

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 18. svibnja 2026.

1. Neka su x , y i z realni brojevi različiti od 0 takvi da vrijedi

$$x + y + z = 3$$

$$x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + y^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = -3.$$

Odredi vrijednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$.

2. Tin i Jan igraju igru na pravilnom mnogokutu $A_1A_2 \dots A_n$ s n vrhova, za prirodni broj $n \geq 3$. Na početku Tin postavlja žeton na neki vrh različit od A_1 . U svakom potezu Jan bira prirodni broj $k < n$, a zatim Tin pomiče žeton u jednom ili drugom smjeru za točno k vrhova. Jan pobjeđuje ako Tin pomakne žeton na vrh A_1 .

Odredi sve prirodne brojeve n za koje Jan uvijek može pobijediti bez obzira na to kako Tin bira svoje poteze.

3. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC . Pravac kroz točku A okomit na stranicu \overline{BC} siječe opisanu kružnicu tog trokuta u točkama A i D . Pravac BO siječe tu kružnicu u točkama B i E .

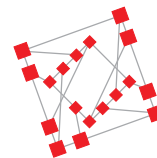
Dokaži da su površine trokuta ABC i četverokuta $BDCE$ jednake.

4. Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da je broj $m^4 + mn$ djeljiv brojem $m + 1$, a broj $n^4 + mn$ djeljiv brojem $n + 1$.

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.



HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 19. svibnja 2026.

1. Za pozitivne realne brojeve a i b , neka je $F(a, b)$ najmanji od brojeva a , $\frac{1}{b}$ i $\frac{3}{a} + b$.
Odredi najveću moguću vrijednost koju $F(a, b)$ može postići.
2. U nekom gradu postoji točno šest autobusnih linija. Svaka autobusna linija ima točno pet stanica i prometuje u oba smjera. Za svake dvije različite stanice postoji autobusna linija koja ih povezuje.
Odredi najveći mogući broj stanica na svim autobusnim linijama u tom gradu.
3. Neka je točka M polovište stranice \overline{BC} trokuta ABC . Neka su K i L točke takve da je $|AM| = 2|BK|$, BK paralelno s AM , i da je $CBKL$ paralelogram koji s trokutom ABC ima zajedničku samo stranicu \overline{BC} .
Dokaži da pravac KM raspolavlja dužinu \overline{AL} .
4. Za prirodni broj n , $n > 1$, kažemo da je *zanimljiv* ako postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva k takvih da je zbroj

$$k + (k + 1) + \dots + (k + n - 1)$$

uzastopnih prirodnih brojeva od k do $k + n - 1$ jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

- a) Dokaži da je svaki neparni prirodni broj zanimljiv.
- b) Dokaži da postoji beskonačno mnogo parnih prirodnih brojeva koji nisu zanimljivi.
- c) Dokaži da postoji beskonačno mnogo zanimljivih parnih prirodnih brojeva.

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.