DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

Vodice, 28. travnja 2026.

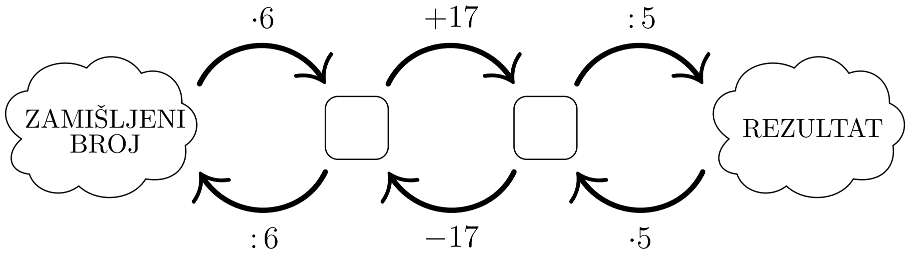
Zadatak OŠ-5.1.

Lovre je zamislio prirodan broj. Pomnožio ga je brojem 6, rezultatu je dodao 17, a dobiveni zbroj podijelio brojem 5. Dobio je troznamenkasti prirodni broj kojem je znamenka jedinica jednaka znamenki stotica, a zbroj znamenaka iznosi 10. Koji je broj Lovre mogao zamisliti?

Rješenje.

Troznamenkasti brojevi kojima je zbroj znamenaka 10, a znamenke jedinica i stotica jednake su 181, 262, 343, 424 i 505.

Primijetimo da je zamišljeni broj pomnožen sa 6 sigurno paran broj, a ako mu dodamo 17 sigurno dobivamo neparan broj. Konačni rezultat dobije se dijeljenjem tog broja s 5, što znači da rezultat ne može biti 262 niti 424 jer su to parni brojevi.



Zadatak ćemo rješavati unatrag: tako da iz konačnog broja dođemo do početnog broja uzastopno primjenjujući suprotne računske operacije, i to obrnutim redoslijedom.

Rezultat	$\cdot \mathbf{5}$	$\mathbf{-17}$	$: \mathbf{6}$
181	905	888	148
343	1715	1698	283
505	2525	2508	418

Lovre je mogao zamisliti neki od brojeva 148, 283 ili 418.

Zadatak OŠ-5.2.

Dva djeteta imaju različite šesteroznamenkaste šifre na lokotima. Obje šifre višekratnici su broja 45, a njihovi troznamenkasti završetci kvadrati su prirodnih brojeva. Za obje šifre vrijedi da im je troznamenkasti završetak za 316 manji od troznamenkastog početka. Odredi te dvije šifre.

Rješenje.

Budući da su šifre višekratnici broja 45, moraju biti djeljive s 5 i s 9. Zato njihova posljednja znamenka mora biti 0 ili 5, a zbroj svih znamenaka djeljiv s 9.

Troznamenkasti završetci šifri kvadrati su prirodnih brojeva. Kvadrat broja završava znamenkom 0 ili 5 samo ako taj broj završava znamenkom 0 ili 5. Stoga promatramo brojeve 10, 15, 20, 25 i 30, čiji su kvadrati redom 100, 225, 400, 625 i 900.

Budući da je završetak za 316 manji od početka, početak dobivamo tako da svakom od tih brojeva pribrojimo 316:

- za završetak 100 dobivamo broj 416100, čiji zbroj znamenaka iznosi 12, pa nije djeljiv s 9
- za završetak 225 dobivamo broj 541225, čiji zbroj znamenaka iznosi 19, pa nije djeljiv s 9
- za završetak 400 dobivamo broj 716400, čiji zbroj znamenaka iznosi 18, pa je broj djeljiv s 9, a time i s 45
- za završetak 625 dobivamo broj 941625, čiji zbroj znamenaka iznosi 27, pa je broj djeljiv s 9, a time i s 45
- za završetak 900 dobivamo broj 1216900, koji nije šesteroznamenkast, pa ne zadovoljava uvjete zadatka.

Zato su tražene šifre 716400 i 941625.

Zadatak OŠ-5.3.

Dora, Eva i Frane rješavali su matematičke zadatke iz iste zbirke. Ako zbrojimo broj zadataka koje je riješila Dora, broj zadataka koje je riješila Eva i broj zadataka koje je riješio Frane, dobivamo 63. Odredi koliko su ukupno različitih zadataka riješili ako vrijedi:

- Eva je riješila jedan zadatak manje od Frane, a Frane jedan zadatak manje od Dore.
- Dora i Eva riješile su 12 istih zadataka, dok su Dora i Frane riješili 8 istih zadataka.
- Dora je riješila 7 zadataka koje nisu riješili ni Eva ni Frane.
- Od zadataka koje je riješio Frane, točno trećinu je riješila i Eva.

Rješenje.

Označimo broj zadataka koje je riješila Dora s D, Eva s E, a Frane s F. Iz uvjeta zadatka zapisujemo sljedeće jednadžbe:

$$D + E + F = 63$$

$$E = F - 1$$

$$F = D - 1, \text{ odnosno } D = F + 1.$$

Nakon zamjena u početnoj jednadžbi dobivamo:

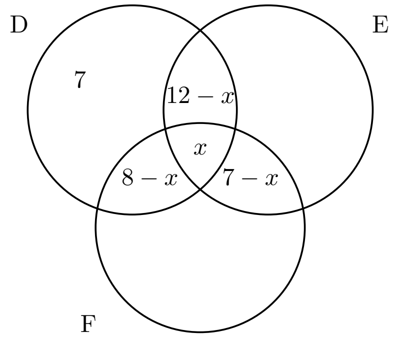
$$(F + 1) + (F - 1) + F = 63$$

$$3F = 63$$

$$F = 21.$$

Frane je dakle riješio 21 zadatak, Dora 22 zadatka, a Eva 20 zadataka.

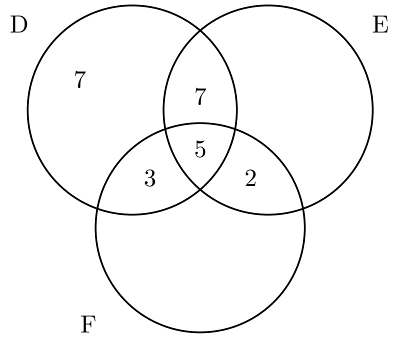
Iz danih uvjeta znamo koliko istih zadataka su riješili pojedini parovi učenika. Trećina Franinog broja riješenih zadataka iznosi $\frac{1}{3} \cdot 21 = 7$, a to je broj istih zadataka koje su riješili Eva i Frane. Označimo broj zadataka koje su riješili i Dora i Eva i Frane s x te prikažimo podatke koje znamo Vennovim dijagramom.



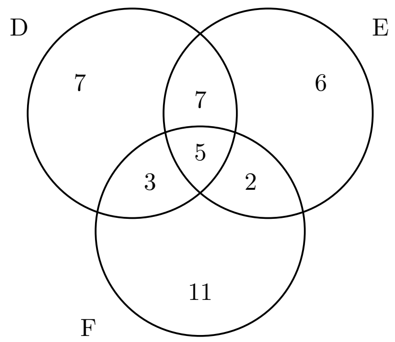
Dora je ukupno riješila 22 zadatka, iz čega dobivamo jednadžbu

$$7 + (12 - x) + x + (8 - x) = 22,$$

čije je rješenje $x = 5$. Uvrštavanjem dobivamo sljedeći Vennov dijagram.



Budući da znamo koliko su ukupno zadataka riješili Eva i Frane, možemo dopuniti Vennov dijagram do kraja.



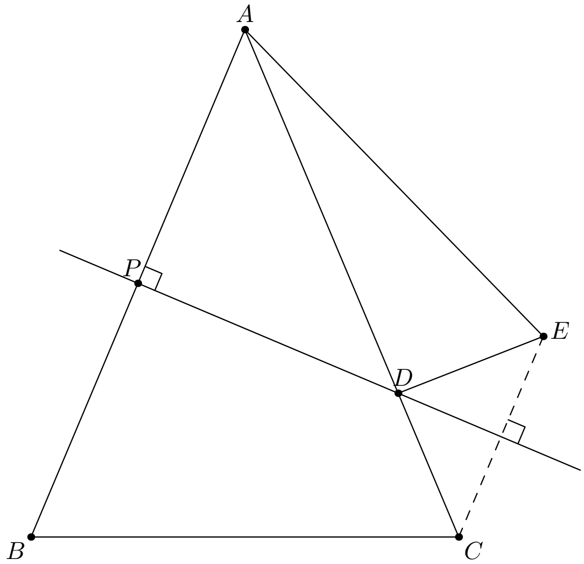
Konačno, ukupan broj različitih zadataka koje su riješili Dora, Eva i Frane je

$$7 + 7 + 6 + 3 + 5 + 2 + 11 = 41.$$

Zadatak OŠ-5.4.

Jednakokračan trokut ABC opsega 50 cm ima osnovicu $\overline{BC}$ duljine 14 cm. Neka je P polovište kraka $\overline{AB}$. Okomica na pravac AB kroz točku P siječe krak $\overline{AC}$ u točki D. Osnom simetrijom s obzirom na pravac PD točka C preslikana je u točku E. Odredi opseg trokuta ADE.

