Hrvatsko matematičko društvo

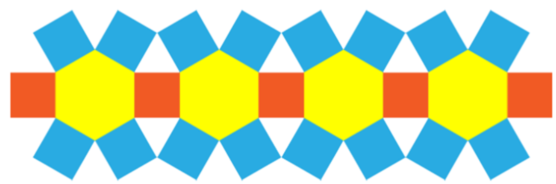
HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 23. svibnja 2026.

Rješenja zadataka za grupu B (5. razred)

1. Cvjetovi

Nika je nacrtala šesterokut i nad svakom njegovom stranicom po jedan kvadrat. Dobiveni lik nazvala je cvijet, a kvadrate njegovim laticama. Dvije nasuprotne latice je obojila crvenom bojom. Nakon toga je s desne strane tog cvijeta docrtala još jedan takav cvijet tako da im je jedna crvena latica zajednička. Nastavila je nizati cvijet po cvijet uvijek na isti način, tj. tako da uz posljednji cvijet u nizu s desne strane docrta još jedan takav cvijet tako da im je jedna crvena latica zajednička. Na slici je prikazan tako nastali niz od četiri cvijeta.



Koliko ima šesterokuta u nizu cvjetova koji ima 2026 latica?

Rezultat: 405

Rješenje.

U jednom je cvijetu jedan šesterokut i šest latica, a u dva spojena cvijeta su dva šesterokuta i 11 latica. Dodavanjem svakog dodatnog cvijeta dodajemo po jedan šesterokut i pet dodatnih latica.

Broj šesterokuta jednak je broju cvjetova, a broj latica jednak je peterostrukom broju šesterokuta uvećanom za 1.

Ako je ukupan broj latica 2026, onda je broj šesterokuta jednak $2025 : 5 = 405$.

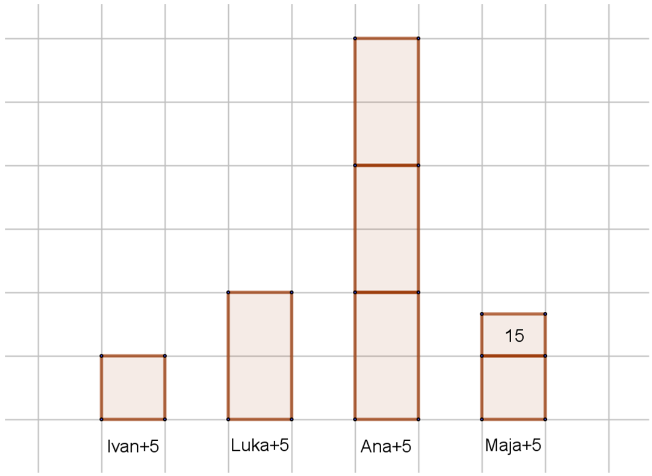
2. Lukina ušteđevina

Ana, Ivan, Luka i Maja imaju ukupno 2345 eura. Kad bi svatko od njih imao 5 eura više, Luka bi imao dvostruko više od Ivana, Ana bi imala trostruko više od Luke, a Maja bi imala 15 eura više od Ivana. Koliko eura ima Luka?

Rezultat: 465

Prvo rješenje.

Prikažimo stupčastim dijagramom iznose eura koje bi redom imali Ana, Ivan, Luka i Maja kad bi svatko od njih imao po 5 eura više.



Uočimo da 2365 eura odgovara zbroju vrijednosti 10 kvadratića i još 15 eura.
Iz toga zaključujemo da jedan kvadratić predstavlja vrijednost od (2365 – 15) : 10 = 235 eura.
Stoga Luka ima 2 · 235 – 5 = 465 eura.

Drugo rješenje.

Označimo sa L, A, I, M iznos eura koje redom imaju Luka, Ana, Ivan i Maja.

Njihov ukupni iznos je $L + A + I + M = 2345$.

