DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

Zadatak B-1.1.

Odredi sve parove (x, y) realnih brojeva takvih da vrijedi

$$|x| + 2|y| = 2$$
$$||x| - |y|| = 1.$$

Rješenje.

Uvođenjem supstitucije $a = |x|$, $b = |y|$, uz uvjet $a, b \geqslant 0$, sustav svodimo na jednadžbe:

$$a + 2b = 2$$
$$|a - b| = 1.$$

Iz prve jednadžbe slijedi $a = 2 - 2b$, što uvrštavanjem u drugu daje $|2 - 3b| = 1$.

Za $b \in \left[0, \frac{2}{3}\right\rangle$ rješavamo jednadžbu $2 - 3b = 1$ iz čega dobivamo $b = \frac{1}{3}$ te $a = \frac{4}{3}$.

Vraćanjem u supstituciju $|x| = \frac{4}{3}$ i $|y| = \frac{1}{3}$ dobivamo $x = \pm\frac{4}{3}$, $y = \pm\frac{1}{3}$.

Za $b \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right\rangle$ rješavamo jednadžbu $-2 + 3b = 1$ što daje $b = 1$ te $a = 0$.

Iz $|x| = 0$ i $|y| = 1$ slijedi $x = 0$ i $y = \pm 1$.

Konačno, sva rješenja sustava su uređeni parovi

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), (0, 1), (0, -1).$$

Zadatak B-1.2.

Odredi sve četvorke (a, b, c, d) prostih brojeva takvih da vrijedi $2a + 4b + 5c + 8d = 138$.

Rješenje.

Promatranjem lijeve strane jednadžbe uočavamo da su pribrojnici $2a$, $4b$ i $8d$ nužno parni brojevi jer su višekratnici broja 2. Budući da je njihov zbroj s članom $5c$ jednak parnom broju 138, zaključujemo da i umnožak $5c$ mora biti paran. Budući da je broj 5 neparan, slijedi da je sam broj c paran. Budući da je c prost broj, a jedini paran prost broj je 2, dobivamo $c = 2$.

Uvrštavanjem vrijednosti $c = 2$ u početni izraz dobivamo jednadžbu $2a + 4b + 10 + 8d = 138$. Oduzimanjem broja 10 s obje strane jednadžba prelazi u oblik $2a + 4b + 8d = 128$, što nakon dijeljenja s 2 daje $a + 2b + 4d = 64$.

Iz dobivenog izraza izdvojimo nepoznanicu $a = 64 - 2b - 4d$. Budući da su 64, $2b$ i $4d$ parni brojevi, njihova razlika također mora biti paran broj. Iz toga proizlazi da je a paran prost broj, odnosno da je $a = 2$.

Uvrštavanjem $a = 2$ u prethodnu jednadžbu dobivamo $2 + 2b + 4d = 64$. Oduzimanjem broja 2 od obje strane i dijeljenjem s 2 dobivamo $b + 2d = 31$ tj. $b = 31 - 2d$. Kako bi b bio pozitivan prost broj, vrijednost izraza $2d$ mora biti manja od 31.

Ispitivanjem prostih brojeva za d dobivamo sljedeće vrijednosti

d	2	3	5	7	11	13
$b = 31 - 2d$	27	25	21	17	9	5

Dobivena vrijednost za b je prost broj samo za $d = 7$ i $d = 13$.

Postoje točno dvije četvorke prostih brojeva (a, b, c, d) koje zadovoljavaju uvjete zadatka:

$$(2, 17, 2, 7) \quad \text{i} \quad (2, 5, 2, 13).$$

Zadatak B-1.3.

Neka je A umnožak brojeva $1 - \dfrac{1}{n^2}$ za sve prirodne brojeve n od 2 do 2027, tj.

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2027^2}\right).$$

Riješi jednadžbu

$$x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \cdots + \frac{x}{1+2+\cdots+2026} = A,$$

pri čemu je na lijevoj strani zbroj 2026 pribrojnika oblika $\dfrac{x}{1+2+\cdots+n}$.

Rješenje.

U umnošku koji prikazuje broj A svaka je zagrada na desnoj strani razlika kvadrata, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
A &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2027^2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2027}\right)\left(1 + \frac{1}{2027}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2026}{2027} \cdot \frac{2028}{2027} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2028}{2027} = \frac{1014}{2027}.
\end{aligned}$$

Pojednostavimo izraz na lijevoj strani jednadžbe. Prvo izlučimo nepoznanicu x:

$$x\left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+2026}\right) = A.$$

Budući da je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$, dobivamo:

$$2x \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2026 \cdot 2027}\right) = A.$$

Kada na svaki pribrojnik u zagradi primijenimo identitet $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, dobivamo

$$2x \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdots + \left(\frac{1}{2026} - \frac{1}{2027}\right) \right) = A.$$

Sređivanjem dobivamo jednadžbu $2x \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2027}\right) = A$, čije je rješenje

$$x = \frac{2027}{4052} \cdot A = \frac{2027}{4052} \cdot \frac{1014}{2027} = \frac{507}{2026}.$$

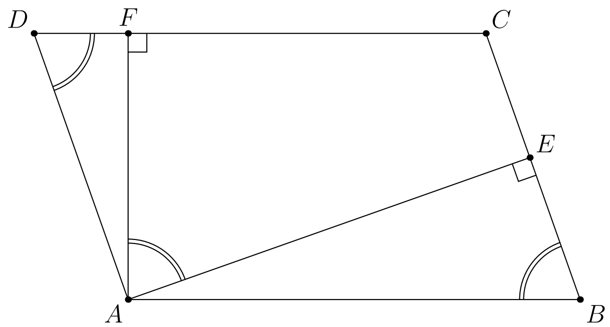
Zadatak B-1.4.