Rješenje.



Opseg trokuta ABC je 50 cm, a duljina osnovice 14 cm, pa je zbroj duljina oba kraka $50 - 14 = 36$ cm, a duljina jednog kraka $36 : 2 = 18$ cm.

Točka D nalazi se na osi simetrije, a točka C preslikava se u točku E, iz čega slijedi da se dužina $\overline{DC}$ preslikava u dužinu $\overline{DE}$, pa vrijedi $|DC| = |DE|$.

Budući da je pravac PD okomit na dužinu $\overline{AB}$ i prolazi njezinim polovištem, zaključujemo da se točka A osnom simetrijom s obzirom na pravac PD preslikava u točku B.

Kako se točka E preslikava u točku C, zaključujemo da se dužina $\overline{AE}$ preslikava u dužinu $\overline{BC}$ s obzirom na pravac PD kao os simetrije, te vrijedi $|AE| = |BC| = 14$ cm.

Opseg trokuta ADE je

$$|AD| + |DE| + |AE| = |AD| + |DC| + 14 = |AC| + 14 = 18 + 14 = 32\,\text{cm}.$$

Zadatak OŠ-5.5.

U Maloj ulici pokraj mora nalazi se točno šest kućica u nizu. Svaku kućicu treba obojiti jednom od triju boja: plavom, zelenom ili bijelom. Na koliko se različitih načina mogu obojiti kućice u Maloj ulici tako da se upotrijebe sve tri boje i da svake dvije susjedne kućice budu različitih boja?

Prvo rješenje.

Prve dvije kućice u nizu moraju biti različite boje. Boju prve kućice možemo odabrati na tri načina, a boju druge kućice na dva načina (tako da bude različita od prve). Dakle, prve dvije kućice možemo obojiti na $3 \cdot 2 = 6$ načina.

Dovoljno je odrediti broj načina da se oboji sve kućice u jednom od tih slučajeva jer će u svakom biti jednak broj načina.

Odredimo broj načina da se oboji svih šest kućica ako je prva kućica plava, a druga zelena.

Budući da barem jedna kućica mora biti bijela, promotrimo različite slučajeve ovisno na kojem mjestu se pojavljuje prva bijela kućica.

Ako je kućica bijele boje prvi put na trećem mjestu u nizu, onda za svaku iduću kućicu imamo dvije mogućnosti jer svaka kućica u nizu mora biti različite boje od prethodne. U tom slučaju imamo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mogućnosti. (Te mogućnosti su $PZBPZP$, $PZBPZB$, $PZBPBP$, $PZBPBZ$, $PZBZPZ$, $PZBZPB$, $PZBZBP$, $PZBZBZ$.)

Ako je kućica bijele boje prvi put na četvrtom mjestu u nizu, onda treća kućica mora biti plava, a za zadnje dvije kućice u nizu imamo po dvije mogućnosti. Dakle, imamo $2 \cdot 2 = 4$ mogućnosti. (Te mogućnosti su $PZPBPZ$, $PZPBZP$, $PZPBPB$, $PZPBZB$.)

Ako je kućica bijele boje prvi put na petom mjestu u nizu, onda treća kućica mora biti plava, četvrta mora biti zelena, a za šestu kućicu imamo dvije mogućnosti. (Te mogućnosti su $PZPZBP$, $PZPZBZ$.)

Konačno, ako je samo šesta kućica bijela, onda se plave i zelene kućice moraju izmijenjivati i imamo samo jedan način. (To je $PZPZPB$.)

Stoga, ako je prva kućica plava, a druga zelena, imamo ukupno $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ mogućnosti.

Mala se ulica prema zadanim uvjetima može obojiti na $6 \cdot 15 = 90$ načina.

Drugo rješenje.

Prebrojimo koliko ima ukupno različitih načina bojanja kućica tako da svake dvije susjedne kućice budu različite boje, bez obzira koliko boja koristili. Za prvu kućicu imamo 3 mogućnosti, a za svaku iduću 2 mogućnosti. To je ukupno $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ mogućnosti.

Potrebno je izuzeti one slučajeve kada nisu upotrijebljene sve tri boje. Jasno je da ne može biti korištena samo jedna boja. Ako su korištene točno dvije boje, postoje 3 moguća para boja: PZ, PB, ZB. Za svaki par postoje samo 2 načina bojanja u nizu (na primjer, za plavu i zelenu imamo $PZPZPZ$ ili $ZPZPZP$). Takvih bojanja ukupno ima $3 \cdot 2 = 6$.

Mala se ulica prema zadanim uvjetima može obojiti na $96 - 6 = 90$ načina.

Treće rješenje.

Za svaku od triju boja mora postojati barem jedna kućica te boje, a najviše tri kućice mogu biti iste boje. Stoga razlikujemo dva slučaja: ili su točno dvije kućice svake boje ili su tri kućice jedne boje, dvije druge boje i jedna treće boje.

Označimo s P plavu, sa Z zelenu, a s B bijelu kućicu.

Prvi slučaj. Prebrojimo koliko ima rasporeda ako imamo dvije plave, dvije bijele i dvije zelene kućice. Ako je prva kućica plava, onda na četiri načina možemo odabrati drugu plavu kućicu, odnosno imamo sljedeća četiri slučaja:

$$P-P---, \quad P--P--, \quad P---P-, \quad P----P.$$

Za svaku od tih mogućnosti ispisujemo moguće rasporede zelenih i bijelih kućica:

$$\begin{array}{cccc} & PZPBZB, & PBPZBZ. & \\ PZBPBZ, & PZBPBZ, & PBZPZB, & PBZPBZ, \\ & PZBZPB, & PBZBPZ, & \\ & PZBZBP, & PBZBZP, & \end{array}$$

Ukupno ima 10 mogućnosti. Na isti način bismo prebrojili koliko ima mogućnosti ako je prva kućica bijela ili zelena, pa ukupno ima $10+10+10=30$ mogućnosti u ovom slučaju.

Drugi slučaj. Ima šest mogućnosti ako su tri kućice jedne boje, dvije druge i jedna treće boje. To su $PPPBBZ$, $PPPZZB$, $BBBPPZ$, $BBBZZP$, $ZZZPPB$, $ZZZBBP$.

Prebrojimo koliko ima rasporeda ako su tri kućice plave, dvije kućice bijele i jedna zelena. Plave kućice možemo rasporediti na sljedeća četiri načina:

$$P-P-P-, \quad P-P--P, \quad P--P-P, \quad -P-P-P.$$

Za svaku od tih mogućnosti ispisujemo moguće rasporede zelenih i bijelih kućica:

$$PZPBPB, \qquad PBPZPB, \qquad PBPBPZ,$$

$$\begin{array}{cc} PBPBZP, & PBPZBP, \\ PZBPBP, & PBZPBP, \end{array}$$

$$BPZPBP, \qquad BPBPZP, \qquad ZPBPBP.$$

U ovom slučaju ima 10 rasporeda, a isto toliko ih ima u svakoj od preostalih pet mogućnosti za boje. Ukupno ima $6 \cdot 10 = 60$ rasporeda u ovom slučaju.

Mala se ulica prema zadanim uvjetima može obojiti na $30+60=90$ načina.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

Vodice, 28. travnja 2026.

Zadatak OŠ-6.1.

Ana i Ivo grade dva jednaka drvena tornja. Ana može sama izgraditi toranj za 30 minuta, a Ivo za 24 minute. Nakon što su prvi toranj zajedno gradili 10 minuta, Ivo je nastavio graditi prvi toranj, a Ana je počela graditi drugi toranj. Čim je dovršio prvi toranj, Ivo se pridružio Ani i zajedno su dovršili drugi toranj. Za koliko su vremena Ana i Ivo izgradili oba tornja?

Prvo rješenje.

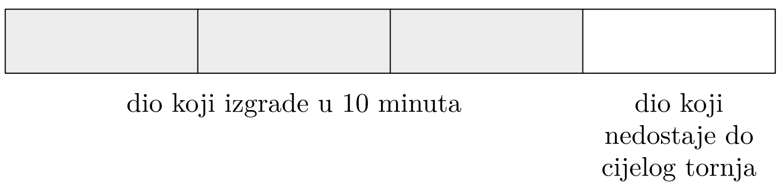
Ana može izgraditi toranj za 30 minuta, a Ivo za 24 minute. Kako je $V(30,24) = 120$, slijedi da Ana u 120 minuta može izgraditi 4 tornja, a Ivo 5 tornjeva.

Primijetimo da ako Ana i Ivo grade toranj istovremeno, ukupno obavljeni posao u zadanom vremenu je isti, bez obzira na to rade li oni na istom tornju ili svatko od njih na jednom od dva jednaka tornja.

To znači da bi zajedno u 120 minuta izgradili 9 tornjeva, odnosno za jedan im toranj treba $\frac{120}{9} = \frac{40}{3}$ minuta, a za dva im tornja onda treba $2 \cdot \frac{40}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$ minuta, odnosno 26 minuta i 40 sekundi.