Prema uvjetima zadatka vrijedi

$$L + 5 = 2 \cdot (I + 5)$$
$$A + 5 = 3 \cdot (L + 5)$$
$$M + 5 = (I + 5) + 15$$

Izrazimo iznos eura svakog od njih pomoću I:

$$L + 5 = 2 \cdot (I + 5)$$
$$L + 5 = 2 \cdot I + 10$$
$$L = 2 \cdot I + 10 - 5$$
$$L = 2 \cdot I + 5$$

$$A + 5 = 3 \cdot (L + 5)$$
$$A + 5 = 3 \cdot L + 15$$
$$A = 3 \cdot L + 10$$

$$A = 3 \cdot (2 \cdot I + 5) + 10$$
$$A = 6 \cdot I + 15 + 10 = 6 \cdot I + 25$$

$$M + 5 = (I + 5) + 15$$
$$M = I + 15$$

Odredimo zbroj iznosa eura svakog od njih izražen pomoću I:

$$A + I + L + M = (6 \cdot I + 25) + I + (2 \cdot I + 5) + (I + 15) = 10 \cdot I + 45$$

Kako oni imaju ukupno 2345 eura, treba vrijediti $10 \cdot I + 45 = 2345$.

Stoga je $10 \cdot I = 2345 - 45 = 2300$, a $I = 2300 : 10 = 230$.

Luka prema tome ima $L = 2 \cdot I + 5 = 2 \cdot 230 + 5 = 465$ eura.

Treće rješenje.

Označimo s A*, I*, L* i M* iznos eura koje bi redom imali Ana, Ivan, Luka i Maja kad bi svatko od njih imao po 5 eura više.

Tada bi oni ukupno imali 2345 + 4 · 5 = 2345 + 20 = 2365 eura, tj. vrijedilo bi:

A* + I* + L* + M* = 2365.

Kako vrijedi A* = 3 · L* i L* = 2 · I*, slijedi

$$A^* = 3 \cdot L^* = 3 \cdot 2 \cdot I^* = 6 \cdot I^*.$$

Budući da vrijedi i M* = I* + 15, možemo vrijednosti A*, L* i M* izražene pomoću I* uvrstiti u izraz A* + I* + L* + M* = 2365, pa dobivamo:

$$2 \cdot I^* + I^* + 6 \cdot I^* + I^* + 15 = 2365$$
$$10 \cdot I^* + 15 = 2365$$
$$10 \cdot I^* = 2365 - 15 = 2350$$
$$I^* = 2350 : 10 = 235$$

Slijedi L* = 2 · I* = 2 · 235 = 470.

Kako je L* iznos eura za 5 veći od stvarnog, Luka ima 470 – 5 = 465 eura.

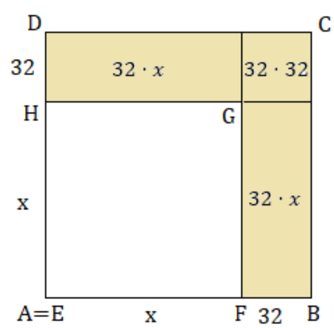
3. Dva kvadrata

Duljina stranice većeg i duljina stranice manjeg kvadrata razlikuju se za 32 cm, a površine tih dvaju kvadrata razlikuju se za 6528 cm². Kolika je, u centimetrima, duljina stranice većeg kvadrata?

Rezultat: 118

Rješenje.

Neka je $ABCD$ veći, a $EFGH$ manji kvadrat. Nacrtajmo ih tako da je $A = E$ te da točka F pripada dužini $\overline{AB}$, a točka H dužini $\overline{AD}$. Neka je $|EF| = x$.



Površina kvadrata $ABCD$ veća je od površine kvadrata $EFGH$ za površinu dvaju pravokutnika kojima su duljine susjednih stranica x i 32 cm, te za površinu kvadrata čija je stranica duljine 32 cm.

Vrijedi:

$$2 \cdot 32 \cdot x + 32 \cdot 32 = 6528$$

$$64x + 1024 = 6528$$
$$64x = 5504$$
$$x = 86$$

Dakle, duljina stranice kvadrata $EFGH$ je 86 cm, a stranica kvadrata $ABCD$ dulja je za 32 cm pa je njena duljina $86 + 32$, tj. 118 cm.

4. Dva svjetionika

Crveni svjetionik naizmjence svijetli 5 sekundi, pa 4 sekunde ne svijetli. Zeleni svjetionik naizmjence svijetli 4 sekunde, pa 2 sekunde ne svijetli. Točno u 19 sati oba su svjetionika započela svijetliti. Koliko je sekundi tijekom idućih 2026 sekundi svijetlio točno jedan svjetionik?

Rezultat: 900

Rješenje.

Crveni svjetionik svijetli 5 sekundi, a ne svijetli 4 sekunde. To je ciklus od 9 sekundi.

