem $r + 1$.

Ukupan broj komponenti ne može biti veći od n jer nakon zatvaranja svih bitnih zračnih luka preostaju samo nebitne zračne luke, te je najveći broj komponenti onda kad nikoje dvije nebitne zračne luke nisu povezane direktnom linijom.

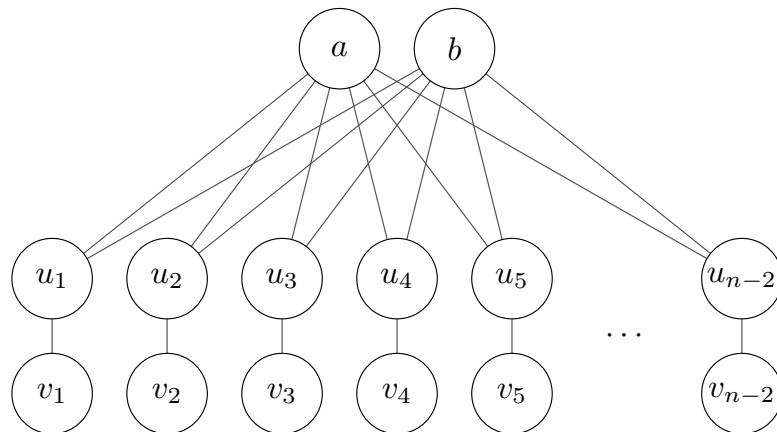
Pokažimo da je svaka bitna zračna luka povezana s barem tri druge luke. Svaka bitna zračna luka povezana je s barem dvije druge zračne luke. Pretpostavimo da je bitna luka u povezana samo s lukama a i b koji pripadaju različitim komponentama povezanosti nakon zatvaranja luke u . Tada će a ili b pripadati komponenti koja ima barem dvije luke (jer ukupno imamo barem četiri luke zbog $n \geq 3$) i ta zračna luka će biti bitna, što je kontradikcija s pretpostavkom da bitne luke nisu direktno povezane.

Ako bismo pretpostavili da u svakom koraku zatvaranjem bitne luke u_i (za $i = 1, \dots, r$) razdvajamo točno jednu komponentu na dvije, onda će, zbog činjenice da je luka u_i povezana s barem tri luke, jedna od tih novonastalih komponenti imati barem dvije luke. Dakle, ili ćemo zatvaranjem neke bitne luke broj komponenti povećati za dvije, što znači da je broj komponenti barem $r + 2$ ili će pri svakom zatvaranju preostati barem jedna komponenta s barem dvije luke, pa će na kraju najveći broj komponenti biti $n - 1$. U oba slučaja slijedi $r \leq n - 2$.

Primjer konstruiramo tako da zračne luke označimo

$$\{a, b\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_{n-2}\}$$

i povežemo ih tako da postoji direktna linija između parova zračnih luka (u_i, v_i) te (a, u_i) i (b, u_i) za sve $1 \leq i \leq n - 2$.



Uistinu, nikoja od zračnih luka v_i nije bitna (jer ima samo jednu liniju) a isto vrijedi i za luke a, b , dok su sve luke u_i bitne.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju konstruiramo primjer s $n - 2$ bitne zračne luke. Neka je G graf u koje su zračne luke vrhovi, a letovi bridovi.

Za vrhove a, b grafa G pišemo $a \sim b$ ako uklanjanjem najviše jednog vrha (različitog od a i b) iz grafa nije moguće postići da su a i b u različitim komponentama povezanosti grafa kojeg dobijemo (tj. da ne postoji put od a do b u ostatku grafa).

Primijetimo, ako vrijedi $a \sim b$ i $b \sim c$, onda također mora vrijediti i $a \sim c$ (jer možemo spojiti put od a do b i put od b do c kako bismo dobili put od a do c). Također, vrijedi $a \sim b$ ako i samo ako $b \sim a$. Stoga, skup nebitnih vrhova možemo podijeliti na k skupova vrhova $K_1, K_2, \dots, K_k$ takvih da je $a \sim b$ ako i samo ako su $a, b \in K_i$ za neki $1 \leq i \leq k$.

Neka je $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_k\}$, i neka je B skup bitnih vrhova grafa G . Želimo pokazati da vrijedi $|B| \leq k - 1$, te da postoji barem jedan $K_i \in \mathcal{K}$ za koji vrijedi $|K_i| \geq 2$.