Drugo rješenje.

U prvih deset minuta gradnje Ana izgradi $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ prvog tornja, a Ivo $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ prvog tornja, to jest zajedno izgrade $\frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3}{4}$ tornja. Prikažimo to grafički:



Sa crteža je jasno da je dio koji im još preostaje izgraditi tri puta manji od dijela kojeg su dotad izgradili. Stoga, da su cijeli toranj gradili zajedno, tada bi im bila potrebna još trećina vremena od 10 minuta, to jest $\frac{10}{3}$ minuta. To znači da cijeli toranj mogu izgraditi zajedno za $10 + \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$ minuta.

Kao u prethodnom rješenju sada zaključujemo da je ukupno vrijeme koje im je potrebno za izgradnju dvaju jednakih tornjeva jednako dvostrukom vremenu izgradnje jednog tornja, to jest $2 \cdot \frac{40}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$ minuta, odnosno 26 minuta i 40 sekundi.

Treće rješenje.

U jednoj minuti Ivo izgradi $\frac{1}{24}$ tornja, a Ana $\frac{1}{30}$ tornja.

Stoga zajedno izgrade $\frac{1}{24} + \frac{1}{30} = \frac{5}{120} + \frac{4}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40}$ tornja u jednoj minuti.

Zajedno su prvi toranj gradili 10 minuta, pa su za to vrijeme izgradili $10 \cdot \frac{3}{40} = \frac{3}{4}$ prvog tornja.

Nakon toga je Ivo sam gradio $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ prvog tornja, za što mu je trebalo još $\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$ minuta.

U tih 6 minuta Ana je izgradila $\frac{1}{30} \cdot 6 = \frac{1}{5}$ drugog tornja.

Ostalo im je zajednički izgraditi $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = \frac{32}{40}$ drugog tornja. Kako u jednoj minuti izgrade $\frac{3}{40}$ tornja, trebat će im još 10 punih minuta i $\frac{2}{3}$ minute, tj. 10 minuta i 40 sekundi.

Ukupno vrijeme gradnje oba tornja je $10\,\text{min} + 6\,\text{min} + 10\,\text{min} + 40\,\text{s} = 26\,\text{min}\ 40\,\text{s}$.

Zadatak OŠ-6.2.

U trokutu ABC simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ i simetrala stranice $\overline{AC}$ sijeku se u točki D koja pripada stranici $\overline{AB}$. Nožište visine iz vrha C dijeli dužinu $\overline{BD}$ na dvije sukladne dužine. Odredi veličine kutova trokuta ABC.

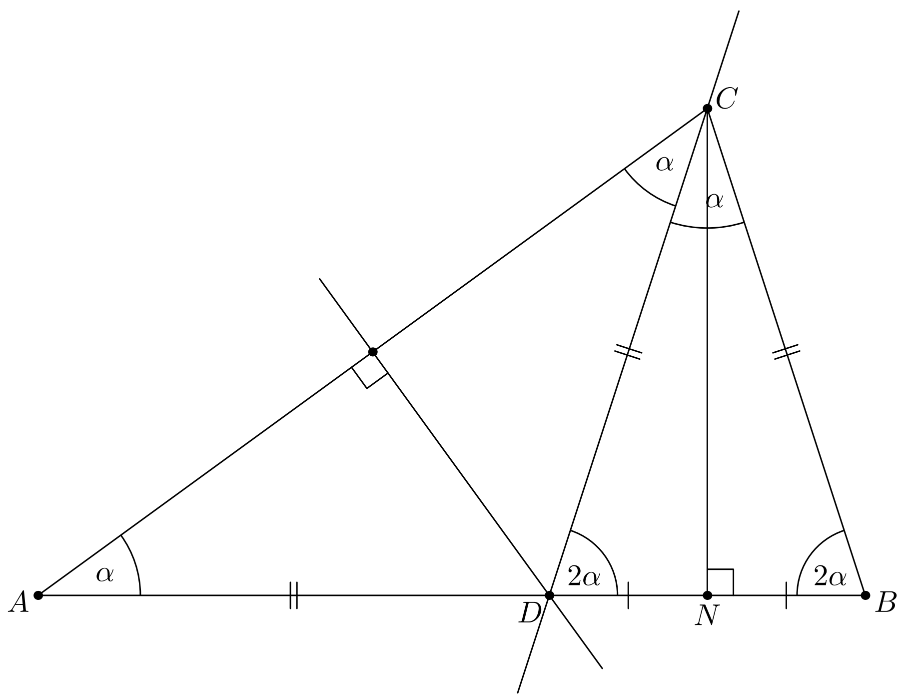
Rješenje.

Neka je $|\sphericalangle BAC| = \alpha$. Točka D pripada simetrali stranice $\overline{AC}$ pa je $|AD| = |DC|$, odnosno trokut ADC je jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$. Tada je i $|\sphericalangle ACD| = \alpha$.

Pravac CD simetrala je kuta ACB pa je i $|\sphericalangle DCB| = \alpha$.

Kut BDC vanjski je kut trokuta ADC pa je $|\sphericalangle BDC| = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

Promotrimo trokut DBC. Prema uvjetu zadatka nožište N visine trokuta ABC iz vrha C polovište je dužine $\overline{DB}$, tj. pravac kojem pripada visina $\overline{CN}$ simetrala je stranice $\overline{DB}$ pa vrijedi $|DC| = |BC|$, odnosno trokut DBC je jednakokračan. Tada je i $|\sphericalangle CBD| = 2\alpha$.



Veličine kutova trokuta ABC su $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CBA| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACB| = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

Njihov je zbroj $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, iz čega slijedi $5\alpha = 180°$, tj. $\alpha = 36°$.

Konačno, $|\sphericalangle BAC| = 36°$, $|\sphericalangle CBA| = 72°$, $|\sphericalangle ACB| = 72°$.

Zadatak OŠ-6.3.

Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$ kojima su sve znamenke različite od nule takve da vrijedi

$$D(\overline{abc}, \overline{cba}) = 18 \quad \text{i} \quad D(\overline{abc}, \overline{acb}) = 9.$$

Rješenje.

Brojevi $\overline{abc}$ i $\overline{cba}$ su djeljivi s 18, dakle parni su, iz čega slijedi da su znamenke a i c parne. One ne mogu biti međusobno jednake jer bi tada brojevi $\overline{abc}$ i $\overline{cba}$ bili jednaki, pa im 18 ne bi bio najveći zajednički djelitelj.

Kako je $\overline{abc}$ paran, a najveći zajednički djelitelj brojeva $\overline{abc}$ i $\overline{acb}$ je neparan, znamenka b mora biti neparna.

Zbog djeljivosti s 9, zbroj znamenki $a + b + c$ mora biti djeljiv s 9. Kako su a i c parni, a b neparan, ovaj zbroj je neparan. Slijedi da je $a + b + c = 9$. Kako su sve znamenke a, b, c barem 1, iz posljednje jednakosti slijedi da su sve manje od 8.

Zaključujemo da mora biti $a, c \in \{2, 4, 6\}$. Jedine mogućnosti za (a, c) koje zadovoljavaju sve uvjete jesu

$$(2, 4), (2, 6), (4, 2), (6, 2).$$

Stoga su 234, 216, 432 i 612 jedini kandidati za tražene troznamenkaste brojeve.

Za broj $\overline{abc} = 216$ vrijedi da 4 dijeli brojeve $\overline{abc} = 216$ i $\overline{cba} = 612$, zbog čega njihov najveći zajednički djelitelj nije 18. Iz istog razloga broj $\overline{abc} = 612$ ne zadovoljava uvjete zadatka.

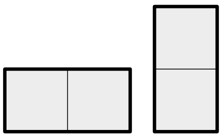
Preostaje provjeriti zadovoljavaju li brojevi 234 i 432 uvjete zadatka. To se lako vidi iz njihova rastava na proste faktore:

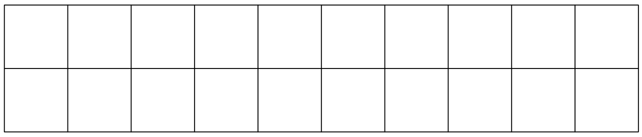
$$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13, \qquad 432 = 2^4 \cdot 3^3, \qquad 243 = 3^5 \quad \text{i} \quad 423 = 3^2 \cdot 47.$$

Dakle, traženi troznamenkasti brojevi su 234 i 432.

Zadatak OŠ-6.4.

Koristeći deset jednakih pločica, čije su dimenzije 2×1, treba u potpunosti prekriti pravokutnu ploču dimenzija 10×2. Pločice se mogu postaviti horizontalno ili vertikalno. Na koliko se načina to može učiniti?





Prvo rješenje.

Primijetimo da sve horizontalne pločice moraju biti postavljene u parovima, po dvije pločice jedna ispod druge.

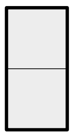
Gledajući ploču slijeva nadesno, prekrivanje može započeti jednom vertikalnom ili parom horizontalnih pločica.