Zeleni svjetionik svijetli 4 sekunde, a ne svijetli 2 sekunde. To je ciklus od 6 sekundi.

Unutar 18 sekundi crveni svjetionik ponovit će ciklus 2 puta jer je $9 \cdot 2 = 18$, a zeleni svjetionik ponovit će ciklus 3 puta jer je $6 \cdot 3 = 18$. To znači da se svakih 18 sekundi ponavljaju isti ciklusi.

Oba svjetionika započinju svoje cikluse u istom trenutku.

sekunde	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
crveni svjetionik	💡	💡	💡	💡	💡	✕	✕	✕	✕	💡	💡	💡	💡	💡	✕	✕	✕	✕
zeleni svjetionik	💡	💡	💡	💡	✕	✕	💡	💡	💡	💡	✕	✕	💡	💡	💡	💡	✕	✕

✕ označava 1 sekundu u kojoj svjetionik ne svijetli

💡 označava 1 sekundu u kojoj svjetionik svijetli

Budući da trebamo odrediti koliko je sekundi svijetlio točno jedan svjetionik, tražimo one stupce u kojima se na jednom mjestu nalazi 💡, a na drugom ✕. Ima ih sveukupno 8 – to su 5., 7., 8., 9., 11., 12., 15. i 16. stupac. Dakle, tijekom svakih 18 sekundi, 8 je sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

Izračunajmo koliko je dugo tijekom 2026 sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

Kako je $2026 : 18 = 112$ i ostatak 10, 112 se puta ponavljaju ciklusi od 18 sekundi, a početnih 10 sekundi sljedećeg ciklusa još trebamo posebno razmotriti.

U 112 ciklusa je $112 \cdot 8 = 896$ sekundi svijetlio točno jedan svjetionik. U 10 sekundi od početka sljedećeg ciklusa imamo četiri stupca u kojima se nalazi jedan 💡 i jedan ✕.

Ukupno je $896 + 4 = 900$ sekundi svijetlio točno jedan svjetionik.

5. Umnožak

Ako je $\overline{ab} \cdot \overline{cb} = \overline{ddd}$, koliko je $a \cdot b \cdot c \cdot d$?

Rezultat: 378

Rješenje.

Broj $\overline{ddd} = d \cdot 111$, a $111 = 3 \cdot 37$, pa jedan od dvaju brojeva $\overline{ab}$ ili $\overline{cb}$ treba biti djeljiv s 37. Jedini dvoznamenkasti brojevi djeljivi s 37 su 37 i $2 \cdot 37 = 74$. Drugi faktor treba biti djeljiv s 3.

Prvi slučaj.

Neka je jedan od faktora $\overline{ab}$ i $\overline{cb}$ jednak 37. Drugi faktor treba biti dvoznamenkasti broj koji je djeljiv s 3, a znamenka jedinica mu je 7. Njihov umnožak treba biti oblika $\overline{ddd}$.

Ako je znamenka desetica 1, umnožak $37 \cdot 17$ nije djeljiv s 3.

Ako je znamenka desetica 2, dobivamo umnožak $37 \cdot 27 = 999$ koji je željenog oblika.

Ako je znamenka desetica veća od 2, umnožak bi bio veći od 999, što znači da ne bi bio troznamenkast broj pa za faktor 37 nema drugih rješenja.

Drugi slučaj.

Ako je jedan od faktora $\overline{ab}$ i $\overline{cb}$ jednak 74, drugom faktoru znamenka jedinica treba biti također 4, a njihov umnožak treba biti oblika $\overline{ddd}$.

Ako je znamenka jedinica 1, dobivamo umnožak $74 \cdot 14 = 1036$, što nije troznamenkast broj.

Ako bi znamenka jedinica drugog faktora bila veća od 1, umnožak bi bio veći od 1036.

Prema tome, jedine mogućnosti su $37 \cdot 27 = 27 \cdot 37 = 999$, što znači da je $d = 9$, $b = 7$, a znamenke a i c imaju vrijednost 3 i 2, pa je traženi umnožak $a \cdot b \cdot c \cdot d = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 = 378$.

6. Aritmetička sredina

Vedran je izračunao aritmetičku sredinu svih četveroznamenkastih brojeva koji se zapisuju pomoću znamenki 1, 4, 6 i 9 tako da se svaka znamenka koristi točno jedanput. Koliki je umnožak svih znamenki broja koji je Vedran izračunao?

