

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 18. svibnja 2026.

Zadatak 1.

Neka su x , y i z realni brojevi različiti od 0 takvi da vrijedi

$$x + y + z = 3$$

$$x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + y^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = -3.$$

Odredi vrijednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$.

Prvo rješenje.

Iz prve jednadžbe dobivamo $x + y = 3 - z$, $y + z = 3 - x$ i $z + x = 3 - y$. Svođenjem na zajedničke nazivnike razlomke u zagradama u drugoj jednadžbi, te množenjem s xyz dobivamo

$$x^2(z + y) + y^2(x + z) + z^2(y + x) = -3xyz.$$

Množenjem, pa grupiranjem izraza koji sadrže iste varijable (primjerice x^2y i xy^2) dobivamo

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = -3xyz$$

$$xy(3 - z) + yz(3 - x) + zx(3 - y) = -3xyz,$$

iz čega slijedi $xy + yz + zx = 0$.

Sada iz identiteta $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ dobivamo $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 = 9$.

Drugo rješenje.

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo:

$$x + y + z + x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + y^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 0.$$

Primijetimo da vrijedi $x + x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = x^2 \cdot \frac{1}{x} + x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, te analogno za druge varijable. Stoga prethodna jednakost postaje

$$x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + y^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 0,$$
$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 0.$$

Izraz $x^2 + y^2 + z^2$ nije jednak 0 jer su x , y i z različiti od 0. Stoga iz prethodne jednakosti slijedi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Iz toga dobivamo $xy + yz + zx = 0$.

Kao u prvom rješenju sada dobijemo $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 = 9$.

Zadatak 2.

Tin i Jan igraju igru na pravilnom mnogokutu $A_1A_2 \dots A_n$ s n vrhova, za prirodni broj $n \geq 3$. Na početku Tin postavlja žeton na neki vrh različit od A_1 . U svakom potezu Jan bira prirodni broj $k < n$, a zatim Tin pomiče žeton u jednom ili drugom smjeru za točno k vrhova. Jan pobjeđuje ako Tin pomakne žeton na vrh A_1 .

Odredi sve prirodne brojeve n za koje Jan uvijek može pobijediti bez obzira na to kako Tin bira svoje poteze.

Prvo rješenje.

Vrhove mnogokuta označimo brojevima $0, 1, \dots, n-1$, pri čemu vrh A_1 označavamo brojem 0, a sve položaje računamo modulo n . Prvo ćemo *razmišljanjem unatrag* promotriti na koji način Jan može natjerati Tina da pomakne žeton u položaj 0.

Ako je n paran broj, a žeton se nalazi u položaju $\frac{n}{2}$ i Jan odabere $k = \frac{n}{2}$, tada Tin mora postaviti žeton u položaj 0 u sljedećem potezu bez obzira koji smjer odabrao.

Nadalje, ako je n djeljiv brojem 4, a žeton se nalazi u položaju $\frac{n}{4}$ ili $\frac{3n}{4}$, Jan bira $k = \frac{n}{4}$ i Tin će u sljedećem potezu postaviti žeton u položaj 0 ili $\frac{n}{2}$, a u najviše dva poteza će morati postaviti žeton u položaj 0.

Slično, ako je n djeljiv brojem 8, a žeton se nalazi u položaju $\frac{n}{8}, \frac{3n}{8}, \frac{5n}{8}$ ili $\frac{7n}{8}$, Jan bira $k = \frac{n}{8}$ i Tin će u sljedećem potezu morati postaviti žeton u jedan od položaja $0, \frac{n}{4}, \frac{n}{2}$ ili $\frac{3n}{4}$. Dakle, ako se žeton nalazi u jednom od položaja $0, \frac{n}{8}, \frac{2n}{8}, \dots, \frac{7n}{8}$, Jan će pobijediti u najviše tri poteza.

Ovaj način razmišljanja možemo nastaviti sve dok god potencija 2^r dijeli broj n za neki prirodni broj r . Time smo objasnili da su $0, \frac{n}{2^r}, 2 \cdot \frac{n}{2^r}, \dots, (2^r - 1) \cdot \frac{n}{2^r}$ položaji iz kojih Jan može ishoditi pobjedu u najviše r poteza.

Zapišimo $n = 2^a \cdot m$, gdje je m neparan. Dakle, 2^a najveća je potencija broja 2 koja dijeli n .