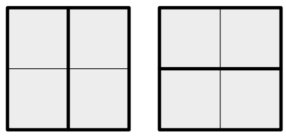
Promotrimo slučaj kad prekrivanje započinje jednom vertikalnom pločicom. Tada je duljina ploče koju još trebamo prekriti za točno jedan manja, pa ćemo ostatak ploče prekriti na točno onoliko načina koliko postoji za prekrivanje ploče koja ima duljinu za jedan manju.

Promotrimo slučaj kad prekrivanje započinje dvjema horizontalnim pločicama. Tada je duljina koju još trebamo prekriti za točno dva manja, pa ćemo ostatak ploče prekriti na točno onoliko načina koliko imamo za prekrivanje ploče koja ima duljinu za dva manju.

Označimo s n duljinu ploče. Iz prethodne rasprave slijedi da je broj načina prekrivanja ploče duljine n jednak zbroju broja načina prekrivanja ploče duljine $n-2$ i broja načina prekrivanja ploče duljine $n-1$.

Za ploču dimenzija 1×2 postoji točno jedan način prekrivanja jednom pločicom, a za ploču dimenzija 2×2 postoje točno dva načina prekrivanja dvjema pločicama.





Ispišimo sada broj načina prekrivanja za sve ploče dimenzija $n \times 2$ od $n = 1$ do $n = 10$.

n	broj načina prekrivanja
1	1
2	2
3	$1+2=3$
4	$2+3=5$
5	$3+5=8$

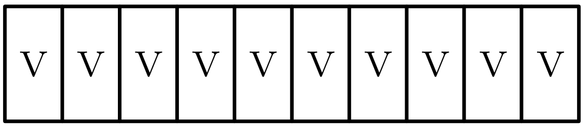
n	broj načina prekrivanja
6	$5+8=13$
7	$8+13=21$
8	$13+21=34$
9	$21+34=55$
10	$34+55=89$

Broj načina prekrivanja ploče dimenzija 10×2 s deset pločica dimenzija 2×1 iznosi 89.

Drugo rješenje.

Kao u prethodnom rješenju, uočavamo da horizontalne pločice uvijek moraju biti postavljene u paru jedna ispod druge. Svaki par horizontalnih pločica zauzima dva stupca pa se na ploči dimenzija 10×2 može pojaviti od nula do pet takvih parova. Prebrojimo koliko različitih prekrivanja ploče imamo u svakom od tih slučajeva.

Ako nema horizontalnih pločica, sve pločice su vertikalne, a tada postoji samo jedno takvo prekrivanje ploče.



Ako postoji točno jedan par horizontalnih pločica, tada preostaje osam vertikalnih pločica. Par horizontalnih pločica možemo postaviti na 9 različitih pozicija na ploči, stoga u ovom slučaju postoji 9 različitih prekrivanja ploče.

Ako postoje točno dva para horizontalnih pločica, tada preostaje šest vertikalnih pločica. Prvi par horizontalnih pločica možemo smjestiti na 8 načina, a drugi par na 7 načina. Time smo dva puta prebrojali iste rasporede, stoga u ovom slučaju postoji $(8 \cdot 7) : 2 = 28$ različitih prekrivanja.

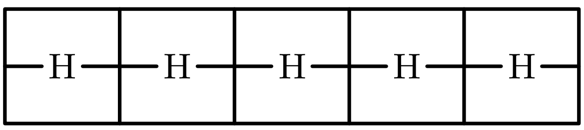
Ako postoje točno tri para horizontalnih pločica, tada preostaju četiri vertikalne pločice. Prebrojimo koliko različitih prekrivanja imamo u ovom slučaju, ovisno o položaju prvog para horizontalnih pločica:

- ako se prvi par horizontalnih pločica nalazi na prvom mjestu, tada imamo $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ rasporeda druga dva horizontalna para pločica na preostala mjesta
- ako je prvi par na drugom mjestu, tada imamo $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ rasporeda
- ako je prvi par na trećem mjestu, tada imamo $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ rasporeda
- ako je prvi par na četvrtom mjestu, tada imamo $(3 \cdot 2) : 2 = 3$ rasporeda
- ako je prvi par na petom mjestu, tada imamo samo 1 raspored.

Ukupno u ovom slučaju imamo $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$ različitih prekrivanja ploče.

Ako postoje točno četiri para horizontalnih pločica, tada preostaju dvije vertikalne pločice, koje možemo postaviti na $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ različitih načina.

Ako postoji pet parova horizontalnih pločica, oni zauzimaju cijelu ploču, pa postoji samo jedno prekrivanje u ovom slučaju.



Sve zajedno, postoji $1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$ različitih prekrivanja ploče dimenzija 10×2 s deset pločica dimenzija 2×1.

Zadatak OŠ-6.5.

U rombu $ABCD$ vrijedi $|\sphericalangle BAD| = 120°$. Točka E pripada stranici $\overline{AB}$, a točka F stranici $\overline{AD}$ pri čemu je $|AE| + |AF| = |AB|$. Dokaži da je trokut CFE jednakostraničan.

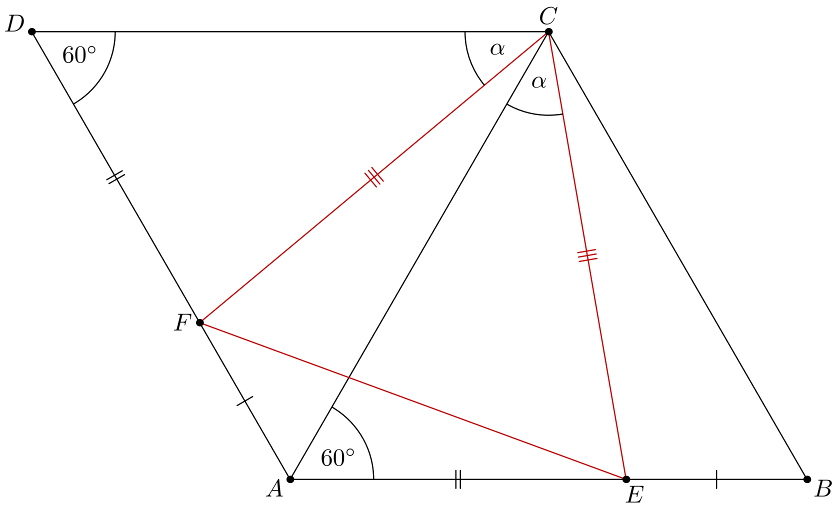
Prvo rješenje.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $|AE|+|AF| = |AB|$, pa budući da vrijedi i $|AE|+|BE| = |AB|$, vrijedi $|AF| = |BE|$. Zbog $|DF| + |AF| = |AD| = |AB|$ vrijedi $|AE| = |DF|$.

Četverokut $ABCD$ je romb, pa su mu sve stranice jednakih duljina, nasuprotni kutovi su sukladni, a susjedni kutovi suplementarni. Tupim je kutovima veličina $120°$, pa je veličina šiljastih kutova $180° - 120° = 60°$.

Nacrtajmo dijagonalu $\overline{AC}$. Dijagonala romba raspolavlja kut $\sphericalangle BAD$ na kutove veličine $60°$, pa su trokuti ABC i ACD jednakostranični, tj. dijagonala $\overline{AC}$ sukladna je stranici romba.

Promotrimo trokute DFC i AEC. Vrijedi $|CD| = |AC|$, $|\sphericalangle FDC| = |\sphericalangle EAC| = 60°$ i $|DF| = |AE|$, pa su ovi trokuti sukladni po SKS poučku. Tada je $|CF| = |CE|$, pa je trokut CFE jednakokračan s osnovicom $\overline{EF}$. Također, vrijedi $|\sphericalangle DCF| = |\sphericalangle ACE| = \alpha$.



Trokuti CFA i CEB sukladni su po SSS poučku. Stoga vrijedi $|\sphericalangle FCA| = |\sphericalangle ECB| = \beta$.

Sada je $|\sphericalangle DCB| = 2\alpha + 2\beta = 120°$, $\alpha + \beta = 60° = |\sphericalangle FCE|$.

Trokut CFE je jednakokračan s kutom među krakovima veličine $60°$. Kutovi uz njegovu osnovicu $\overline{EF}$ su sukladni, zbroj veličina im je $120°$, pa je veličina svakog jednaka $60°$.

