HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 18. svibnja 2026.

Zadatak 1.

Neka su x, y i z realni brojevi različiti od 0 takvi da vrijedi

$$x+y+z=3$$
$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=-3.$$

Odredi vrijednost izraza $x^2+y^2+z^2$.

Prvo rješenje.

Iz prve jednadžbe dobivamo $x+y=3-z$, $y+z=3-x$ i $z+x=3-y$. Svođenjem na zajedničke nazivnike razlomke u zagradama u drugoj jednadžbi, te množenjem s xyz dobivamo

$$x^2(z+y)+y^2(x+z)+z^2(y+z)=-3xyz.$$

Množenjem, pa grupiranjem izraza koji sadrže iste varijable (primjerice x^2y i xy^2) dobivamo

$$\begin{gathered}xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=-3xyz\\ xy(3-z)+yz(3-x)+zx(3-y)=-3xyz,\end{gathered}$$

iz čega slijedi $xy+yz+zx=0$.

Sada iz identiteta $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ dobivamo $x^2+y^2+z^2=3^2=9$.

Drugo rješenje.

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo:

$$x+y+z+x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=0.$$

Primijetimo da vrijedi $x+x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=x^2\cdot\frac{1}{x}+x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, te analogno za druge varijable. Stoga prethodna jednakost postaje

$$\begin{gathered}x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0,\\ (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0.\end{gathered}$$

Izraz $x^2+y^2+z^2$ nije jednak 0 jer su x, y i z različiti od 0. Stoga iz prethodne jednakosti slijedi $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Iz toga dobivamo $xy+yz+zx=0$.

Kao u prvom rješenju sada dobijemo $x^2+y^2+z^2=3^2=9$.

Zadatak 2.

Tin i Jan igraju igru na pravilnom mnogokutu $A_1A_2\dots A_n$ s n vrhova, za prirodni broj $n \geqslant 3$. Na početku Tin postavlja žeton na neki vrh različit od A_1. U svakom potezu Jan bira prirodni broj $k < n$, a zatim Tin pomiče žeton u jednom ili drugom smjeru za točno k vrhova. Jan pobjeđuje ako Tin pomakne žeton na vrh A_1.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje Jan uvijek može pobijediti bez obzira na to kako Tin bira svoje poteze.

Rješenje.

Pokazat ćemo da Jan može pobijediti bez obzira na to kako Tin bira svoje poteze ako je $n = 2^r$ za neki prirodni broj r, a inače Tin može odabrati početni vrh tako da ga Jan ne može natjerati da pomakne žeton an vrh A_1.

Pretpostavimo da je $n = 2^r$ za $r \in \mathbb{N}$. Ako Tin postavi žeton na vrh s oznakom $2^{r-1} - 1$, tj. u vrh točno nasuprot A_1, onda Jan može odabrati broj $2^{r-1} = \frac{n}{2}$ i Tin će morati pomaknuti žeton na A_1 u sljedećem koraku.

Uočimo da vrhovi s oznakama 1, $\frac{n}{4}+1$, $\frac{n}{2}+1$ i $\frac{3n}{4}+1$ dijele sve ostale vrhove na četiri jednakobrojne skupine. Ako Tin postavi žeton na vrh s oznakom $\frac{n}{4}+1$, $\frac{n}{2}+1$ ili $\frac{3n}{4}+1$, onda će Jan odabrati broj $\frac{n}{4}$ i Tin će morati pomaknuti žeton na neki od vrhova A_1 i $A_{\frac{n}{2}+1}$, te znamo da je nakon toga Jan pobijedio ili može pobijediti u sljedećem koraku. Dakle, u ovom slučaju Jan će u najviše dva koraka pobijediti.

Nadalje, ako je $r \geqslant 3$, a Tin postavi žeton na vrh s oznakom $\frac{n}{8}+1$, $\frac{3n}{8}+1$, $\frac{5n}{8}+1$ ili $\frac{7n}{8}+1$, onda će Jan pobijediti u najviše tri koraka prvo birajući broj $\frac{n}{8}$, a nakon toga koristeći prethodno opisanu strategiju.