Ako je $m = 1$, odnosno $n = 2^a$, onda su $0, \frac{n}{2^a}, 2 \cdot \frac{n}{2^a}, \dots, (2^a - 1) \cdot \frac{n}{2^a}$ svi položaji, pa Jan pobjeđuje bez obzira kako Tin bira svoje poteze.

Pokazat ćemo da za $m > 1$, odnosno ako n nije potencija broja 2, Tin može birati svoje poteze tako da Jan ne pobijedi.

Prvo uočimo da su brojevi $0, \frac{n}{2^a}, 2 \cdot \frac{n}{2^a}, \dots, (2^a - 1) \cdot \frac{n}{2^a}$ točno jednaki $0, m, 2m, \dots, (2^a - 1)m$, tj. to su točno svi položaji djeljivi s m .

Tin će u tom slučaju žeton staviti na bilo koji položaj koji nije djeljiv brojem m , npr. položaj 1, te će u svakom potezu moći odabrati smjer tako da žeton ostane u položaju koji nije djeljiv brojem m . Ako se žeton nalazi u položaju x , a Jan izabere broj k , Tin može pomaknuti žeton u jedan od položaja

$$x - k \quad \text{ili} \quad x + k \pmod{n}.$$

Želimo pokazati da ako x nije djeljiv s m , ne postoji prirodni broj $k < n$ takav da su $x - k$ i $x + k$ djeljivi s m .

Zaista, kada bi oba broja $x - k$ i $x + k$ bila djeljiva s m , tada bi i njihov zbroj $(x - k) + (x + k) = 2x$ bio djeljiv s m . Budući da je m neparan, brojevi 2 i m relativno su prosti, pa bi slijedilo $m \mid x$, što je suprotno pretpostavci.

Prema tome, Jan može uvijek pobijediti ako i samo ako je $n = 2^a$ za neki prirodni broj $a \geq 2$.

Napomena: Neki su učenici uočili da bi za dokaz da Jan ne može uvijek pobijediti trebalo biti dovoljno proučiti slučaj u kojem je broj vrhova neparan. Ta je ideja ispravna, ali treba precizno objasniti kako se igra na n vrhova povezuje s igrom na neparanom broju vrhova.

Neka je $n = 2^a \cdot m$, gdje je m neparan. U prethodnom smo rješenju dobili skup položaja

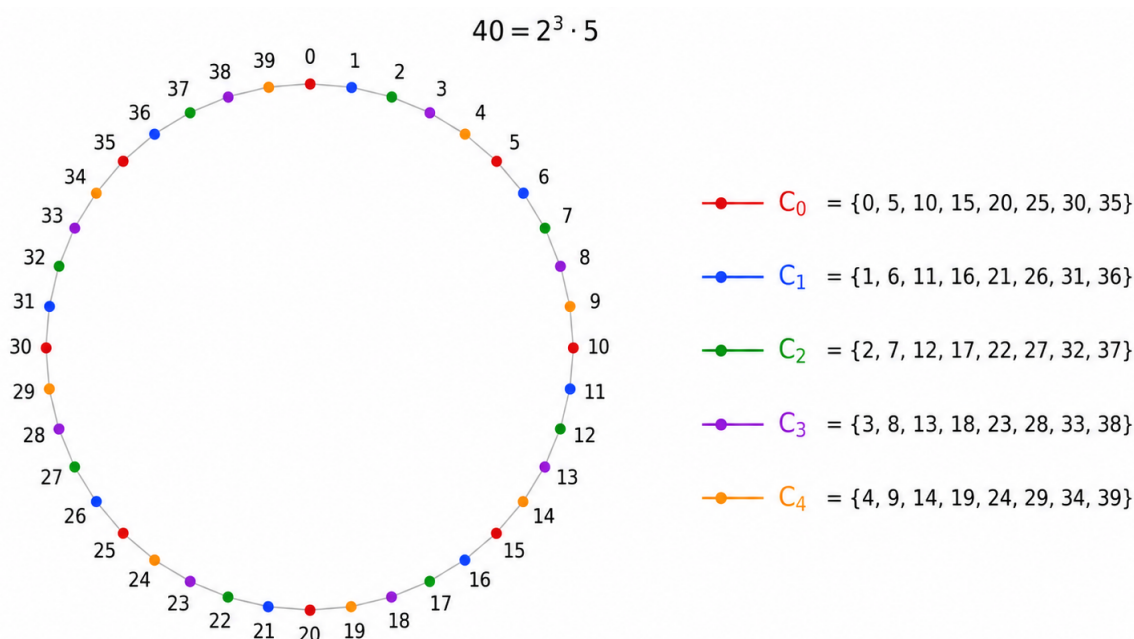
$$C_0 = \{0, m, 2m, \dots, (2^a - 1)m\}$$

iz kojih Jan može prisiliti pobjedu. To su upravo svi položaji djeljivi s m .

