MEDO 2025./2026.

Peto kolo

28. ožujka 2026.

Juniori (7. i 8. r. OŠ)

Zadaci i rješenja

Zadatak J-5.1. [10 bodova]

U nekom je razredu deset učenika dobilo barem jednu peticu, osam učenika barem dvije petice, sedam učenika barem tri petice i pet učenika barem četiri petice. Tri su učenika dobila točno pet petica. Nitko nije dobio više od pet petica. Koliko su ukupno petica dobili učenici tog razreda?

Prvo rješenje.

Odredimo koliko je točno učenika dobilo jednu, dvije, tri i četiri petice. Rješavamo unatrag. Pet učenika je dobilo barem četiri petice. U tom broju su sadržani učenici koji su dobili točno četiri ili točno pet petica (i samo oni). Kako nam je poznato da su tri učenika dobila točno pet petica, zaključujemo da je $5 - 3 = 2$ učenika dobilo točno četiri petice.

Nastavljamo dalje. Sedam učenika koji su dobili barem tri petice čine učenici koji su dobili točno tri petice i učenici koji su dobili barem četiri petice. Stoga je $7 - 5 = 2$ učenika dobilo točno tri petice.

Istim postupkom zaključujemo da je $8 - 7 = 1$ učenik dobio točno dvije petice, a $10 - 8 = 2$ učenika točno jednu peticu.

Konačno, možemo izračunati koliko je ukupno petica dobiveno:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 2 + 2 + 6 + 8 + 15 = 33.$$

Drugo rješenje.

Brojimo direktno dobivene petice. Zamislimo da svakom učeniku za svaku peticu koju je dobio damo po jedno ukrašeno uskršnje jaje, tj. pisanicu. Prebrojimo sada koliko pisanica ukupno imaju učenici, tako da ih postepeno stavljamo u jednu košaru. Neka najprije svaki od deset učenika koji su dobili barem jednu peticu stavi u košaru jednu od svojih pisanica.

Nakon toga neka osam učenika koji su dobili barem dvije petice stavi po jednu pisanicu u košaru. Primijetimo da je to moguće, jer su svi oni do tada stavili samo jednu pisanicu u košaru, dakle sigurno im je ostala bar još jedna za ubaciti u košaru u ovom koraku. U košari je tada $10 + 8 = 18$ pisanica.

Nastavljamo dalje, tako da sedam učenika koji su dobili barem tri petice stave po jednu pisanicu u košaru, nakon toga pet učenika koji su dobili barem četiri petice stave po jednu pisanicu i na kraju tri učenika koji su dobili točno pet petica stave po jednu pisanicu u košaru. Uočimo da su tada sve pisanice u košari, jer nitko nije dobio više od pet pisanica i svi učenici su stavili sve svoje pisanice u košaru.

Ukupni broj pisanica u košari će na kraju biti $10 + 8 + 7 + 5 + 3 = 33$. Kako svaka pisanica odgovara jednoj petici, ovo je traženi ukupni broj petica koji su učenici dobili.

Zadatak J-5.2. [15 bodova]

Koje su godine rođene osobe koje će tijekom 2026. godine navršiti onoliko godina koliki je zbroj znamenaka godine njihovog rođenja?

Rješenje.

Ako je neka osoba rođena godine x, tada ona 2026. godine navršava $2026 - x$ godina.

Ako je osoba rođena u 20. stoljeću, tada je rođena godine $\overline{19ab}$ i vrijedi:

$$\begin{aligned} 2026 - \overline{19ab} &= 1 + 9 + a + b \\ 2026 - 1900 - 10a - b &= 10 + a + b \\ 116 &= 11a + 2b \end{aligned}$$

Kako je broj na lijevoj strani jednakosti paran, tako i broj na desnoj strani mora biti paran pa a parna znamenka, no za najveći mogući $a = 8$ imamo $2b = 28$, tj. $b = 14$, a b nije znamenka. Tako da mogućnost da je osoba rođena u 20. stoljeću otpada.