Rezultat: 625

Prvo rješenje.

Neka je $\overline{abcd}$ četveroznamenkasti broj. Za njegov zapis, prema uvjetu zadatka, koristimo različite znamenke iz skupa $\{1, 4, 6, 9\}$.

Znamenku a možemo izabrati na 4 načina. Nakon što smo izabrali znamenku a, preostale su nam još tri slobodne znamenke pa znamenku b možemo izabrati na 3 načina, znamenku c na 2 načina, a znamenka d je jedina preostala znamenka iz skupa $\{1, 4, 6, 9\}$.

Dakle, traženih četveroznamenkastih brojeva ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

U svim se tim brojevima svaka od znamenki 1, 4, 6 i 9 pojavljuje po 6 puta na mjestima znamenki tisućica, stotica, desetica i jedinica, pa vrijedi da je zbroj svih tih brojeva

$$(6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 9) \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 120 \cdot 1111.$$

Aritmetička sredina svih traženih brojeva je $120 \cdot 1111 : 24 = 5 \cdot 1111 = 5555$.

Umnožak svih znamenki te aritmetičke sredine je $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Drugo rješenje.

Aritmetička sredina četveroznamenkastih brojeva, također je četveroznamenkasti broj.

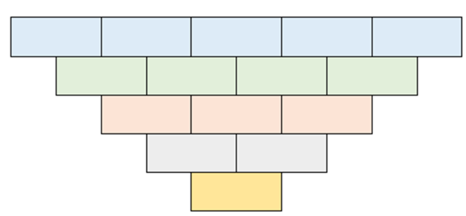
U svim četveroznamenkastim brojevima napisanim znamenkama 1, 4, 6 i 9, svaka od tih znamenki pojavljuje se jednak broj puta na mjestu jedinica, desetica, stotica i tisućica. Stoga će aritmetička sredina biti broj čije su sve četiri znamenke jednake.

Ta znamenka će biti jednaka aritmetičkoj sredini brojeva 1, 4, 6, 9, što iznosi

$$(1 + 4 + 6 + 9) : 4 = 20 : 4 = 5.$$

Dakle, aritmetička sredina svih tih četveroznamenkastih brojeva je 5555, a umnožak njegovih znamenki iznosi $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

7. Najveći broj



U gornji redak lika na slici treba rasporediti brojeve 8, 9, 10, 11 i 12, po jedan broj u svaki pravokutnik. Zatim se redom popunjavaju ostali pravokutnici, redak po redak. U svaki se pravokutnik upisuje zbroj brojeva iz dvaju pravokutnika prethodnog retka koji su tom pravokutniku susjedni. Koji je najveći mogući broj u pravokutniku u posljednjem retku?

Rezultat: 173

Rješenje.

Označimo brojeve upisane u gornjem retku redom: ①, ②, ③, ④, ⑤. To su dakle, nekim redom, brojevi 8, 9, 10, 11 i 12.

①	②	③	④	⑤

U prvom polju drugog retka je zbroj brojeva ① i ②, u drugom polju je zbroj brojeva ② i ③, u trećem zbroj brojeva ③ i ④, a u četvrtom zbroj brojeva ④ i ⑤. Zbrojeve u drugom retku možemo prikazati grafički:

①②	②③	③④	④⑤

Na sličan način, u trećem su retku zbrojevi ovih brojeva:

①②②③	②③③④	③④④⑤

u četvrtom:

①②②② ③③③④	②③③③ ④④④⑤

a u petom retku, u polju na dnu lika, upisan je zbroj brojeva:

① ②②②② ③③③③③③ ④④④④ ⑤

Primijetimo da se brojevi ① i ⑤ pojavljuju samo jednom, brojevi ② i ④ po četiri puta, a broj ③ čak šest puta. U donjem polju lika bit će upisan broj

$$\textcircled{1} + 4 \cdot \textcircled{2} + 6 \cdot \textcircled{3} + 4 \cdot \textcircled{4} + \textcircled{5} = \left(\textcircled{1} + \textcircled{5}\right) + 4 \cdot \left(\textcircled{2} + \textcircled{4}\right) + 6 \cdot \textcircled{3}$$

Taj će zbroj biti najveći ako je ③ najveći broj, a brojevi ① i ⑤ dva najmanja broja.