Sada sve vrhove podijelimo u m skupina prema ostatku pri dijeljenju s m . Za $j = 0, 1, \dots, m-1$ označimo

$$C_j = \{j, j + m, j + 2m, \dots, j + (2^a - 1)m\}.$$

Dakle, dva se vrha nalaze u istoj skupini ako njihovi brojevi daju isti ostatak pri dijeljenju s m . Svaka skupina sadrži 2^a vrhova. Vrhovi unutar iste skupine dobivaju se jedan iz drugoga rotacijama za m mjesta. Na crtežu je podjela na klase za $n = 40$.



Skupine $C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$ zamislimo kao vrhove pravilnoga m -terokuta, poredane tim redom.

Ako se žeton nalazi u skupini C_j , a Jan izabere broj k , neka je r ostatak broja k pri dijeljenju s m . Tada Tin, ovisno o odabranom smjeru, pomiče žeton u skupinu koja se nalazi r mjesta ispred ili r mjesta iza skupine C_j . Ako je $r = 0$, žeton ostaje u istoj skupini.

Na taj način, promatrajući samo skupinu u kojoj se žeton nalazi, dobivamo istu igru na pravilnom m -terokutu. Ciljna je skupina C_0 , jer ona sadrži vrh A_1 (položaj 0).

Tin na početku postavlja žeton izvan skupine C_0 . Na sažetom m -terokutu postoje dva puta od trenutačnoga položaja do C_0 . Ako su njihove duljine p i q , tada je $p + q = m$. Budući da je m neparan, vrijedi $p \neq q$.

Zato Jan jednim izborom broja ne može postići da oba smjera vode u C_0 : najviše jedan od dvaju smjerova može imati upravo onu duljinu koja vodi do C_0 . Tin uvijek bira drugi smjer.

Prema tome, žeton nikada ne ulazi u skupinu C_0 , pa osobito nikada ne dolazi na ciljni vrh A_1 .

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju vrhove mnogokuta označimo brojevima $0, 1, \dots, n-1$, pri čemu vrh A_1 označavamo brojem 0, a sve položaje računamo modulo n . Neka je $n = 2^a \cdot m$ za neparan broj m i nenegativni cijeli broj a . Najprije ćemo proučiti igru na neparnih m vrhova, a zatim pokazati kako se strategije prenose s mnogokuta s N vrhova na mnogokut s $2N$ vrhova.

Igra na neparnih m vrhova. Ako se žeton nalazi u položaju $x \neq 0$, od njega do položaja 0 možemo doći u dva smjera. Neka je u jednom smjeru potrebno prijeći p vrhova, a u drugom q vrhova. Tada je $p + q = m$. Budući da je m neparan, vrijedi $p \neq q$. Kako bi žeton došao u položaj 0, Jan bi morao izabrati broj p , a Tin krenuti u prvom smjeru, ili izabrati broj q , a Tin krenuti u drugom smjeru. Kako su p i q različiti, jedan Janov izbor ne može dovesti žeton u položaj 0 u oba smjera. Zato Tin uvijek može izabrati smjer kojim žeton ne dolazi u položaj 0. Dakle, na neparnom m -terokutu Jan može pobijediti samo iz položaja 0.

Pravilo udvostručavanja. Pretpostavimo da poznajemo igru na N vrhova, pri čemu je N višekratnik broja m , i da vrijedi:

- Jan može pobijediti iz svakoga položaja koji je višekratnik broja m ;
- iz svakoga ostalog položaja Tin može igrati tako da žeton uvijek ostane na položaju koji nije višekratnik broja m .

Pokazat ćemo da tada isto vrijedi i u igri na $2N$ vrhova.