Zbog sličnog razloga otpada mogućnost da je osoba rođena i u nekom stoljeću prije dvadesetog. Naime, uočimo da se, rješavajući na isti način kao i prije, broj na lijevoj strani jednakosti povećava, a izraz $11a + 2b < 117$ za sve moguće a i b.

Stoga, ako rješenje postoji, osoba mora biti rođena u 21. stoljeću, odnosno godina njezinog rođenja je oblika $\overline{20ab}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} 2026 - \overline{20ab} &= 2 + 0 + a + b \\ 2026 - 2000 - 10a - b &= 2 + a + b \\ 24 &= 11a + 2b \end{aligned}$$

Sličnim argumentom kao i prije zaključujemo da a mora biti parna znamenka pa je $a = 2$. Dakle, $b = 1$.

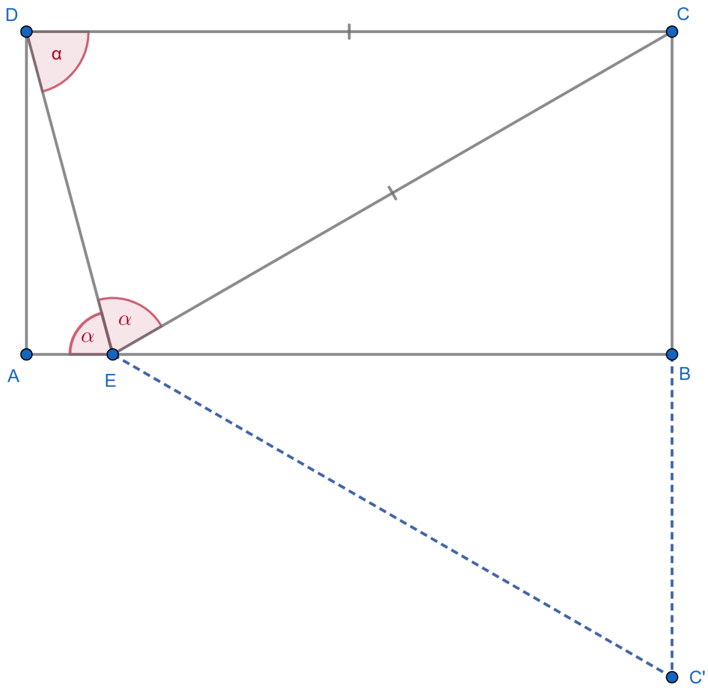
Tražena godina rođenja je 2021. godina.

Zadatak J-5.3. [20 bodova]

Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvostruko je dulja od stranice $\overline{BC}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da veličina kuta $\sphericalangle DEA$ bude jednaka veličini kuta $\sphericalangle CED$. Kolika je veličina tog kuta?

Rješenje.

Skica:



Prema uvjetima zadatka, kutovi $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle DEC$ su sukladni. Označimo s α veličine tih kutova.

Budući da je DE presječnica paralelnih stranica pravokutnika $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, kutovi $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle CDE$ su sukladni pa je $\alpha = |\sphericalangle CDE|$.

Budući da trokut DEC ima dva kuta sukladna, on je jednakokračan i vrijedi $|CD| = |CE|$. Kako je $|AB| = 2|BC|$, slijedi i $|CD| = 2|BC|$ te $|CE| = 2|BC|$.

Neka je C' osnosimetrična slika točke C s obzirom na AB. Tada je $|BC| = |BC'|$ te iz toga slijedi $|CE| = |CC'|$.

Kako je E točka na simetrali dužine $\overline{CC'}$, ona je jednako udaljena od točaka C i C' pa je $|CE| = |C'E|$. Dakle, trokut CEC' je jednakostraničan.

Jednakostranični trokut ima sva tri kuta jednake veličine i to $60°$. U jednakostraničnom trokutu visina pripada simetrali kuta, stoga EB prepolavlja kut $\sphericalangle CEC'$, odakle zaključujemo da je $|\sphericalangle CEB| = 30°$.