Dakle, da bismo dobili najveći mogući broj u donjem polju, potrebno je u prvom retku u srednje (treće) polje upisati broj 12, u prvo i zadnje (peto) polje brojeve 8 i 9, a u preostala polja (drugo i četvrto) brojeve 10 i 11.

8	10	12	11	9

8	11	12	10	9

9	10	12	11	8

9	11	12	10	8

U svakom od ta četiri rasporeda, zbroj će biti isti:

$$\begin{aligned}(8+9) + 4 \cdot (10+11) + 6 \cdot 12 &= 17 + 4 \cdot 21 + 6 \cdot 12 \\ &= 17 + 84 + 72 = 173.\end{aligned}$$

8. Oko stola

Oko stola treba sjesti sedmero prijatelja. Prvi je sjeo Neven. Na koliko se načina može rasporediti ostalih šestero prijatelja tako da Iris i Marta sjede jedna do druge, a nijedna od njih ne sjedi pored Nevena?

Rezultat: 144

Rješenje.

Označimo šest mjesta brojevima od 1 do 6, redom, počevši od prvog mjesta pokraj Nevena (svejedno s koje njegove strane).

Iris i Marta mogu sjediti na mjestima 2 i 3, 3 i 4 ili 4 i 5, ali unutar svakog od tih triju slučajeva njih dvije mogu zamijeniti mjesta, što znači da postoji $2 \cdot 3 = 6$ načina za smještaj Iris i Marte.

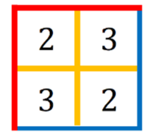
Za svaki mogući način smještanja Iris i Marte, ostalih četvero prijatelja može se smjestiti na preostala 4 mjesta na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina.

Prijatelji se mogu rasporediti na $6 \cdot 24 = 144$ različita načina.

9. Jedanaest boja

Na dvjema prozirnim folijama nacrtane su identične slike sastavljene od 11 paralelnih dužina različitih boja. Zrinka je položila te folije jednu na drugu tako da dužine na slikama budu okomite i tvore tablicu dimenzija 10×10. U svako polje te tablice Zrinka je upisala ukupan broj različitih boja na njegovom rubu. Koliki je zbroj svih 100 brojeva koje je Zrinka upisala?

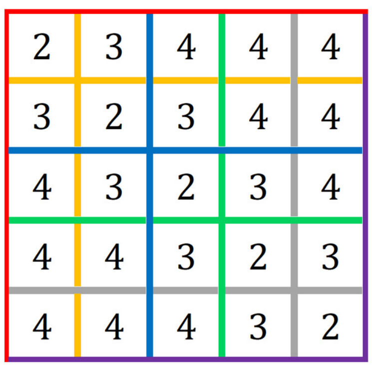
Na slici je tablica dimenzija 2×2 nastala na isti način koristeći tri različite boje.

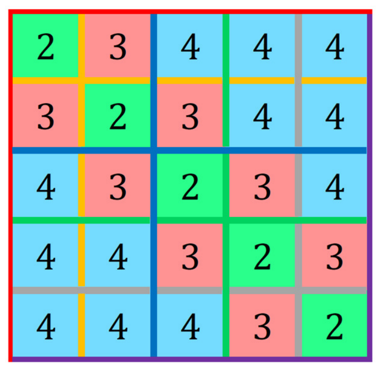


Rezultat: 362

Rješenje.

Promotrimo tablicu dimenzija 5×5 nastalu koristeći šest različitih boja.





Obojimo li sva polja s istim brojem jednom bojom, kao na desnoj slici, možemo uočiti da je u svakom polju na dijagonali upisan broj 2, u njima susjednim poljima broj 3, a u svim ostalim poljima broj 4.

Objasnimo zašto je tako.

Svako je polje omeđeno s četiri dužine. Najmanji broj koji može biti upisan u pojedino polje je 2, a najveći 4. Dvije dužine iste boje uvijek se sijeku na dijagonali. Zato polja na dijagonali (zelena polja) imaju vertikalne stranice obojane istim dvjema bojama kojima su obojane njihove horizontalne stranice. U svim poljima na dijagonali upisan je broj 2.

Polja koja su susjedna poljima na dijagonali (crvena polja) imaju po jedan vrh na dijagonali u kojem se sijeku istobojne dužine. Zato su rubovi takvih polja obojani s ukupno tri različite boje pa su u njima upisani brojevi 3. Sva ostala polja imaju četiri stranice različitih boja te su u njima upisani brojevi 4.