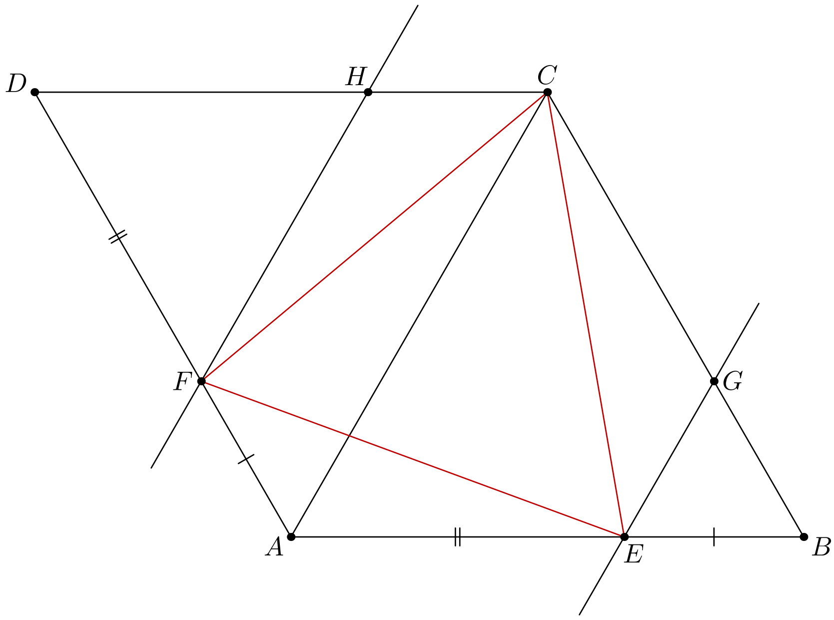
Konačno, trokut CFE je jednakostraničan, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju možemo pokazati da vrijedi

$$|AE| = |DF|, \qquad |BE| = |AF|, \qquad \text{te} \qquad |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAC| = 60^\circ.$$

Nacrtajmo pravce koji sadrže točke E i F, a usporedni su s dijagonalom $\overline{AC}$. Neka su G i H presjeci tih pravaca sa stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ redom.



Promotrimo trokute EBG i DFH. Mjere kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BEG$ uz presječnicu $\overline{AB}$ usporednih pravaca $\overline{AC}$ i $\overline{EG}$ jednake su i iznose 60°, pa je trokut EBG jednakostraničan i vrijedi $|BE| = |BG| = |EG|$.

Mjere kutova $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle HFD$ uz presječnicu $\overline{AD}$ usporednih pravaca $\overline{AC}$ i $\overline{FH}$ jednake su i iznose 60°, pa je trokut DFH jednakostraničan i vrijedi $|DF| = |DH| = |FH|$.

Vrijedi i $|CH| = |AF|$ te $|CG| = |AE|$.

Promotrimo trokute FAE, EGC i CHF. U njima vrijedi sljedeće:

- $|AF| = |EG| = |CH|$
- $|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle CGE| = |\sphericalangle FHC| = 120^\circ$
- $|AE| = |CG| = |FH|$.

Zaključujemo da su ovi trokuti svi međusobno sukladni po SKS poučku.

Tada je i $|EF| = |CE| = |CF|$, pa je trokut CFE jednakostraničan, što je i trebalo dokazati.

Zadatak OŠ-7.1.

Marica je zapisala jedan prirodni broj, a zatim još nekoliko brojeva. Svaki sljedeći broj za 5 je manji od dvostruke vrijednosti broja koji je zapisan neposredno prije njega. Zbroj prvog i četvrtog zapisanog broja iznosi 28. Koliko je najviše brojeva Marica mogla zapisati ako razlika između posljednja dva zapisana broja nije veća od 500?

Rješenje.

Označimo redom s a, b, c i d prva četiri napisana broja. Tada je $b = 2a - 5$, te vrijedi

$$c = 2(2a-5) - 5 = 4a - 15 \qquad \text{i} \qquad d = 2(4a-15) - 5 = 8a - 35.$$

Budući da je $a + d = 28$, dobivamo jednadžbu

$$a + 8a - 35 = 28$$

za vrijednost prvog zapisanog broja, čije rješenje je $a = 7$.

Brojeve koje je Marica zapisala kao i razlike susjednih brojeva, zapisujemo u tablicu.

redni broj	zapisani broj	razlika posljednja dva broja
1.	7	(nema)
2.	$2 \cdot 7 - 5 = 9$	$9 - 7 = 2$
3.	$2 \cdot 9 - 5 = 13$	$13 - 9 = 4$
4.	$2 \cdot 13 - 5 = 21$	$21 - 13 = 8$
5.	$2 \cdot 21 - 5 = 37$	$37 - 21 = 16$
6.	$2 \cdot 37 - 5 = 69$	$69 - 37 = 32$
7.	$2 \cdot 69 - 5 = 133$	$133 - 69 = 64$
8.	$2 \cdot 133 - 5 = 261$	$261 - 133 = 128$
9.	$2 \cdot 261 - 5 = 517$	$517 - 261 = 256$
10.	$2 \cdot 517 - 5 = 1029$	$1029 - 517 = \mathbf{512}$

Dakle, Marica je mogla zapisati najviše 9 brojeva.

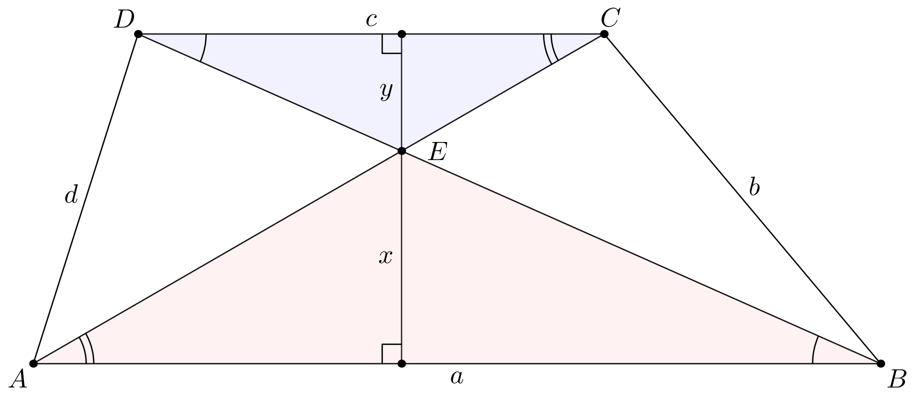
Zadatak OŠ-7.2.

Stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta $ABCD$ su usporedne, a njegove se dijagonale sijeku u točki E. Ako je površina trokuta ABE jednaka 72, a površina trokuta ECD jednaka 50, kolika je površina četverokuta $ABCD$?

Rješenje.

Četverokut $ABCD$ je trapez. Neka je $a = |AB|$, $c = |CD|$ i v visina trapeza.

Prema poučku o kutovima uz presječnicu vrijedi $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle BDC|$ i $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCA|$. Stoga su, prema K–K poučku, trokuti ABE i ECD slični.



Neka su x i y redom duljine visine trokuta ABE i ECD iz vrha E.

Tada je $x + y = v$ i vrijedi $\dfrac{ax}{2} = 72$, $\dfrac{cy}{2} = 50$.

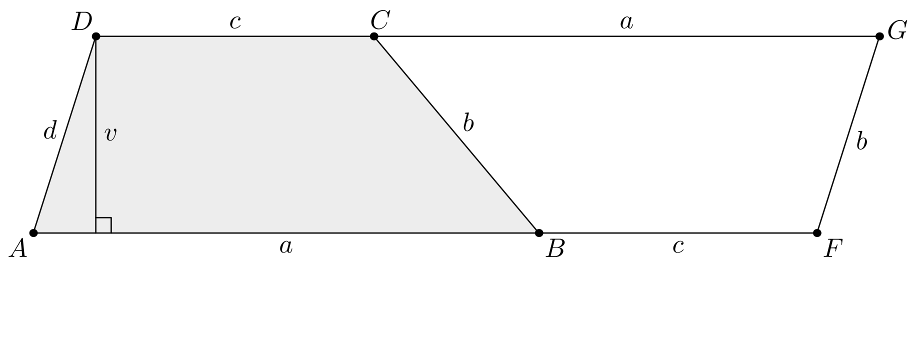
Neka je k koeficijent sličnosti trokuta ABE i ECD, tako da je $a : b = x : y = k$.

Tada za površine tih trokuta vrijedi $P(ABE) : P(ECD) = k^2$.

Slijedi $k^2 = 72 : 50 = 1.44$, odnosno $k = 1.2$. Stoga je $a = 1.2c$ i $x = 1.2y$.

Površina trapeza je $P(ABCD) = \dfrac{a+c}{2} \cdot v$.

Naime, trapez možemo sukladnim trapezom nadopuniti do paralelograma čija je površina $(a + c) \cdot v$, a površina trapeza jednaka je polovini površine tog paralelograma.



Dakle, vrijedi

$$P(ABCD) = \frac{1.2c + c}{2} \cdot (1.2y + y) = \frac{2.2c}{2} \cdot (2.2y) = 2.2^2 \cdot \frac{cy}{2} = 4.84 \cdot 50 = 242.$$

Zadatak OŠ-7.3.

Neka je n prirodan broj. Može li se razlomak

$$\frac{(2n+1)(4n+1)}{n(4n+3)}$$

kratiti nekim prirodnim brojem većim od 1?

Prvo rješenje.

Ako razlomak možemo kratiti brojem d, onda je d zajednički djelitelj brojnika i nazivnika.

Pretpostavimo da postoji prirodni broj d koji dijeli brojeve

$$(2n+1)(4n+1) = 8n^2 + 6n + 1 \qquad \text{i} \qquad n(4n+3) = 4n^2 + 3n.$$

Tada d dijeli i broj $2 \cdot (4n^2 + 3n) = 8n^2 + 6n$.