U $2N$ -terokutu spojimo u parove nasuprotne vrhove x i $x + N$. Svaki takav par zamislimo kao jedan položaj. Tako dobivamo N parova, odnosno sažetu igru na N položaja. Budući da je N višekratnik broja m , dva vrha u istom paru ili su oba višekratnici broja m ili nijedan nije višekratnik broja m . Ako se žeton nalazi na vrhu x , njegov položaj u sažetoj igri određen je ostatkom broja x pri dijeljenju s N .

Neka Jan u $2N$ -terokutu izabere broj k i neka je r ostatak broja k pri dijeljenju s N . Tada se u sažetoj igri žeton pomiče za r položaja u jednom ili drugom smjeru. Ako je $r = 0$, tada je $k = N$ i žeton u sažetoj igri ostaje u istom položaju. Ako je $r \neq 0$, dobivamo običan potez u igri na N položaja.

Pretpostavimo najprije da je početni položaj u $2N$ -terokutu višekratnik broja m . Tada je i odgovarajući položaj u sažetoj N -igri višekratnik broja m . Jan sada u sažetoj igri primjenjuje poznatu pobjedničku strategiju za N -terokut. U stvarnoj igri bira iste brojeve kao u sažetoj igri. Tako može postići da sažeti položaj žetona postane 0.

Kada je sažeti položaj jednak 0, u stvarnoj se igri žeton nalazi na jednom od dvaju vrhova 0 ili N . Ako se nalazi na vrhu 0, Jan je već pobijedio. Ako se nalazi na vrhu N , Jan izabire $k = N$. Tada oba smjera vode u položaj 0. Prema tome, Jan može pobijediti iz svakoga položaja koji je višekratnik broja m i u igri na $2N$ vrhova.

Pretpostavimo sada da početni položaj nije višekratnik broja m . Tada ni odgovarajući položaj u sažetoj igri nije višekratnik broja m . Tin promatra poteze u sažetoj igri na N položaja. Ako je $r \neq 0$, bira onaj smjer koji mu prema poznatoj strategiji omogućuje da sažeti položaj ostane izvan višekratnika broja m . U stvarnoj igri bira isti smjer. Ako je $r = 0$, sažeti se položaj uopće ne mijenja, pa i dalje nije višekratnik broja m . Tako Tin može osigurati da žeton u igri na $2N$ vrhova nikada ne dođe na položaj koji je višekratnik broja m .

Dakle, svojstvo koje vrijedi za igru na N vrhova vrijedi i za igru na $2N$ vrhova.

Ponavljanje pravila. Za neparni $m > 1$ već smo dokazali početno svojstvo na m vrhova. Pravilo udvostručavanja možemo zatim primijeniti redom na igre s $m, 2m, 4m, \dots, 2^a \cdot m = n$ vrhova. Ako je $m > 1$, Tin na početku može postaviti žeton, primjerice, u položaj 1. Taj položaj nije višekratnik broja m , pa Tin može spriječiti Janovu pobjedu.

Preostaje slučaj $m = 1$, odnosno $n = 2^a$. Na četverokutu Jan pobjeđuje iz svakoga položaja. Iz položaja 2 izabire $k = 2$, a iz položaja 1 ili 3 izabire $k = 1$ i tako dovodi žeton u položaj 0 ili 2. Sada ponovno primjenjujemo pravilo udvostručavanja. Ako Jan pobjeđuje iz svakoga položaja na N -terokutu, tada na $2N$ -terokutu najprije prisiljava žeton na jedan od nasuprotnih vrhova 0 ili N , a iz položaja N izborom $k = N$ odmah pobjeđuje.

Zaključujemo da Jan može uvijek pobijediti ako i samo ako je n potencija broja 2 (i $n \geq 3$).

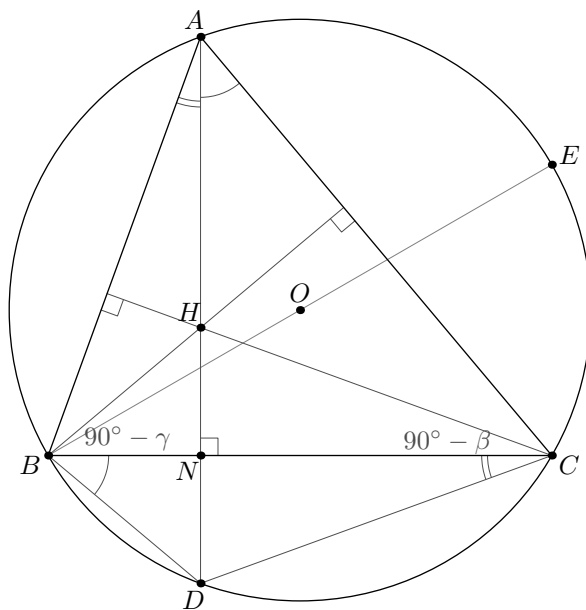
Zadatak 3.

Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC . Pravac kroz točku A okomit na stranicu $\overline{BC}$ siječe opisanu kružnicu tog trokuta u točkama A i D . Pravac BO siječe tu kružnicu u točkama B i E .

Dokaži da su površine trokuta ABC i četverokuta $BDCE$ jednake.

Rješenje.

Neka su β i γ redom mjere kutova u vrhovima B i C trokuta ABC . Neka je točka N nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ te neka je točka H ortocentar trokuta ABC .



Kako je H ortocentar trokuta ABC , imamo da je pravac BH okomit na pravac AC iz čega slijedi da je $\angle CBH = 90^\circ - \gamma$.

Analogno je i pravac CH okomit na pravac AB te je $\angle HCB = 90^\circ - \beta$.

Iz obodnih kutova na opisanoj kružnici trokuta ABC redom imamo

$$\begin{aligned}\angle DBC &= \angle DAC = \angle NAC = 90^\circ - \gamma, \\ \angle BCD &= \angle BAD = \angle BAN = 90^\circ - \beta.\end{aligned}$$

Slijedi da su trokuti BCH i BCD sukladni prema $K - S - K$ poučku o sukladnosti trokuta. Posebno, kako su $\overline{HN}$ i $\overline{DN}$ visine tih trokuta na stranicu $\overline{BC}$, slijedi da je $|DN| = |HN|$. Budući da je $\overline{BE}$ promjer opisane kružnice trokuta ABC prema Talesovom poučku imamo

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle BAE = 90^\circ.$$

Kako je pravac AH okomit na pravac BC te $\sphericalangle ECB = 90^\circ$, slijedi da su pravci AH i EC paralelni. Analogno zaključujemo da su i pravci CH i AE također paralelni iz čega slijedi da je četverokut $AHCE$ paralelogram. Posebno, vrijedi da je $|EC| = |AH|$.

Sada konačno možemo izračunati površinu četverokuta $BDC E$. Redom imamo

$$\begin{aligned} P(BCDE) &= P(BDC) + P(BCE) = \frac{|DN| \cdot |BC|}{2} + \frac{|EC| \cdot |BC|}{2} \\ &= \frac{(|HN| + |AH|) \cdot |BC|}{2} = \frac{|AN| \cdot |BC|}{2} \\ &= P(ABC) \end{aligned}$$

što smo i trebali pokazati.

Zadatak 4.

Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da je broj $m^4 + mn$ djeljiv brojem $m + 1$, a broj $n^4 + mn$ djeljiv brojem $n + 1$.

Rješenje.

Kako su m i $m + 1$ relativno prosti i $m + 1$ dijeli $m^4 + mn = m(m^3 + n)$, onda $m + 1$ dijeli $m^3 + n$. Zapišimo

$$m^3 + n = (m^3 + 1) + (n - 1).$$

Kako $m + 1$ dijeli $m^3 + 1 = (m + 1)(m^2 - m + 1)$, onda $m + 1$ mora dijeliti $n - 1$.

Iz toga slijedi da je $m + 1 \leq n - 1$ ili je $n - 1 = 0$.

Analogno, iz uvjeta da $n + 1$ dijeli $n^4 + mn$ zaključujemo da je $n + 1 \leq m - 1$ ili je $m - 1 = 0$.

Kako ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $m + 1 \leq n - 1$ i $n + 1 \leq m - 1$, onda jedan od brojeva m i n mora biti jednak 1.

Ako je $m = 1$, onda uvjete zadovoljavaju svi prirodni brojevi n takvi da 2 dijeli $n + 1$, tj. neparni prirodni brojevi. Drugi uvjet da $n + 1$ dijeli $n^4 + n$ slijedi jer vrijedi $n^4 + n = n(n^3 + 1) = n(n + 1)(n^2 + n + 1)$.

Obratno, ako je $n = 1$, uvjete zadovoljava svaki neparni prirodni broj m . Dakle, sva rješenja su parovi (m, n) pri čemu je jedan od brojeva jednak 1, a drugi je neparni prirodni broj.