Općenito, za bilo koji drugi vrh koji ima oznaku oblika $\frac{p}{2^t} \cdot n + 1$, pri čemu je $t \leqslant r$ i p neparni prirodni broj manji od 2^t, a koji sve vrhove dijele u 2^t jednakobrojnih skupina, Jan će prvo birati broj $\frac{1}{2^t} \cdot n$ i nakon toga primijeniti strategiju za vrhove koji dijele preostale vrhove u manji broj jednakobrojnih skupina, te će pobijediti u najviše t koraka. Time smo pokazali da Jan pobjeđuje ako je $n = 2^r$, $r \in \mathbb{N}$.

Neka je $n = 2^r \cdot m$, pri čemu je r nenegativni cijeli broj, a m neparni prirodni broj veći od 1.

Kao u prvom dijelu rješenja, vidimo da Tin ne smije izabrati kao prvi vrh neki s oznakom oblika $\frac{p}{2^t} \cdot n + 1$ za p neparan broj i $t \leqslant r$. No, u ovom slučaju postoje i drugi vrhovi. Oznake $\frac{p}{2^t} \cdot n + 1$ možemo zapisati u obliku $2^{r-t} p \cdot m + 1$, iz čega vidimo da su to točno brojevi koji pri dijeljenju s m daju ostatak 1. Za preostale vrhove vrijedi da pri dijeljenju s m daju ostatak različit od 1. Pretpostavimo da je u nekom trenutku tijekom igre žeton na vrhu s oznakom $mq + i$, gdje je i različit od 1, te neka Jan odabere bilo koji broj $k < n$.

Tada Tin može pomaknuti žeton na vrh čija oznaka daje ostatak $i + k$ ili $i - k$ pri dijeljenju s m. Budući da vrijedi $(i + k) + (i - k) = 2i$, te broj $2i$ ne daje ostatak 1 pri dijeljenju m, slijedi da barem jedan od brojeva $i + k$ i $i - k$ ne daju ostatak 1 pri dijeljenju s m, te Tin može odabrati vrh s takvom oznakom. Stoga Tin nikad neće postaviti žeton na vh A_1 i Jan ne može pobijediti.

Zadatak 3.

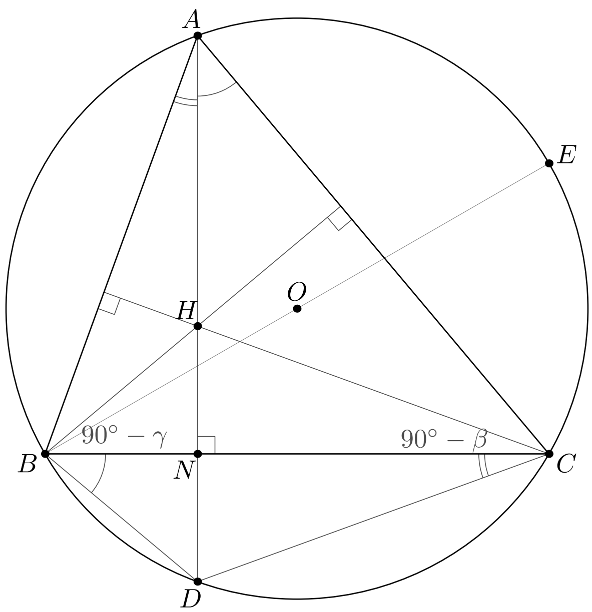
Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC. Pravac kroz točku A okomit na stranicu $\overline{BC}$ siječe opisanu kružnicu tog trokuta u točkama A i D. Pravac BO siječe tu kružnicu u točkama B i E.

Dokaži da su površine trokuta ABC i četverokuta $BDCE$ jednake.

Rješenje.

Neka su β i γ redom mjere kutova u vrhovima B i C trokuta ABC.

Neka je točka N nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ te neka je točka H ortocentar trokuta ABC.



Kako je H ortocentar trokuta ABC, imamo da je pravac BH okomit na pravac AC iz čega slijedi da je $\sphericalangle CBH = 90° - \gamma$.