Kako je zbroj veličina kutova $\sphericalangle AED$, $\sphericalangle DEC$ i $\sphericalangle CEB$ jednak $180°$ (čine ispruženi kut), slijedi da je $2\alpha + 30° = 180°$, odakle je konačno $\alpha = 75°$.

Zadatak J-5.4. [25 bodova]

Odredi prirodne brojeve n i k za koje su točno tri od sljedeće četiri izjave istinite:

1) $n + 1$ je djeljiv s k
2) $n = 2k + 5$
3) $n + k$ je djeljiv s 3
4) $n + 7k$ je prost broj.

Rješenje.

Tražimo parove izjava koje ne mogu istovremeno biti istinite.

Primijetimo da u 2. izjavi dodavanjem k na obje strane dobivamo $n+k = 3k+5$ što znači da $n+k$ nije djeljiv s 3, no 3. izjava tvrdi da $n + k$ je djeljiv s 3. Te dvije izjave ne mogu biti istovremeno istinite.

Također, ako je $n + k$ djeljiv s 3, možemo to zapisati u obliku $n + k = 3m$, $m \in \mathbb{N}$. Uvrštavanjem u izraz iz 4. izjave nam daje $n + 7k = 3m + 6k = 3(m + 2k)$ $(m + 2k \in \mathbb{N},\ m + 2k > 1)$ što znači da je taj izraz djeljiv s 3, a 4. izjava kaže da je $n + 7k$ prost broj, tako da ni te dvije izjave ne mogu biti istovremeno istinite.

To znači da je 3. izjava ta koja mora biti lažna.

Dodavanjem broja 1 na obje strane izraza iz 2. izjave dobivamo $n + 1 = 2k + 6$, a kako prema 1. izjavi k dijeli $n + 1$, mora vrijedi i da k dijeli $2k + 6$ pa slijedi da k dijeli 6. Stoga je $k \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Uvrštavamo moguće vrijednosti za k u izraz iz 2. izjave.

Za $k = 1$ je $n = 7$, no 4. izjava tada nije istinita jer 14 nije prost broj.

Za $k = 2$ je $n = 9$ i tada su istinite 1. i 4. izjava.

Za $k = 3$ je $n = 11$, no 4. izjava tada nije istinita jer 32 nije prost broj.

Za $k = 6$ je $n = 17$ i tada su istinite 1. i 4. izjava.

Dakle, rješenja su $(n, k) \in \{(9, 2), (17, 6)\}$.

Zadatak J-5.5. [30 bodova]

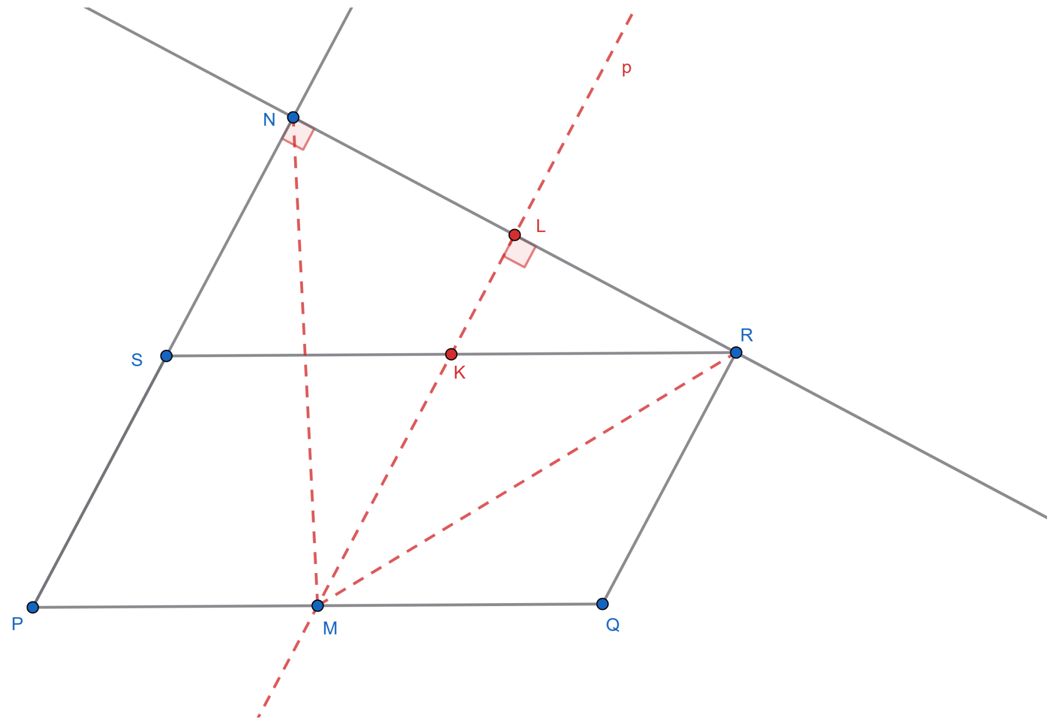
Neka je $PQRS$ paralelogram u kojemu vrijedi $|PQ| = 2|QR|$. Neka je točka M polovište stranice $\overline{PQ}$