Napomena: Iz $m^4 - 1 = (m^2 - 1)(m^2 + 1) = (m - 1)(m + 1)(m^2 + 1)$ slijedi da $m + 1$ dijeli $m^4 - 1$. Budući da je

$$m^4 + mn = m^4 - 1 + mn + 1 = m^4 - 1 + n(m + 1) - (n - 1),$$

slijedi da $m + 1$ dijeli $n - 1$. Dalje možemo nastaviti kao u rješenju.

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 19. svibnja 2026.

Zadatak 1.

Za pozitivne realne brojeve a i b , neka je $F(a, b)$ najmanji od brojeva a , $\frac{1}{b}$ i $\frac{3}{a} + b$.

Odredi najveću moguću vrijednost koju $F(a, b)$ može postići.

Rješenje.

Promotrimo prvo brojeve a i b za koje vrijedi

$$a = \frac{1}{b} = \frac{3}{a} + b.$$

Tada je $b = \frac{1}{b}$, te vrijedi

$$a = \frac{3}{a} + \frac{1}{a} = \frac{4}{a},$$

tj. $a^2 = 4$, iz čega, budući da je $a > 0$, slijedi $a = 2$. Tada je $b = \frac{1}{2}$ i $F(a, b) = 2$.

Tvrdimo da je 2 najveća moguća vrijednost izraza $F(a, b)$.

Pretpostavimo suprotno da vrijedi $F(a, b) > 2$. Tada nužno vrijedi $a > 2$ te $\frac{1}{b} > 2$, odnosno $b < \frac{1}{2}$. Međutim, tada vrijedi

$$2 < F(a, b) \leq \frac{3}{a} + b < \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

što je nemoguće. Dakle, $F(a, b)$ ne može biti veće od 2 i slijedi tvrdnja.

Zadatak 2.

U nekom gradu postoji točno šest autobusnih linija. Svaka autobusna linija ima točno pet stanica i prometuje u oba smjera. Za svake dvije različite stanice postoji autobusna linija koja ih povezuje.

Odredi najveći mogući broj stanica na svim autobusnim linijama u tom gradu.

Rješenje.

Tvrdimo da je u takvom gradu najveći mogući broj stanica na svim autobusnim linijama 10.

Pretpostavimo da ima barem 11 stanica. Svaka stanica se na jednoj liniji nalazi s četiri druge stanice, pa svaka stanica mora biti na barem tri linije kako bi sa svakom drugom stanicom povezana linijom. Tada bi bilo ukupno barem $3 \cdot 11 = 33$ stanice, a najviše ih može biti $6 \cdot 5 = 30$. Dakle, pretpostavka nije točna, pa imamo najviše 10 stanice.

Deset stanica (označenih brojevima od 1 do 10) možemo rasporediti tako da budu zadovoljeni uvjeti zadatka na sljedeći način.

Linija broj A: 1, 2, 3, 4, 5
 Linija broj B: 1, 2, 6, 7, 8
 Linija broj C: 1, 2, 5, 9, 10
 Linija broj D: 3, 4, 6, 9, 10
 Linija broj E: 3, 4, 7, 8, 9
 Linija broj F: 5, 6, 7, 8, 10

Provjerimo da se u ovom rasporedu zaista za svake dvije različite stanice postoji autobusna linija koja ih povezuje. Stanice 1 i 2 se nalaze na istoj autobusnoj linijom s bilo kojom od preostalih stanica na jednoj od prve tri linije. Stanice 3 i 4 se nalaze međusobno i sa stanicom 5 na prvoj liniji, a sa stanicama 6, 7, 8, 9 i 10 na linijama D i E. Nadalje, stanica 5 se sa stanicama 6, 7, 8, 9 i 10 nalazi na linijama broj C i F. Stanice 6, 7 i 8 su zajedno na liniji B, a stanica 6 je i sa stanicama 9 i 10 na liniji D. Konačno, stanice 7 i 8 su sa stanicama 9 i 10 na linijama E i F, te su 9 i 10 zajedno na liniji C.

Zadatak 3.