Analogno je i pravac CH okomit na pravac AB te je $\sphericalangle HCB = 90° - \beta$.

Iz obodnih kutova na opisanoj kružnici trokuta ABC redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC = \sphericalangle NAC = 90° - \gamma,\\ \sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAN = 90° - \beta.\end{aligned}$$

Iz gornjeg slijedi da su trokuti BCH i BCD sukladni prema $K - S - K$ poučku o sukladnosti trokuta.

Posebno, kako su $\overline{HN}$ i $\overline{DN}$ visine tih trokuta na stranicu $\overline{BC}$, slijedi da je $|DN| = |HN|$.

Budući da je $\overline{BE}$ promjer opisane kružnice trokuta ABC prema Talesovom poučku imamo

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle BAE = 90°.$$

Kako je pravac AH okomit na pravac BC te $\sphericalangle ECB = 90°$, slijedi da su pravci AH i EC paralelni. Analogno zaključujemo da su i pravci CH i AE također paralelni iz čega slijedi da je četverokut $AHCE$ paralelogram.

Posebno, vrijedi da je $|EC| = |AH|$.

Sada konačno možemo izračunati površinu četverokuta $BDCE$. Redom imamo

$$\begin{aligned} P(BCDE) &= P(BDC) + P(BCE) = \frac{|DN| \cdot |BC|}{2} + \frac{|EC| \cdot |BC|}{2} \\ &= \frac{(|HN| + |AH|) \cdot |BC|}{2} = \frac{|AN| \cdot |BC|}{2} \\ &= P(ABC) \end{aligned}$$

što smo i trebali pokazati.

Zadatak 4.

Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da je broj $m^4 + mn$ djeljiv brojem $m + 1$, a broj $n^4 + mn$ djeljiv brojem $n + 1$.

Rješenje.

Kako su m i $m + 1$ relativno prosti i $m + 1$ dijeli $m^4 + mn = m(m^3 + n)$, onda $m + 1$ dijeli $m^3 + n$. Zapišimo

$$m^3 + n = (m^3 + 1) + (n - 1).$$

Kako $m + 1$ dijeli $m^3 + 1 = (m + 1)(m^2 - m + 1)$, onda $m + 1$ mora dijeliti $n - 1$.

Iz toga slijedi da je $m + 1 \leqslant n - 1$ ili je $n - 1 = 0$.

Analogno, iz uvjeta da $n + 1$ dijeli $n^4 + mn$ zaključujemo da je $n + 1 \leqslant m - 1$ ili je $m - 1 = 0$.

Kako ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $m + 1 \leqslant n - 1$ i $n + 1 \leqslant m - 1$, onda jedan od brojeva m i n mora biti jednak 1.

Ako je $m = 1$, onda uvjete zadovoljavaju svi prirodni brojevi n takvi da 2 dijeli $n+1$, tj. neparni prirodni brojevi. Drugi uvjet da $n + 1$ dijeli $n^4 + n$ slijedi jer vrijedi $n^4 + n = n(n^3 + 1) = n(n + 1)(n^2 + n + 1)$.

Obratno, ako je $n = 1$, uvjete zadovoljava svaki neparni prirodni broj m. Dakle, sva rješenja su parovi (m, n) pri čemu je jedan od brojeva jednak 1, a drugi je neparni prirodni broj.

Napomena: Iz $m^4 - 1 = (m^2 - 1)(m^2 + 1) = (m - 1)(m + 1)(m^2 + 1)$ slijedi da $m + 1$ dijeli $m^4 - 1$. Budući da je

$$m^4 + mn = m^4 - 1 + mn + 1 = m^4 - 1 + n(m + 1) - (n - 1),$$

slijedi da $m + 1$ dijeli $n - 1$. Dalje možemo nastaviti kao u rješenju.

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 19. svibnja 2026.

Zadatak 1.

Za pozitivne realne brojeve a i b, neka je $F(a,b)$ najmanji od brojeva a, $\dfrac{1}{b}$ i $\dfrac{3}{a}+b$.