Stoga postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $8n^2 + 6n + 1 = da$ i $8n^2 + 6n = db$.

Budući da vrijedi

$$1 = (8n^2 + 6n + 1) - (8n^2 + 6n) = da - db = d(a - b),$$

zaključujemo da d dijeli 1, odnosno da je $d = 1$.

Dakle, zadani razlomak ne možemo kratiti prirodnim brojem većim od 1.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da, za prirodni broj k, prost broj p dijeli k i $k+1$. Tada postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $k = pa$ i $k+1 = pb$. Slijedi da je $1 = (k+1) - k = pb - pa = p(b-a)$, odnosno p dijeli 1, što nije moguće. Dakle, bilo koja dva uzastopna prirodna broja su relativno prosta.

Ako bi neki prost broj bio zajednički djelitelj brojeva $2n+1$ i n, onda bi taj prost broj bio i zajednički djelitelj brojeva $2n+1$ i $2n$, što nije moguće. Dakle, $D(2n+1, n) = 1$.

Ako bi neki prost broj bio zajednički djelitelj brojeva $2n+1$ i $4n+3$, onda bi taj prost broj bio i zajednički djelitelj brojeva $2 \cdot (2n+1) = 4n+2$ i $4n+3$, što nije moguće. Dakle, $D(2n+1, 4n+3) = 1$.

Iz ove dvije tvrdnje zaključujemo da ne postoji prost broj koji dijeli $2n+1$ te bilo koji od brojeva n i $4n+3$, pa stoga vrijedi $D(2n+1, n(4n+3)) = 1$.

Ako bi neki prost broj bio zajednički djelitelj brojeva $4n+1$ i n, onda bi taj prost broj bio i zajednički djelitelj brojeva $4n+1$ i $4n$, što nije moguće. Dakle, $D(4n+1, n) = 1$.

Ako bi neki prost broj bio zajednički djelitelj brojeva $4n+1$ i $4n+3$, onda bi taj prost broj dijelio i njihovu razliku koja iznosi 2. Taj prost broj bi morao biti 2, ali to nije moguće jer su brojevi $4n+1$ i $4n+3$ neparni. Dakle, $D(4n+1, 4n+3) = 1$.

Iz ove dvije tvrdnje zaključujemo $D(4n+1, n(4n+3)) = 1$.

Konačno, kako ne postoji prost broj koji dijeli $n(4n+3)$ te bilo koji od brojeva $2n+1$ i $4n+1$, slijedi $D((2n+1)(4n+1), n(4n+3)) = 1$.

Zaključujemo da je 1 jedini zajednički djelitelj brojnika i nazivnika zadanog razlomka, pa se razlomak ne može kratiti prirodnim brojem većim od 1.

Napomena: Brojevi $4n$, $4n+1$, $4n+2$ i $4n+3$ uzastopni su prirodni brojevi, te smo ideju za prethodno rješenje mogli dobiti promatranjem razlomka

$$\frac{(4n+2)(4n+1)}{4n(4n+3)} = \frac{(2n+1)(4n+1)}{2n(4n+3)},$$

koji se od zadanog razlikuje samo u dodatnom faktoru 2 u nazivniku.

Za bilo koja dva prirodna broja a i b takva da je $a > b$ vrijedi $D(a,b) = D(a-b,b)$. Također, za svaki prirodni broj k vrijedi $D(1,k) = 1$. Stoga smo mogli računati:

$$D(2n+1,n) = D(n+1,n) = D(1,n) = 1.$$

$$D(4n+3,2n+1) = D(2n+2,2n+1) = D(1,2n+1) = 1.$$

$$D(4n+1,n) = D(3n+1,n) = D(2n+1,n) = D(n+1,n) = D(1,n) = 1.$$

Također, vrijedi $D(4n+3,4n+1) = D(2,4n+1)$, a budući da je $4n+1$ neparan broj slijedi $D(2,4n+1) = 1$.

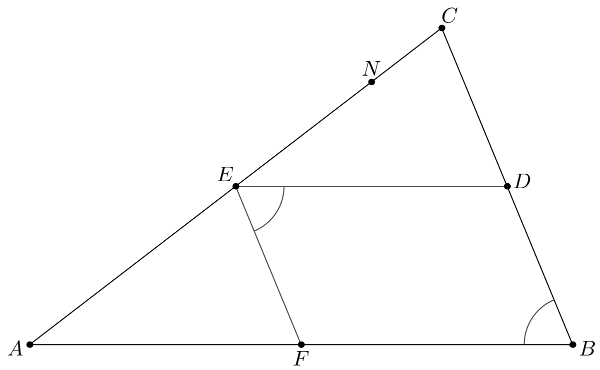
Dakle, faktori koji se pojavljuju u brojniku zadanog razlomka nemaju nijedan zajednički djelitelj veći od 1 s faktorima u nazivniku, pa zaključujemo da se razlomak ne može kratiti prirodnim brojem većim od 1.

Zadatak OŠ-7.4.

Neka su D, E i F redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ šiljastokutnog trokuta ABC. Neka je $\overline{BN}$ visina na stranicu $\overline{CA}$. Dokaži da je $|\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle DNF|$.

Rješenje.

Budući da su $\overline{DE}$ i $\overline{EF}$ srednjice, slijedi da je četverokut $BDEF$ paralelogram. Stoga je $|\sphericalangle FED| = |\sphericalangle DBF|$. (Alternativno, možemo pokazati da su trokuti AFE, FBE, EDC i DEF sukladni jer su svi slični trokutu ABC s koeficijentom sličnosti $1:2$).



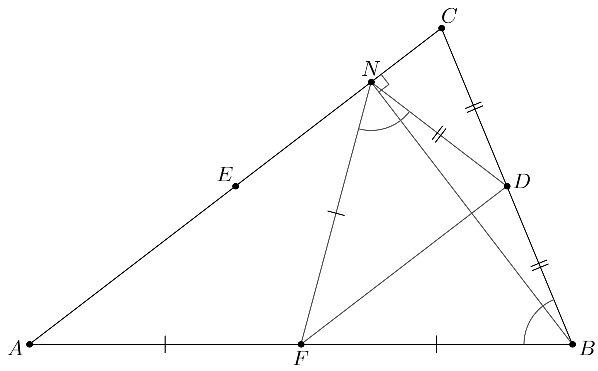
U nastavku ćemo koristiti tvrdnju da je u svakom pravokutnom trokutu polovište hipotenuze jednako udaljeno od sva tri vrha. (Naime, proizvoljni pravokutni trokut XYZ čini polovinu pravokutnika $XYZW$, a dijagonale pravokutnika su sukladne i raspolavljaju se. Ako je S sjecište dijagonala, slijedi $|XS| = |YS| = |ZS|$.)

Promotrimo pravokutni trokut BCN. Budući da je D polovište hipotenuze $\overline{BC}$ slijedi

$$|BD| = |CD| = |ND|.$$

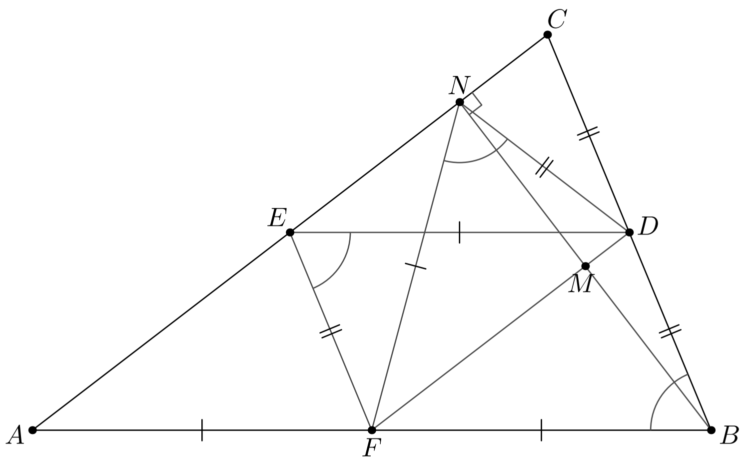
Analogno, u pravokutnom trokutu ABN točka F je polovište hipotenuze, pa vrijedi

$$|AF| = |BF| = |NF|.$$



Prema SSS poučku slijedi da su trokuti FBD i FND sukladni, pa iz sukladnosti slijedi $|\sphericalangle DBF| = |\sphericalangle FND|$. Stoga je $|\sphericalangle FED| = |\sphericalangle DBF| = |\sphericalangle FND|$, što je trebalo i dokazati.

Napomena: Alternativno možemo dokazati da su trokuti DEF i FND sukladni. Budući da je $BDEF$ paralelogram vrijedi $|BF| = |DE|$ i $|BD| = |FE|$, pa zaključujemo da vrijedi $|DN| = |FE|$ i $|DE| = |FN|$.



Prema SSS poučku slijedi da su trokuti DEF i FND sukladni, pa iz sukladnosti slijedi $|\sphericalangle FED| = |\sphericalangle FND|$, što je i trebalo pokazati.