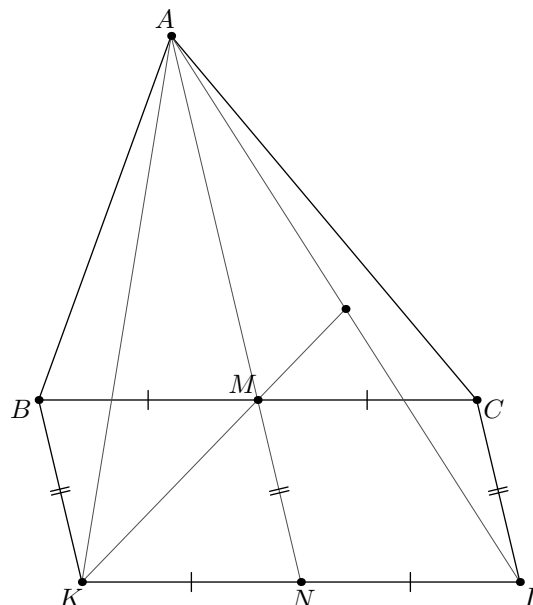
Neka je točka M polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC . Neka su K i L točke takve da je $|AM| = 2|BK|$, BK paralelno s AM , i da je $CBKL$ paralelogram koji s trokutom ABC ima zajedničku samo stranicu $\overline{BC}$.

Dokaži da pravac KM raspolavlja dužinu $\overline{AL}$.

Prvo rješenje.

Neka je N sjecište pravaca AM i KL . Jer je $BM \parallel KN$ i $BK \parallel MN$, vrijedi da je četverokut $BMNK$ paralelogram pa je

$$|KN| = |BM| = \frac{|BC|}{2} \quad \text{te} \quad |BK| = |MN|.$$



Slično, slijedi da je $|NL| = \frac{|BC|}{2}$.

Dakle, dokazali smo da je $|KN| = |NL|$, to jest, točka N je polovište dužine $\overline{KL}$.

Promotrimo trokut AKL . Dužina $\overline{AN}$ je težišnica iz vrha A u tom trokutu, a točka M dijeli tu težišnicu u omjeru 2: 1, jer je

$$|AM| = 2|BK| = 2|MN|.$$

Zaključujemo da je M težište trokuta AKL , zbog čega je i pravac KM težišnica, odnosno, pravac KM raspolavlja dužinu $\overline{AL}$.

Drugo rješenje.

Neka je N polovište dužine $\overline{AM}$. Iz uvjeta zadatka, vrijedi

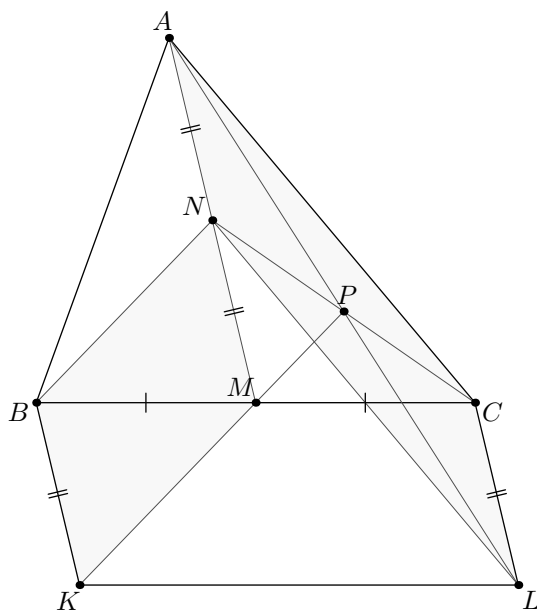
$$|AN| = |NM| = \frac{|AM|}{2} = |BK| = |CL|,$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer je $CBKL$ paralelogram.

Također vrijedi $AM \parallel BK \parallel CL$.

Kako u četverokutu $ANLC$ vrijedi $|AN| = |CL|$ i $AN \parallel CL$, taj je četverokut paralelogram.

Dijagonale paralelograma se raspolavljaju, tj. imaju zajedničko polovište. Označimo zajedničko polovište dužina $\overline{NC}$ i $\overline{AL}$ s P .



Promotrimo trokut BCN . Točka M je polovište stranice $\overline{BC}$, a točka P polovište stranice $\overline{NC}$, pa je dužina $\overline{MP}$ srednjica tog trokuta paralelna sa stranicom $\overline{BN}$.

U četverokutu $NBKM$ vrijedi $|BK| = |NM|$ i $BK \parallel NM$ pa je to paralelogram. Posebno, slijedi da je $KM \parallel BN$.