i točka N nožište okomice iz vrha R na pravac PS.

Dokaži da vrijedi $|\sphericalangle QMN| = 3 \cdot |\sphericalangle PNM|$.

Rješenje.

Skica:



Točkom M nacrtajmo pravac p koji je paralelan s pravcem PN. Neka je K točka presjeka pravca p i stranice $\overline{RS}$, a točka L presjek pravca p i pravca RN.

Vrijedi da je $p \perp RN$ jer je paralelan s pravcem PN koji je okomit na pravac RN. Tada je $|\sphericalangle PNR| = |\sphericalangle MLR| = 90°$. Također je i $|\sphericalangle PNM| = |\sphericalangle LMN|$ jer su to sukladni kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca PN i p.

Nadalje, četverokut $MQRK$ je romb pa vrijedi $|\sphericalangle RMK| = |\sphericalangle RML| = |\sphericalangle QMR|$.

Budući da je $|SK| = |KR|$ i jer su dužine $\overline{KL}$ i $\overline{SN}$ paralelne, dužina $\overline{KL}$ je srednjica trokuta SRN. To znači i da točka L dijeli dužinu $\overline{RN}$ na dva sukladna dijela pa zbog toga i zbog činjenice da je $|\sphericalangle MLR| = 90°$ vrijedi da je trokut RNM jednakokračan. Stoga je pravac p simetrala kuta $\sphericalangle RMN$.

Sada imamo $|\sphericalangle QMR| = |\sphericalangle RML| = |\sphericalangle LMN| = |\sphericalangle PNM|$, a kako je $|\sphericalangle QMN| = |\sphericalangle LMN| + |\sphericalangle RML| + |\sphericalangle QMR|$, vrijedi $|\sphericalangle QMN| = |\sphericalangle LMN| + |\sphericalangle LMN| + |\sphericalangle LMN|$, tj. $|\sphericalangle NMQ| = 3 \cdot |\sphericalangle NML|$.

Kako je $|\sphericalangle PNM| = |\sphericalangle LMN|$, konačno slijedi $|\sphericalangle QMN| = 3 \cdot |\sphericalangle PNM|$, što je trebalo dokazati.

Zadatak J-5.6. [35 bodova]

Koliko deseteroznamenkastih brojeva sadrži barem jednu znamenku 1 ili barem dvije znamenke 2 ili barem tri znamenke 3 ili ... ili barem devet znamenki 9?

Rješenje.

