Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 18. svibnja 2026.

1. Neka su x, y i z realni brojevi različiti od 0 takvi da vrijedi

$$x + y + z = 3$$
$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right) + z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = -3.$$

Odredi vrijednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$.

2. Tin i Jan igraju igru na pravilnom mnogokutu $A_1A_2 \dots A_n$ s n vrhova, za prirodni broj $n \geqslant 3$. Na početku Tin postavlja žeton na neki vrh različit od A_1. U svakom potezu Jan bira prirodni broj $k < n$, a zatim Tin pomiče žeton u jednom ili drugom smjeru za točno k vrhova. Jan pobjeđuje ako Tin pomakne žeton na vrh A_1.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje Jan uvijek može pobijediti bez obzira na to kako Tin bira svoje poteze.

3. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC. Pravac kroz točku A okomit na stranicu $\overline{BC}$ siječe opisanu kružnicu tog trokuta u točkama A i D. Pravac BO siječe tu kružnicu u točkama B i E.

Dokaži da su površine trokuta ABC i četverokuta $BDCE$ jednake.

4. Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da je broj m^4+mn djeljiv brojem $m+1$, a broj $n^4 + mn$ djeljiv brojem $n + 1$.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.

Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 19. svibnja 2026.

1. Za pozitivne realne brojeve a i b, neka je $F(a,b)$ najmanji od brojeva a, $\frac{1}{b}$ i $\frac{3}{a}+b$.

Odredi najveću moguću vrijednost koju $F(a,b)$ može postići.

2. U nekom gradu postoji točno šest autobusnih linija. Svaka autobusna linija ima točno pet stanica i prometuje u oba smjera. Za svake dvije različite stanice postoji autobusna linija koja ih povezuje.

Odredi najveći mogući broj stanica na svim autobusnim linijama u tom gradu.

3. Neka je točka M polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Neka su K i L točke takve da je $|AM| = 2|BK|$, BK paralelno s AM, i da je $CBKL$ paralelogram koji s trokutom ABC ima zajedničku samo stranicu $\overline{BC}$.

Dokaži da pravac KM raspolavlja dužinu $\overline{AL}$.

4. Za prirodni broj n, $n > 1$, kažemo da je *zanimljiv* ako postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva k takvih da je zbroj

$$k + (k+1) + \ldots + (k+n-1)$$

uzastopnih prirodnih brojeva od k do $k+n-1$ jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

a) Dokaži da je svaki neparni prirodni broj zanimljiv.

b) Dokaži da postoji beskonačno mnogo parnih prirodnih brojeva koji nisu zanimljivi.

c) Dokaži da postoji beskonačno mnogo zanimljivih parnih prirodnih brojeva.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.