Odredi najveću moguću vrijednost koju $F(a,b)$ može postići.

Rješenje.

Promotrimo prvo brojeve a i b za koje vrijedi

$$a=\frac{1}{b}=\frac{3}{a}+b.$$

Tada je $b=\dfrac{1}{b}$, te vrijedi

$$a=\frac{3}{a}+\frac{1}{a}=\frac{4}{a},$$

tj. $a^2=4$, iz čega, budući da je $a>0$, slijedi $a=2$. Tada je $b=\frac{1}{2}$ i $F(a,b)=2$.

Tvrdimo da je 2 najveća moguća vrijednost izraza $F(a,b)$.

Pretpostavimo suprotno da vrijedi $F(a,b)>2$. Tada nužno vrijedi $a>2$ te $\frac{1}{b}>2$, odnosno $b<\frac{1}{2}$. Međutim, tada vrijedi

$$2<F(a,b)\leqslant\frac{3}{a}+b<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2,$$

što je nemoguće. Dakle, $F(a,b)$ ne može biti veće od 2 i slijedi tvrdnja.

Zadatak 2.

U nekom gradu postoji točno šest autobusnih linija. Svaka autobusna linija ima točno pet stanica i prometuje u oba smjera. Za svake dvije različite stanice postoji autobusna linija koja ih povezuje.

Odredi najveći mogući broj stanica na svim autobusnim linijama u tom gradu.

Rješenje.

Tvrdimo da je u takvom gradu najveći mogući broj stanica na svim autobusnim linijama 10.

Pretpostavimo da ima barem 11 stanica. Svaka stanica se na jednoj liniji nalazi s četiri druge stanice, pa svaka stanica mora biti na barem tri linije kako bi sa svakom drugom stanicom povezana linijom. Tada bi bilo ukupno barem $3\cdot 11=33$ stanice, a najviše ih može biti $6\cdot 5=30$. Dakle, pretpostavka nije točna, pa imamo najviše 10 stanice.

Deset stanica (označenih brojevima od 1 do 10) možemo rasporediti tako da budu zadovoljeni uvjeti zadatka na sljedeći način.

Linija broj A: 1, 2, 3, 4, 5
Linija broj B: 1, 2, 6, 7, 8
Linija broj C: 1, 2, 5, 9, 10
Linija broj D: 3, 4, 6, 9, 10
Linija broj E: 3, 4, 7, 8, 9
Linija broj F: 5, 6, 7, 8, 10

Provjerimo da se u ovom rasporedu zaista za svake dvije različite stanice postoji autobusna linija koja ih povezuje. Stanice 1 i 2 se nalaze na istoj autobusnoj linijom s bilo kojom od preostalih stanica na jednoj od prve tri linije. Stanice 3 i 4 se nalaze međusobno i sa stanicom 5 na prvoj liniji, a sa stanicama 6, 7, 8, 9 i 10 na linijama D i E. Nadalje, stanica 5 se sa stanicama 6, 7, 8, 9 i 10 nalazi na linijama broj C i F. Stanice 6, 7 i 8 su zajedno na liniji B, a stanica 6 je i sa stanicama 9 i 10 na liniji D. Konačno, stanice 7 i 8 su sa stanicama 9 i 10 na linijama E i F, te su 9 i 10 zajedno na liniji C.

Zadatak 3.

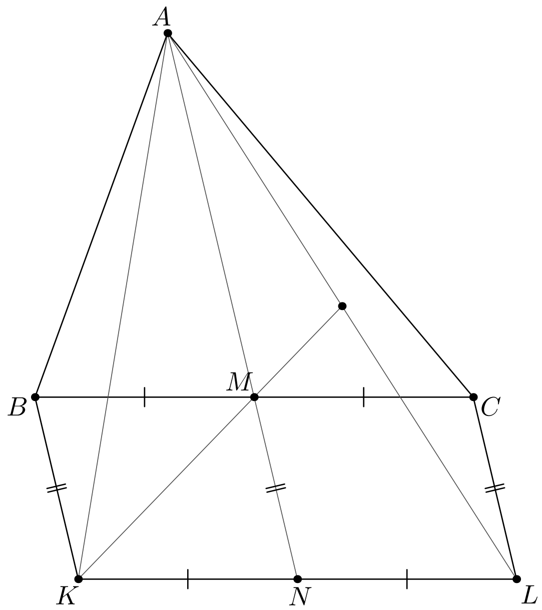
Neka je točka M polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Neka su K i L točke takve da je $|AM| = 2|BK|$, BK paralelno s AM, i da je $CBKL$ paralelogram koji s trokutom ABC ima zajedničku samo stranicu $\overline{BC}$.