Isto vrijedi i za Zrinkinu tablicu dimenzija 10×10.

U deset zelenih polja na dijagonali, Zrinka je upisala broj 2.

U sva crvena polja, a ima ih $9 + 9 = 18$, Zrinka je upisala broj 3.

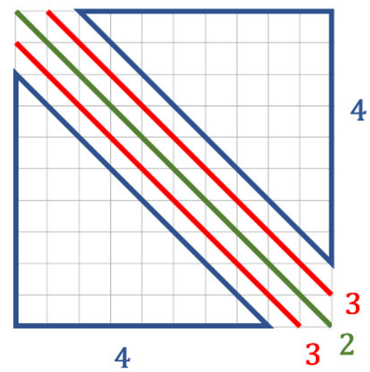
U sva plava polja Zrinka je upisala broj 4.

Takvih je polja

$$100 - (10 + 18) = 72.$$

Ukupan zbroj svih upisanih brojeva je

$$10 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 72 \cdot 4 = 20 + 54 + 288 = 362.$$

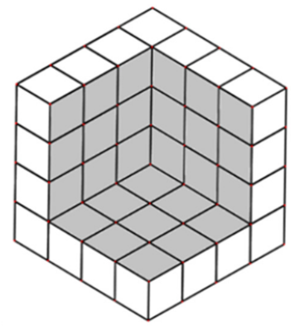


Napomena.

Do rješenja možemo doći i tako da odredimo za koliko je zbroj brojeva manji od $4 \cdot 100 = 400$ (to bi bio zbroj da je u svakom polju upisan broj 4). U deset polja na dijagonali upisan je broj 2, pa treba oduzeti $10 \cdot 2$, a u 18 polja ispod i iznad dijagonale je upisan broj 3 pa treba oduzeti još $18 \cdot 1$. Zato je zbroj svih upisanih brojeva jednak $400 - 20 - 18 = 362$.

10. Tijelo od kockica

Na stranama igraće kockice nalaze se brojevi od 1 do 6. Nasuprot broja 1 je broj 6, nasuprot broja 2 nalazi se broj 5, a nasuprot broja 3 broj 4. Iz kocke koja je sastavljena od 64 takve kockice uklonjeno je 27 kockica koje također tvore kocku. Tako dobiveno tijelo prikazano je na slici. Zbroj brojeva na sivo obojenim poljima tijela je 27. Koliki je najveći mogući zbroj svih brojeva na stranama tako dobivenog tijela koje nisu sivo obojene?



Rezultat: 375

Rješenje.

Strane igraće kockice nazivamo poljima. Na tijelu je 27 polja obojeno sivom bojom, a zbroj brojeva koji su na njima zapisani je 27. To znači da je na svakom od sivih polja zapisan broj 1. Kako bi zbroj brojeva na stranama tijela bio najveći mogući, na poljima koja nisu siva, a nalaze se na stranama tijela moraju biti zapisani najveći mogući brojevi.

Promotrimo najprije kockice koje imaju jednu sivu stranu i brojeve koji su zapisani na njihovim vidljivim stranama.

- Ako je na kockici vidljiva jedna strana koja nije siva, na njoj je zapisan broj 6. Takvih je kockica 12 pa je zbroj brojeva koji su zapisani na vidljivim stranama tih kockica jednak $12 \cdot 6 = 72$.
- Ako su na kockici vidljive dvije strane koje nisu sive, na njima su zapisani brojevi 5 i 6. Takvih je kockica 12 pa je zbroj $12 \cdot (5 + 6) = 132$.
- Ako su na kockici vidljive tri strane koje nisu sive, na njima su zapisani brojevi 4, 5 i 6. Takve su kockice 3 pa je zbroj $3 \cdot (4 + 5 + 6) = 45$.

Preostaju nam kockice koje nemaju niti jednu sivu stranu. Takvih je kockica 10.

- Na njih 4 su vidljive 3 strane s brojevima 4, 5 i 6 pa je zbroj $4 \cdot (4 + 5 + 6) = 60$.
- Na njih 6 su vidljive 2 strane s brojevima 5 i 6 pa je zbroj $6 \cdot (5 + 6) = 66$.

Najveći mogući zbroj svih brojeva na vidljivim stranama koje nisu sivo obojene tako dobivenog tijela je $72 + 132 + 45 + 60 + 66 = 375$.