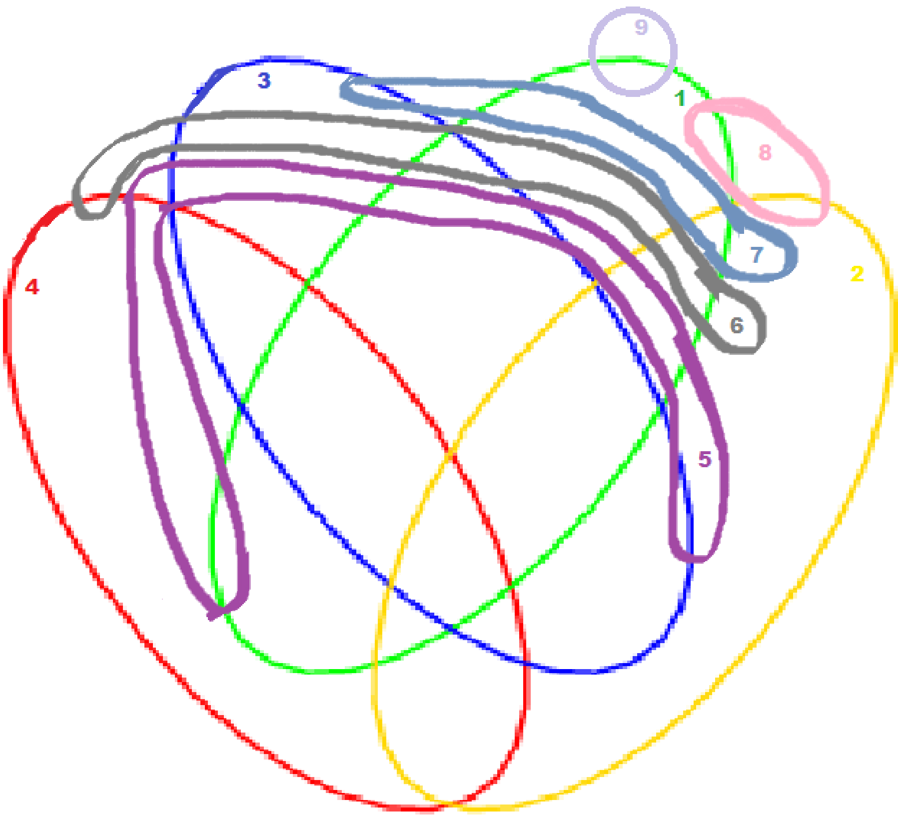
Označimo sa S_n skup svih deseteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem n znamenki n, gdje je $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$. Trebamo odrediti vrijednost $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_9|$. Odredimo najprije koliko iznose pojedinačni $|S_n|$.

Krenimo od kraja, tj. od S_9. Deseteroznamenkasti brojevi koje sadrže barem devet znamenki 9 imaju ili točno deset ili točno devet znamenaka 9. Postoji samo jedan deseteroznamenkasti broj s deset znamenaka 9. Deseteroznamenkastih brojeva koji sadrže točno devet znamenaka 9 ima $9 \cdot 9 + 8 = 89$ (dijelimo ih s obzirom je li devetka na prvom mjestu ili ne). Stoga je $|S_9| = 89 + 1 = 90$.

Prelazimo na S_8. Ponovno dijelimo ove brojeve na disjunktne skupove s obzirom na to koliko točno znamenki osam imaju. Jedini novi slučaj je točno osam znamenki 8. Takvih brojeva ima $\frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 \cdot 9 = 3564$. Stoga je $|S_8| = 3564 + 89 + 1 = 3654$.

Dalje nastavljamo istim postupkom. Dobije se $|S_7| = 88218$, $|S_6| = 1404792$, $|S_5| = 15458454$, $|S_4| = 119620890$, $|S_3| = 648936126$, $|S_2| = 2413851687$, $|S_1| = 5900636088$.

Kako bismo odredili koliko elemenata sadrži unija svih ovih skupova, koristimo formulu uključivanja i isključivanja. Evo Vennovog dijagrama za ove skupove:



(Prva četiri skupa su u obliku elipse i čine standardni Vennov dijagram za četiri skupa, a preostale skupove nadocrtavamo „iskrivljene" elipse pazeći s kojim skupovima imaju presjek).