Zadatak OŠ-7.5.

Devet ugašenih žarulja poredano je u red. Žarulje je moguće paliti i gasiti nizom koraka samo prema sljedećem pravilu. U svakom koraku dopušteno je odabrati tri uzastopne žarulje i istovremeno im promijeniti stanje: upaljene ugasiti, a ugašene upaliti.

a) Može li se postići da druga, četvrta, šesta i osma žarulja budu ugašene, a preostalih pet žarulja upaljeno?

b) Koliko je različitih rasporeda stanja svih devet žarulja moguće postići?

Prvo rješenje.

Postoji sedam uzastopnih trojki žarulja. Zamislimo da sa sedam *prekidača* mijenjamo stanje po tri uzastopne žarulje. Prvo, uočimo da za dobivanje određenog rasporeda nije bitno kojim redoslijedom pritišćemo prekidače, već samo koliko puta smo promijenili stanje pojedine žarulje. Nadalje, uočimo da svaki prekidač treba pritisnuti jednom ili ne pritisnuti - pritisnemo li ga paran broj puta, isti je učinak kao da nismo pritisnuli niti jednom, a pritisnemo li ga neparan broj puta, isti je učinak kao da smo ga pritisnuli jednom.

a) Konačno stanje prve žarulje ovisi isključivo o tome hoćemo li prvi prekidač pritisnuti. Kako bi prva žarulja bila upaljena, moramo ga pritisnuti. Tada su upaljene prva, druga i treća žarulja. Konačno stanje druge žarulje, nakon što smo fiksirali stanje prve žarulje, ovisi isključivo o tome hoćemo li drugi prekidač pritisnuti. Pritisnut ćemo ga da žarulju ugasimo i time dobivamo da su upaljene prva i četvrta žarulja. Nastavljamo postupak na isti način; treći prekidač pritisnemo, četvrti ne, peti ne, šesti ne, sedmi da. Time smo dobili da je prvih sedam žarulja naizmjenično upaljeno i ugašeno i to je jedini način na koji smo do takvog rasporeda mogli doći. No, tada je osma žarulja upaljena pa ne možemo postići da sve žarulje budu naizmjenično upaljene i ugašene na traženi način.

b) Sve mogućnosti dobivamo odabirom nekog broja prekidača koje ćemo pritisnuti. Kako imamo dvije mogućnosti za svaki od 7 prekidača (konačno stanje mogu biti i sve ugašene žarulje, što odgovara tome da niti jedan prekidač nismo pritisnuli), imamo $2^7 = 128$ mogućih odabira pritisnutih prekidača.

   Uočimo da svaka dva različita odabira pritisnutih prekidača daju različit raspored stanja svih devet žarulja. Zaista, za dva različita odabira možemo promotriti prvi prekidač u nizu koji se pojavljuje u jednom od tih odabira, ali ne i u drugom. Tada će u pripadnim rasporedima prva žarulja kojoj taj prekidač mijenja stanje imati različita stanja.

   Stoga postoji 128 različitih mogućih rasporeda stanja devet žarulja.

Drugo rješenje.

Obojimo žarulje redom u tri boje:

crvena	bijela	plava	crvena	bijela	plava	crvena	bijela	plava

Na početku imamo nula crvenih, nula bijelih i nula plavih upaljenih žarulja. U svakom koraku mijenjamo stanje točno jednoj žarulji svake boje, pa se za 1 mijenja broj upaljenih žarulja svake boje. Stoga u svakom trenutku brojevi crvenih, plavih i bijelih upaljenih žarulja moraju biti iste parnosti.

a) Ako bi druga, četvrta, šesta i osma žarulja bile ugašene, a preostalih pet žarulja upaljeno, onda bi bile upaljene dvije crvene, dvije plave i jedna plava bijela žarulja, što nije moguće jer brojevi 1 i 2 nisu iste parnosti.

b) Prve tri žarulje nazivamo *prvi blok*, srednje tri žarulje nazivamo *drugi blok*, a posljednje tri žarulje nazivamo *treći blok*.

   Pokažimo da se može postići svaki raspored s istom parnosti broja upaljenih crvenih, bijelih i plavih žarulja.

Najprije pokažimo da se svaki takav raspored može svesti na raspored s jednakim brojem upaljenih crvenih, bijelih i plavih žarulja.

- Ako imamo raspored s po dvije upaljene žarulje dviju boja i niti jednu upaljenu žarulju treće boje, onda jedan od blokova sadrži točno dvije upaljene žarulje. Odaberemo li taj blok, imat ćemo točno jednu žarulje svake boje.
- Ako imamo raspored s dvije upaljene žarulje jedne boje i niti jednom upaljenom žaruljom preostalih dviju boja, onda jedan od blokova sadrži točno jednu upaljenu žarulju. Odaberemo li taj blok, imat ćemo točno jednu žarulje svake boje.
- Ako imamo raspored s po tri upaljene žarulje dviju boja i jednom upaljenom žaruljom treće boje, onda jedan od blokova sadrži dvije upaljene žarulje. Odaberemo li taj blok, imat ćemo točno dvije žarulje svake boje.
- Ako imamo raspored s tri upaljene žarulje jedne boje i jednom upaljenom žaruljom preostalih dviju boje, onda jedan od blokova sadrži jednu upaljenu žarulju. Odaberemo li taj blok, imat ćemo točno dvije žarulje svake boje.

U nastavku ćemo koristiti sljedeći postupak. Promotrimo bilo koje četiri uzastopne žarulje $ABCD$, odabirom žarulja ABC, te žarulja BCD možemo postići da se promijene stanja žarulja A i D, dok stanja žarulja B i C budu ista kao prije primjene tih koraka. Takav postupak nazivamo *okretanje žarulja* A i D.

Pokažimo da se svaki raspored s jednakim brojem upaljenih žarulja iste boje može svesti na raspored u kojem za svaki blok vrijedi da su u tom bloku upaljene sve tri žarulje ili nijedna žarulja.

- Ako je upaljeno svih devet žarulja ili nijedna žarulja, onda odmah imamo takav raspored.
- Neka su upaljene po dvije žarulje svake boje. Postupkom okretanja žarulja možemo postići da su upaljene sve žarulje u prva dva bloka, te nijedna žarulja u trećem bloku.
- Neka je upaljena po jedna žarulja svake boje. Postupkom okretanja žarulja možemo postići da su upaljene sve žarulje u prvom bloku, te nijedna žarulja u druga dva bloka.

Svaku primjenu koraka možemo poništiti primjenom istog koraka. Stoga, ako iz rasporeda X možemo postići raspored Y, onda možemo i iz rasporeda Y postići raspored X.

Očito je da se može postići svaki raspored u kojem za svaki blok vrijedi da su u tom bloku upaljene sve tri žarulje ili nijedna žarulja. Stoga smo pokazali da su svi mogući rasporedi koji se mogu postići (iz početnog rasporeda s devet ugašenih žarulja) upravo rasporedi koji imaju istu parnost broja žarulja svake boje.

Preostaje prebrojiti takve rasporede.

Ako u svakoj boji imamo parno žarulja iste boje, onda za svaku boju imamo četiri mogućnosti: jedna mogućnost je da su sve tri žarulje te boje ugašene, a na tri načina možemo izabrati koje dvije žarulje su upaljene. S obzirom da imamo tri boje, to znači da ima ukupno $4^3 = 64$ takvih rasporeda.

Ako u svakoj boji imamo neparno žarulja iste boje, onda za svaku boju opet imamo četiri mogućnosti: jedna mogućnost je da su sve tri žarulje te boje upaljenje, a na tri načina možemo izabrati jednu upaljenu žarulju. S obzirom da imamo tri boje, to znači da ima ukupno $4^3 = 64$ takvih rasporeda.

Ukupno imamo $64 + 64 = 128$ traženih rasporeda.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

Vodice, 28. travnja 2026.

Zadatak OŠ-8.1.

U bazenu se nalazi određena količina vode, a u njega neprestano dotiče voda stalnom brzinom. Ako se voda ispumpava pomoću sedam jednakih pumpi, bazen se isprazni za jedan sat. Ako su uključene samo dvije od tih pumpi, bazen se isprazni za pet sati. Koliko bi vremena bilo potrebno da se bazen isprazni ako radi samo jedna od tih pumpi?

Rješenje.

Neka je V volumen bazena, D volumen vode koja doteče u bazen u jednom satu, a P volumen vode koju jedna pumpa odvede iz bazena u jednom satu.

Bazen se pomoću sedam motornih pumpi isprazni za jedan sat, a uz pomoć dvije motorne pumpe za pet sati pa vrijedi

$$V = 7P - D \qquad \text{i} \qquad V = 5 \cdot 2P - 5D.$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza dobivamo

$$7P - D = 10P - 5D, \quad \text{tj.} \quad 4D = 3P.$$

Uvrštavanjem $D = \dfrac{3}{4}P$ u $V = 7P - D$ slijedi $V = \dfrac{25}{4}P$.