Dokaži da pravac KM raspolavlja dužinu $\overline{AL}$.

Prvo rješenje.

Neka je N sjecište pravaca AM i KL. Jer je $BM \parallel KN$ i $BK \parallel MN$, vrijedi da je četverokut $BMNK$ paralelogram pa je

$$|KN| = |BM| = \frac{|BC|}{2} \quad \text{te} \quad |BK| = |MN|.$$



Slično, slijedi da je $|NL| = \dfrac{|BC|}{2}$.

Dakle, dokazali smo da je $|KN| = |NL|$, to jest, točka N je polovište dužine $\overline{KL}$.

Promotrimo trokut AKL. Dužina $\overline{AN}$ je težišnica iz vrha A u tom trokutu, a točka M dijeli tu težišnicu u omjeru $2:1$, jer je

$$|AM| = 2|BK| = 2|MN|.$$

Zaključujemo da je M težište trokuta AKL, zbog čega je i pravac KM težišnica, odnosno, pravac KM raspolavlja dužinu $\overline{AL}$.

Drugo rješenje.

Neka je N polovište dužine $\overline{AM}$. Iz uvjeta zadatka, vrijedi

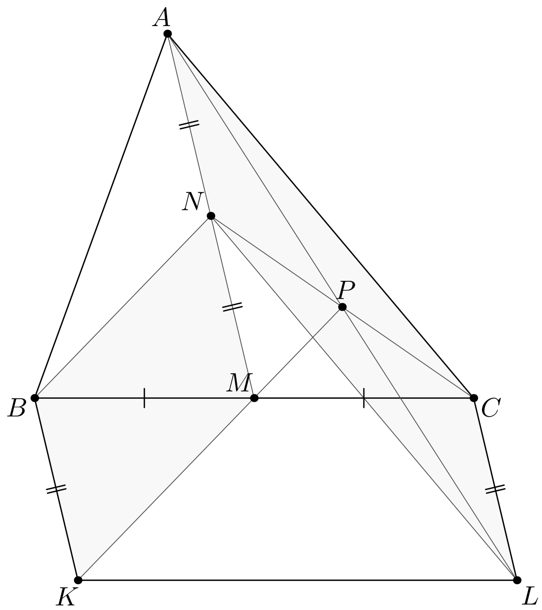
$$|AN| = |NM| = \frac{|AM|}{2} = |BK| = |CL|,$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer je $CBKL$ paralelogram.

Također vrijedi $AM \parallel BK \parallel CL$.

Kako u četverokutu $ANLC$ vrijedi $|AN| = |CL|$ i $AN \parallel CL$, taj je četverokut paralelogram.

Dijagonale paralelograma se raspolavljaju, tj. imaju zajedničko polovište. Označimo zajedničko polovište dužina $\overline{NC}$ i $\overline{AL}$ s P.



Promotrimo trokut BCN. Točka M je polovište stranice $\overline{BC}$, a točka P polovište stranice $\overline{NC}$, pa je dužina $\overline{MP}$ srednjica tog trokuta paralelna sa stranicom $\overline{BN}$.

U četverokutu $NBKM$ vrijedi $|BK| = |NM|$ i $BK \parallel NM$ pa je to paralelogram. Posebno, slijedi da je $KM \parallel BN$.

Sada iz $MP \parallel BN$ i $BN \parallel MK$ slijedi da točke M, K i P pripadaju istom pravcu.