Sada iz $MP \parallel BN$ i $BN \parallel MK$ slijedi da točke M , K i P pripadaju istom pravcu.

Time smo dokazali da pravac MK prolazi polovištem P dužine $\overline{AL}$.

Zadatak 4.

Za prirodni broj n , $n > 1$, kažemo da je *zanimljiv* ako postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva k takvih da je zbroj

$$k + (k + 1) + \dots + (k + n - 1)$$

uzastopnih prirodnih brojeva od k do $k + n - 1$ jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

- a) Dokaži da je svaki neparni prirodni broj zanimljiv.
- b) Dokaži da postoji beskonačno mnogo parnih prirodnih brojeva koji nisu zanimljivi.
- c) Dokaži da postoji beskonačno mnogo zanimljivih parnih prirodnih brojeva.

Rješenje.

Uočimo da vrijedi

$$k + (k + 1) + \dots + (k + n - 1) = kn + \frac{(n - 1)n}{2}.$$

- a) Neka je $n = 2r + 1$, $r \in \mathbb{N}$. Za prirodni broj ℓ , promotrimo n uzastopnih brojeva

$$n\ell^2 - r, n\ell^2 - r + 1, \dots, n\ell^2 - 1, n\ell^2, n\ell^2 + 1, \dots, n\ell^2 + r - 1, n\ell^2 + r.$$

Njihov je zbroj iznosi $n \cdot n\ell^2 = (n\ell)^2$, što je kvadrat prirodnog broja.

- b) Neka je $n = 8r + 4$, $r \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} k + (k + 1) + \dots + (k + 8r + 3) &= k(8r + 4) + (8r + 3)(4r + 2) \\ &= k(8r + 4) + 32r^2 + 28r + 6, \end{aligned}$$

pa ostatak tog broja pri dijeljenju brojem 4 iznosi 2. No, ostatak kvadrata prirodnog broja ne može pri dijeljenju brojem 4 biti 2 (jer paran broj može biti kvadrat samo parnog broja, ali tada je djeljiv brojem 4), pa ne postoji niti jedan niz n uzastopnih prirodnih brojeva čiji je zbroj potpun kvadrat.

- c) Neka je $n = 4r + 2$, $r \in \mathbb{N}_0$. Za $\ell \in \mathbb{N}$, zbroj uzastopnih n prirodnih brojeva oblika

$$\frac{(n\ell + \frac{n}{2})^2 + i}{n}$$

za

$$i = -\frac{(n - 1)n}{2}, \dots, -\frac{3n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}, \dots, \frac{(n - 1)n}{2},$$

jednak je $(n\ell + \frac{n}{2})^2$.

Kako bismo dokazali da su navedeni brojevi prirodni, dovoljno je dokazati da je jedan od njih prirodan, jer se očito razlikuju za 1. Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{(n\ell + \frac{n}{2})^2 + \frac{n}{2}}{n} &= \frac{n^2r^2 + n^2\ell + \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}}{n} \\ &= (4r + 2)(\ell + 1) + \frac{4r + 2}{2} + \frac{1}{2} \\ &= (4r + 2)(\ell + 1) + 2r + 1, \end{aligned}$$

pa je jedan od njih (a time i svi ostali) prirodan.

Napomena: Općenitije, svi parni brojevi koji su zanimljivi su oblika $n = 2^{2j}r + 2^{2j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, jer je zbroj uzastopnih n brojeva oblika

$$\frac{\left(n\ell + \frac{n}{2^j}\right)^2 + i}{n}$$

za

$$i = -\frac{(n-1)n}{2}, \dots, -\frac{3n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}, \dots, \frac{(n-1)n}{2}, \quad \ell \in \mathbb{N}$$

jednak $\left(n\ell + \frac{n}{2^j}\right)^2$.

S druge strane, svi parni brojevi koji nisu zanimljivi su oblika $n = 2^{2j+1}r + 2^{2j}$, $j \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ jer je

$$k + (k+1) + (k+2) + \dots + (k+2^{2j}-1) = k \cdot 2^{2j} - (2^{2j}-1) \cdot 2^{2j-1},$$

što je broj koji daje ostatak 2^{2j-1} pri dijeljenju brojem 2^{2j} , a kvadrat prirodnog broja nema ostatak 2^{2j-1} pri dijeljenju s 2^{2j} .