FUI će u ovom slučaju glasiti:

$$
\begin{aligned}
|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_9| = & |S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_9| \\
& - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_1 \cap S_4| - \cdots - |S_1 \cap S_9| \\
& - |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_4| - \cdots - |S_2 \cap S_8| - |S_3 \cap S_4| - \cdots - |S_3 \cap S_7| \\
& - |S_4 \cap S_5| - |S_4 \cap S_6| \\
& + |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + \cdots + |S_1 \cap S_2 \cap S_7| \\
& + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_1 \cap S_3 \cap S_5| + |S_1 \cap S_3 \cap S_6| + |S_1 \cap S_4 \cap S_5| \\
& + |S_2 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3 \cap S_5| \\
& - |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|.
\end{aligned}
$$

Veličinu svakog presjeka u ovoj formuli računamo dijeleći na slučajeve ovisno o točnom broju znamenaka, kao prije, uz pomoć metode komplementa. Dobije se $|S_1 \cap S_2| = 432245757$, $|S_1 \cap S_3| = 359755894$,

$|S_1 \cap S_4| = 247826194$, $|S_1 \cap S_5| = 6837838$, $|S_1 \cap S_6| = 525616$, $|S_1 \cap S_7| = 26194$, $|S_1 \cap S_8| = 766$, $|S_1 \cap S_9| = 10$, $|S_2 \cap S_3| = 58527674$, $|S_2 \cap S_4| = 16031553$, $|S_2 \cap S_5| = 1497789$, $|S_2 \cap S_6| = 88479$, $|S_2 \cap S_7| = 3009$, $|S_2 \cap S_8| = 45$, $|S_3 \cap S_4| = 2450904$, $|S_3 \cap S_5| = 174420$, $|S_3 \cap S_6| = 7224$, $|S_3 \cap S_7| = 120$, $|S_4 \cap S_5| = 10416$, $|S_4 \cap S_6| = 210$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 51988170$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_4| = 6338034$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_5| = 472944$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_6| = 19674$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_7| = 450$, $|S_1 \cap S_3 \cap S_4| = 477120$, $|S_1 \cap S_3 \cap S_5| = 31500$, $|S_1 \cap S_3 \cap S_6| = 1350$, $|S_1 \cap S_4 \cap S_5| = 1260$, $|S_2 \cap S_3 \cap S_4| = 97170$, $|S_2 \cap S_3 \cap S_5| = 2520$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| = 12600$. Konačni rezultat je stoga jednak 8032934085.

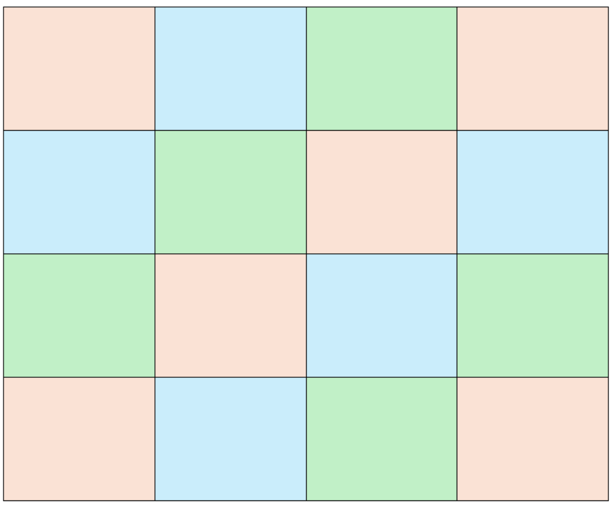
Zadatak J-5.7. [40 bodova]

Na 15 polja ploče dimenzija 4×4 nalaze se žetoni, a jedno polje je prazno. Anton nizom poteza pokušava s ploče ukloniti što više žetona. U svakom potezu on odabire tri uzastopna polja (horizontalno ili vertikalno), uzima žetom s prvog polja, preskače njime žeton na drugom polju i stavlja prvi žeton na treće polje (do tada prazno), a drugi (preskočeni) žeton uklanja s ploče (vidi sliku).

Odredi koja sve polja ploče mogu na početku biti prazna kako bi Anton mogao postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton.

Rješenje.