Uvodimo graf H čiji skup vrhova je $\mathcal{K} \cup B$, a bridovi su dani parovima $(K_i, b) \in \mathcal{K} \times B$ takvim da b ima barem jednog susjeda u K_i . Primijetimo da je H bipartitan graf (s jedne strane su svi vrhovi iz $\mathcal{K}$, a s druge svi iz B). Cilj nam je pokazati da je graf H stablo.

Pokažimo prvo da je graf H povezan. Dovoljno je pokazati da postoji put iz bilo kojeg vrha $K \in \mathcal{K}$ do bilo kojeg vrha $b \in B$. Uzmemo li neki $v \in K$, znamo da postoji put P iz v u b u grafu G . Kako nikada dva vrha u B nisu susjedna u grafu G , ne postoje dva susjedna bitna vrha na P . Susjedni nebitni vrhovi na P se moraju nalaziti u istoj komponenti K_i , jer postoji put između njih sačinjen isključivo od vrhova čije uklanjanje ostavlja G povezanim, pa ih je nemoguće učiniti odvojenima uklanjanjem jednoga vrha. Međutim, tada lako nađemo put u H koji povezuje b i K , jer možemo uzeti sve bitne vrhove na P i sve skupove K_i kroz koje P prolazi i poredati ih redom kojim se pojavljuju na P te time dobiti put u H , te je H povezan kao što smo željeli.

Nadalje, pretpostavimo da imamo ciklus u H , te promotrimo neke K_i, K_j sa $i \neq j$ koji su u tom ciklusu. Po definiciji K_i , postoji neki vrh v (nužno iz B , jer ostali vrhovi ne remete povezanost svojim uklanjanjem) takav da nakon uklanjanja v iz G ne postoji put iz nekog u K_i u neki vrh iz K_j u G . Kako smo uklonili samo jedan vrh, postoji put $K_i, b_1, \dots, b_\ell, K_j$ u ciklusu iz kojega nismo uklonili niti jedan $b \in B$. Sada možemo naći put iz bilo kojeg vrha K_i , prvo do nekog susjeda b_1 , pa u b_1 , pa do nekog susjeda b_2 i tako dalje (gdje šetnje unutar K_x pronalazimo jer smo uklonili samo jedan vrh) sve do bilo kojeg vrha K_j . Međutim, time smo pokazali da uklanjanjem nekog vrha ne možemo odvojiti vrhove K_i i K_j pa mora biti $K_i = K_j$, kontradikcija. Prema tome, graf H je stablo.

Promotrimo neki list grafa H (tj. vrh koji ima samo jednog susjeda u H). Ako bi taj list bio oblika $b \in B$, neka je $K \in \mathcal{K}$ njegov jedinstveni susjed. Uklanjanjem b bismo mogli naći put u G od bilo kojeg vrha K do bilo kojeg drugog (po definiciji K), a svaki drugi put između neka dva vrha u G , ako je prolazio kroz b , mora i prije i poslije b prolaziti kroz K , pa uklanjanje vrha b graf ne može učiniti nepovezanim. Prema tome, samo elementi $\mathcal{K}$ mogu biti listovi.

Na grafu H vršimo sljedeći algoritam. Dok god možemo, u svakom koraku uklonimo proizvoljan list i njegovog jedinstvenog susjeda. U prvom koraku, svi listovi su iz $\mathcal{K}$, pa svaki novi list stvoren ovim postupkom također mora biti iz $\mathcal{K}$. Kako u svakom trenutku umanjujemo stupanj nekog vrha najviše za 1, te postupak možemo vršiti dok god postoji barem jedan vrh stupnja barem 1, zaključujemo da na kraju dobivamo skup izoliranih vrhova (tj. vrhova bez susjeda). Svakom od tih vrhova je u nekom trenutku stupanj iznosio točno 1, pa su nužno svi iz $\mathcal{K}$. Taj

skup je ujedno i neprazan (jer u suprotnom zadnje uklanjanje uklanja dva vrha stupnja 1 a takvi ni u kojem trenu ne mogu biti povezani). Kako u svakom koraku postupka uklanjamo jedan vrh iz $\mathcal{K}$ i jedan iz B vrijedi $|B| < k$.

Pokažimo da postoji neki $K \in \mathcal{K}$ takav da je $|K| \geq 2$. Ako pretpostavimo da takav ne postoji, ali postoji K koji nije list u H , uklanjanje $v \in K$ čini G nepovezanim (jer čini H nepovezanim), što je kontradikcija jer je v nebitan. U suprotnom, postoji najviše jedan vrh u B , pa tvrdnja zadatka trivijalno vrijedi.

Sada slijedi

$$|B| \leq k - 1 \leq \sum_{i=1}^k |K_i| - 2 = n - 2,$$

što smo i željeli pokazati.