Time smo dokazali da pravac MK prolazi polovištem P dužine $\overline{AL}$.

Zadatak 4.

Za prirodni broj n, $n > 1$, kažemo da je *zanimljiv* ako postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva k takvih da je zbroj

$$k + (k+1) + \ldots + (k+n-1)$$

uzastopnih prirodnih brojeva od k do $k+n-1$ jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

a) Dokaži da je svaki neparni prirodni broj zanimljiv.

b) Dokaži da postoji beskonačno mnogo parnih prirodnih brojeva koji nisu zanimljivi.

c) Dokaži da postoji beskonačno mnogo zanimljivih parnih prirodnih brojeva.

Rješenje.

Uočimo da vrijedi

$$k + (k+1) + \ldots + (k+n-1) = kn + \frac{(n-1)n}{2}.$$

a) Neka je $n = 2r+1$, $r \in \mathbb{N}$. Za prirodni broj ℓ, promotrimo n uzastopnih brojeva

$$n\ell^2 - r, n\ell^2 - r + 1, \ldots, n\ell^2 - 1, n\ell^2, n\ell^2 + 1, \ldots, n\ell^2 + r - 1, n\ell^2 + r.$$

Njihov je zbroj iznosi $n \cdot n\ell^2 = (n\ell)^2$, što je kvadrat prirodnog broja.

b) Neka je $n = 8r+4$, $r \in \mathbb{N}_0$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} k + (k+1) + \ldots + (k+8r+3) &= k(8r+4) + (8r+3)(4r+2) \\ &= k(8r+4) + 32r^2 + 28r + 6, \end{aligned}$$

pa ostatak tog broja pri dijeljenju brojem 4 iznosi 2. No, ostatak kvadrata prirodnog broja ne može pri dijeljenju brojem 4 biti 2 (jer paran broj može biti kvadrat samo parnog broja, ali tada je djeljiv brojem 4), pa ne postoji niti jedan niz n uzastopnih prirodnih brojeva čiji je zbroj potpun kvadrat.

c) Neka je $n = 4r+2$, $r \in \mathbb{N}_0$. Za $\ell \in \mathbb{N}$, zbroj uzastopnih n prirodnih brojeva oblika

$$\frac{\left(n\ell + \frac{n}{2}\right)^2 + i}{n}$$

za

$$i = -\frac{(n-1)n}{2}, \ldots, -\frac{3n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}, \ldots, \frac{(n-1)n}{2},$$

jednak je $\left(n\ell + \frac{n}{2}\right)^2$.

Kako bismo dokazali da su navedeni brojevi prirodni, dovoljno je dokazati da je jedan od njih prirodan, jer se očito razlikuju za 1. Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\left(nl + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2}}{n} &= \frac{n^2r^2 + n^2\ell + \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}}{n} \\ &= (4r+2)(l+1) + \frac{4r+2}{2} + \frac{1}{2} \\ &= (4r+2)(l+1) + 2r + 1, \end{aligned}$$

pa je jedan od njih (a time i svi ostali) prirodan.

Napomena: Općenitije, svi parni brojevi koji su zanimljivi su oblika $n = 2^{2j}r + 2^{2j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$, jer je zbroj uzastopnih n brojeva oblika

$$\frac{\left(n\ell + \frac{n}{2^j}\right)^2 + i}{n}$$

za

$$i = -\frac{(n-1)n}{2}, ..., -\frac{3n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}, ..., \frac{(n-1)n}{2}, \qquad \ell \in \mathbb{N}$$

jednak $\left(nl + \frac{n}{2^j}\right)^2$.

S druge strane, svi parni brojevi koji nisu zanimljivi su oblika $n = 2^{2j+1}r + 2^{2j}$, $j \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ jer je

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k + 2^{2j} - 1) = k \cdot 2^{2j} - (2^{2j} - 1) \cdot 2^{2j-1},$$

što je broj koji daje ostatak 2^{2j-1} pri dijeljenju brojem 2^{2j}, a kvadrat prirodnog broja nema ostatak 2^{2j-1} pri dijeljenju s 2^{2j}.