Uočimo da svakim potezom, tj. preskakanjem i uklanjanjem žetona, nestane žeton s polja s kojega je krenuo skok i nestane žeton koji je preskočen, a pojavi se žeton na mjestu koje je do tada bilo prazno. Stoga možemo zaključiti kako s obzirom na promjenu broja žetona u jednom potezu postoje tri vrste polja. Dakle, ima smisla obojiti ploču s 3 različite boje, i to tako da svaka tri uzastopna polja ploče budu obojena u tri različite boje.



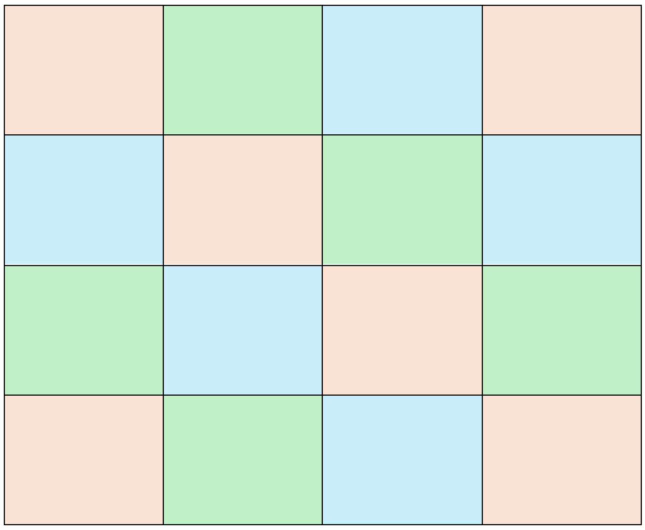
Sada primjećujemo da se kod ovakvog bojanja u svakom potezu ukupan broj žetona koji se nalaze na neke dvije boje smanji za točno 1, a ukupan broj žetona na trećoj boji se poveća za točno 1. Iz toga slijedi da se u svakom potezu promijeni parnost ukupnog broja žetona na svakoj pojedinoj boji.

Kako je na početku na ploči 15 žetona, ako Anton uspije završiti sa samo jednim žetonom na ploči, znamo da je napravio ukupno 14 poteza. Zaključujemo da će parnost ukupnog broja žetona na svakoj pojedinoj boji na kraju biti jednaka kao i na početku.

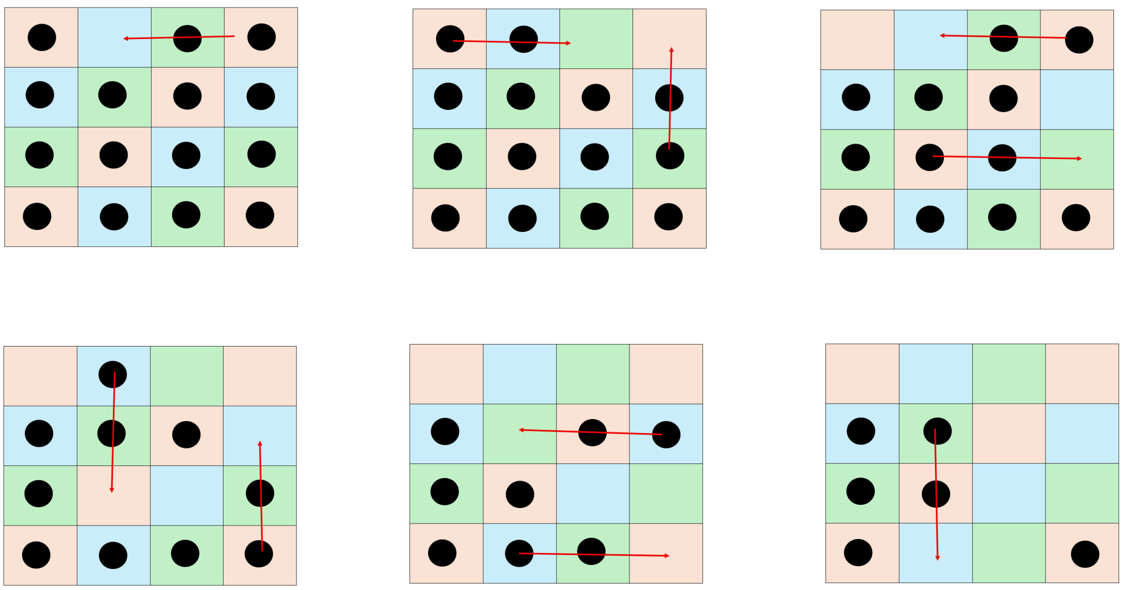
Uočimo da je 6 polja ploče obojeno u crveno, a po 5 polja u plavo i zeleno. Budući da na kraju ostaje samo jedan žeton na cijeloj ploči, broj žetona na neke dvije boje na početku mora biti paran, a na preostaloj boji broj žetona mora biti neparan. Primijetimo sada da nije moguće da istovremeno na plavoj i zelenoj boji imamo po paran broj žetona na početku, jer bi tada barem po jedno plavo i zeleno polje ostalo prazno, a to je u kontradikciji s činjenicom da je na početku samo jedno polje ploče prazno.