Neka je t vrijeme potrebno da se bazen isprazni ako radi samo jedna pumpa.

Tada je $V = t \cdot (P - D)$. Slijedi

$$t = \frac{V}{P - D} = \frac{\frac{25}{4}P}{P - \frac{3}{4}P} = 25,$$

odnosno jedna pumpa će isprazniti bazen za 25 sati.

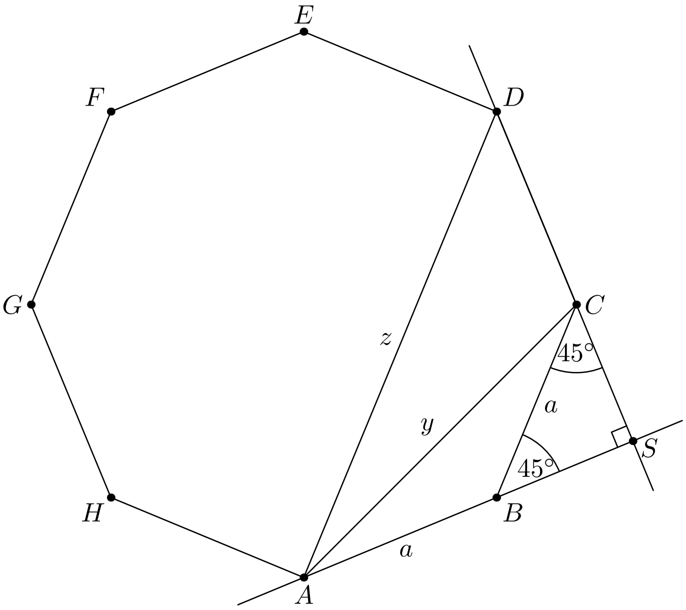
Zadatak OŠ-8.2.

Neka je $ABCDEFGH$ pravilni osmerokut. Izračunaj omjer duljina $|AC| : |AD|$.

Rješenje.

Neka je a duljina stranice pravilnog osmerokuta.

Veličina vanjskog kuta pravilnog osmerokuta iznosi $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Pravci AB i CD sijeku se u točki S i vrijedi $|\sphericalangle CSB| = 90^\circ$, pa su trokuti BSC, ASC i ASD pravokutni.



Neka je $x = |BS| = |SC|$. Primjenom Pitagorina poučka na trokut BSC slijedi

$$x^2 + x^2 = a^2, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Neka je $y = |AC|$. Primjenom Pitagorina poučka na trokut ASC slijedi

$$y^2 = (a + x)^2 + x^2, \quad \text{tj.} \quad y = a\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Neka je $z = |AD|$. Primjenom Pitagorina poučka na trokut ASD slijedi

$$z^2 = 2(a + x)^2, \quad \text{tj.} \quad z = a\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Konačno zaključujemo

$$\frac{y}{z} = \frac{a\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{a\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Zadatak OŠ-8.3.

Odredi sve parove prirodnih brojeva za koje je zbroj njihovog umnoška, njihovog količnika, njihovog zbroja i njihove razlike jednak 450.

Rješenje.

Neka su x i y traženi brojevi.

Prema uvjetu zadatka vrijedi

$$xy + \frac{x}{y} + (x+y) + (x-y) = 450,$$

odnosno

$$xy + \frac{x}{y} + 2x = 450.$$

Ako izlučimo x i svedemo na zajednički nazivnik y dobivamo

$$x \cdot \frac{y^2+1+2y}{y} = 450.$$

Izraz u brojniku je kvadrat binoma, tj. vrijedi

$$x(y+1)^2 = 450y,$$

iz čega zaključujemo da $(y+1)^2$ dijeli $450y$.

No, najveći zajednički djelitelj brojeva y i $y+1$ je 1 (inače bi zajednički djelitelj dijelio i njihovu razliku $y+1-y=1$), pa su brojevi y i $(y+1)^2$ relativno prosti.

Stoga $(y+1)^2$ dijeli 450.

Iz rastava $450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ na proste faktore, zaključujemo da vrijedi $(y+1)^2 \in \{1, 9, 25, 225\}$.

Ako je $(y+1)^2 = 1$, slijedi da je $y = 0$, a to nije prirodan broj.

Ako je $(y+1)^2 = 9$, slijedi da je $y = 2$, a tada je $x = 100$.

Ako je $(y+1)^2 = 25$, slijedi da je $y = 4$, a tada je $x = 72$.

Ako je $(y+1)^2 = 225$, slijedi da je $y = 14$, a tada je $x = 28$.

Zadatak OŠ-8.4.

Marijan piše brojeve po školskoj ploči. Na početku je na praznu ploču napisao brojeve 11, 14, 17 i 20. U svakom koraku Marijan obriše s ploče tri broja a, b i c, te na ploču napiše brojeve $a+b-c$, $b+c-a$ i $c+a-b$.

Može li Marijan konačnim brojem takvih koraka postići da na ploči budu brojevi:

a) 5, 11, 17 i 23 ?

b) 3, 11, 23 i 25 ?

Rješenje.

a) Označimo brojeve koji su, u nekom trenutku, na ploči, s a, b, c i d.

Ako Marijan odabere brojeve a, b i c, on ih mijenja s $a+b-c$, $b+c-a$ i $c+a-b$. Nakon tog koraka, zbroj brojeva na ploči je opet $a+b+c+d$.

Dakle, prilikom svakog poteza zbroj brojeva na ploči ostaje isti.

Budući da zbroj prva četiri broja na ploči iznosi 62, a $5+11+17+23=56$, Marijan ne može postići da na ploči budu brojevi 5, 11, 17 i 23.

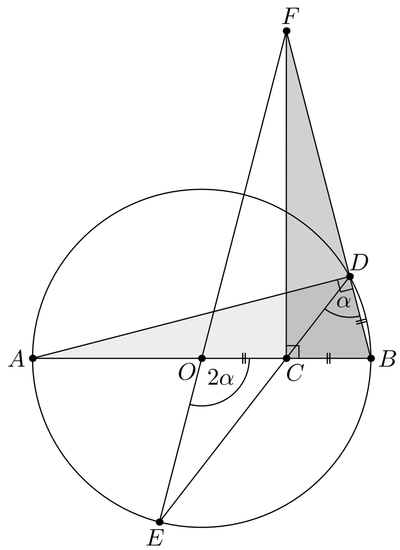
b) Svi brojevi na početku daju ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Koje god tri broja a, b i c odabrao Marijan, novi brojevi $a+b-c$, $b+c-a$ i $c+a-b$ ponovno imaju svojstvo da svaki od njih, a time i sva četiri na ploči, daju opet ostatak 2 pri dijeljenju s 3.

Budući da broj 3 (i broj 25) ne daju ostatak 2 pri dijeljenju s 3, Marijan ne može postići da na ploči budu brojevi 3, 11, 23 i 25.

Zadatak OŠ-8.5.

Neka je k kružnica sa središtem O i $\overline{AB}$ njen promjer. Točka C je polovište dužine $\overline{OB}$, a D točka na k takva da je $|BC|=|BD|$. Drugo sjecište pravca CD i kružnice k je točka E, a pravci OE i BD sijeku se u točki F. Dokaži da je $|BF|=|AB|$.

Prvo rješenje.



Neka je α mjera vršnog kuta nad kružnim lukom $\widehat{EB}$. Tada je mjera pripadnog središnjeg kuta 2α.

Trokut CBD je jednakokračan, mjere kutova uz osnovicu su α, a mjera kuta nasuprot osnovice $180^\circ-2\alpha$.

Trokut OBF je jednakokračan, $\overline{OB}$ je osnovica, mjere kutova uz osnovicu su $180^\circ-2\alpha$.

Prema uvjetu zadatka točka C polovište je dužine $\overline{OB}$, pa je trokut CBF pravokutan trokut.

Stranica $\overline{AB}$ trokuta ABD promjer je kružnice, a točka D pripada toj kružnici, pa je trokut ABD pravokutan.

Pravokutni trokuti ABD i CBF imaju zajednički kut, stranice $\overline{CB}$ i $\overline{BD}$ su sukladne, pa su ti trokuti sukladni po poučku K–S–K.

Iz sukladnosti slijedi $|AB|=|BF|$.

Drugo rješenje.

Na isti način kao u prvom rješenju pokazuje se da je trokut OBF jednakokračan.

Neka je $|BD| = |BC| = d$.

Trokut BDO je jednakokračan s osnovicom $\overline{BD}$.
Duljine krakova tog trokuta su $2d$, a duljina osnovice d.

Trokuti OBF i BDO su jednakokračni trokuti, a mjere kutova uz osnovicu su im iste, pa su slični po poučku K–K.
Osnovica trokuta OBF ima duljinu $2d$, a osnovica trokuta BDO ima duljinu d, pa je koeficijent sličnosti 2.

Krakovi trokuta BDO imaju duljinu $2d$, pa krakovi trokuta OBF imaju duljinu $4d$, tj. $|BF| = 4d$.

Budući da je $|AB| = 2|BO| = 4d$, slijedi$|AB| = |BF|$.