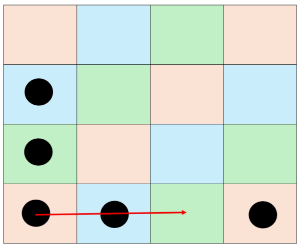
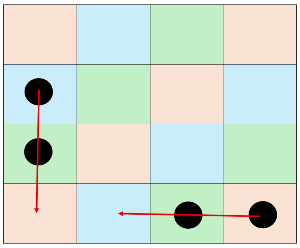
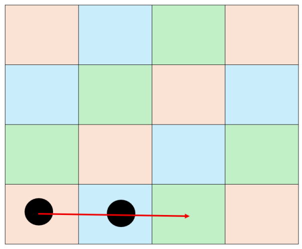
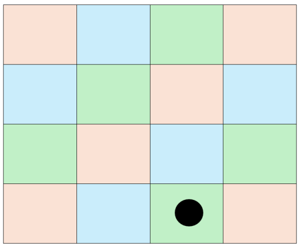
Zaključujemo da na crvenim poljima početni broj žetona mora biti paran. No, tada na svim crvenim poljima na početku mora biti postavljen žeton, jer bi u suprotnom barem dva crvena polja bila prazna. Prazno polje stoga može biti plave ili zelene boje.

Primijetimo sada da rotacijom ploče za 90° dobijemo ponovno bojanje koje zadovoljava svojstvo da su svaka tri uzastopna polja obojena u tri različite boje. Stoga istim zaključivanjem zaključujemo da i pri ovakvom bojanju sva crvena polja moraju biti popunjena. Zaključujemo da prazno polje na početku jedino može biti neko polje na rubu ploče koje nije kut ploče.



Sljedeća konstrukcija pokazuje da u tom slučaju Anton zaista može postići da na kraju na ploči ostane samo jedan žeton (na slici).



Zadatak J-5.8. [45 bodova]

Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$, ako su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Za koje a, b i c se ta vrijednost postiže?

Rješenje.

Označimo izraz koji želimo minimizirati sa S. Ako direktno primijenimo AG nejednakost, dobili bismo:

$$\begin{aligned} S = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} &= \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \\ &\geqslant \sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c}} = b + c + a, \end{aligned}$$

što nije ništa, ali u ovom slučaju nije ni nešto, jer ne znamo minimizirati vrijednost od $a + b + c$.

Primijetimo li da je uvjet koji imamo kvadratan, možemo doći na ideju da izraz S kvadriramo. Tada imamo:

$$S^2 = \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2.$$

Sada zadatak postaje minimizirati izraz $\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2}$. U njemu primijenimo AG nejednakost na parove pa dobijemo:

$$\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2}\right) \geqslant b^2 + c^2 + a^2 = 1.$$

Stoga vrijedi $S^2 \geqslant 1 + 2 = 3$, tj. $S \geqslant \sqrt{3}$. Ova minimalna vrijednost se postiže za $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.