Neka su $\overline{AE}$ i $\overline{AF}$ visine paralelograma $ABCD$ pri čemu je točka E na dužini $\overline{BC}$, a točka F točka na dužini $\overline{CD}$. Ako je $|AE| = 32$, $|AF| = 20$ i $\cos |\sphericalangle EAF| = \dfrac{1}{3}$, kolika je površina četverokuta $AECF$?

Rješenje.

Neka je $|\sphericalangle EAF| = \alpha$. Budući da je $\overline{AE}$ okomito na $\overline{BC}$, onda je $\overline{AE}$ okomito na $\overline{AD}$, iz čega slijedi da je $|\sphericalangle FAD| = 90° - \alpha$.

Trokut AFD je pravokutan, pa slijedi i da je $|\sphericalangle ADF| = \alpha$. Budući da su $\sphericalangle ADF$ i $\sphericalangle EBA$ kutovi s paralelnim kracima vrijedi i $|\sphericalangle EBA| = \alpha$.



Prema uvjetu u zadatku vrijedi $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Budući da je trokut ADF pravokutan, sinus kuta α mora biti pozitivan, pa iz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, dobivamo $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Iz toga slijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}.$$

U pravokutnom trokutu AFD vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{|AF|}{|AD|} \Rightarrow |AD| = \frac{20}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 15\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{|FD|} \Rightarrow |FD| = \frac{20}{2\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

Površina trokuta AFD iznosi $P_{AFD} = \frac{|AF|\cdot|FD|}{2} = \frac{20\cdot 5\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$.

Slično, u pravokutnom trokut ABE vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{|AE|}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{32}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 24\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{32}{|BE|} \Rightarrow |BE| = \frac{32}{2\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}.$$

Površina trokuta ABE iznosi $P_{ABE} = \dfrac{|AE|\cdot|BE|}{2} = \dfrac{32\cdot 8\sqrt{2}}{2} = 128\sqrt{2}$.

Sada je površina paralelograma $ABCD$ jednaka

$$P_{ABCD} = |AD|\cdot|AE| = |AD|\cdot|AB|\cdot\sin\alpha = 15\sqrt{2}\cdot 24\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 480\sqrt{2}.$$

Konačno, površina četverokuta $AECF$ iznosi:

$$P_{AECF} = P_{ABCD} - P_{AFD} - P_{ABE} = 480\sqrt{2} - 50\sqrt{2} - 128\sqrt{2} = 302\sqrt{2}.$$

Zadatak B-1.5.

Na metalnu ploču postavljaju se magneti, crveni i plavi, tako da na svakom polju bude po jedan magnet. Magnete iste boje ne razlikujemo.

a) Na koliko se načina može popuniti jedan redak od šest polja tako da broj plavih magneta u tom retku bude paran?

b) Na koliko se načina može popuniti ploča dimenzija 6×6 tako da u svakom retku i u svakom stupcu bude paran broj plavih magneta?

Rješenje.

a) Do rješenja možemo doći promatrajući odabire polja redom. Za svako od prvih pet polja u retku postoje dvije mogućnosti (magnet može biti crven ili plav), što ukupno daje $2^5 = 32$ različita načina. Boja šestog magneta u retku tada je jedinstveno određena uvjetom parnosti: ako je među prvih pet magneta postavljen neparan broj plavih, šesti magnet mora biti plav, a u suprotnom mora biti crven. Stoga se jedan redak može ispravno popuniti na 32 načina.

b) Kako bi svaki stupac imao paran broj plavih magneta, boja šestog magneta u svakom stupcu izravno ovisi o onima iznad njega. Ako je u prvih pet redaka nekog stupca već postavljen paran broj plavih magneta, šesti magnet mora biti crven kako bi se zadržala parnost. Ako je pak broj plavih magneta neparan, šesti magnet mora biti plav. Na taj je način cijeli šesti redak jedinstveno određen.

   Provjerimo da će tada šesti redak također zadovoljavati pravilo parnosti. Budući da u svakom stupcu ima parno mnogo plavih magneta, na cijeloj ploči ih također ima parno mnogo. Kako u prvih redaka ima parno mnogo plavih magneta, onda ih parno mnogo mora biti i u šestom retku.

   Svaki od prvih pet redaka možemo popuniti neovisno, koristeći već izračunata 32 načina po retku. Stoga ukupan broj načina za popunjavanje prvih pet redaka, kao i ukupan broj svih mogućih rasporeda na cijeloj ploči iznosi:

$$32\cdot 32\cdot 32\cdot 32\cdot 32 = 32^5 = 2^{25}.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

Zadatak B-2.1.

Odredi sve peteroznamenkaste brojeve kojima aritmetička sredina prve i treće znamenke iznosi 7, druge i četvrte 5, treće i pete 4, a četvrte i prve znamenke 5.

Rješenje.

Neka je $\overline{abcde}$ traženi broj. Prema uvjetima zadatka slijedi:

$$a+c=14, \quad b+d=10, \quad c+e=8, \quad d+a=10$$

Budući da je $a \leqslant 9$, iz $a+c=14$ slijedi $c \geqslant 5$.

Tada iz $c+e=8$ slijedi $e \in \{0,1,2,3\}$.

Za $e=0$ dobivamo $c=8$, $a=6$,$d=4$, $b=6$ i traženi je broj 66840.

Za $e=1$ dobivamo $c=7$, $a=7$, $d=3$, $b=7$ i traženi je broj 77731.

Za $e=2$ dobivamo $c=6$, $a=8$, $d=2$, $b=8$ i traženi je broj 88622.

Za $e=3$ dobivamo $c=5$, $a=9$, $d=1$, $b=9$ i traženi je broj 99513.

Zadatak B-2.2.

Odredi najmanju moguću duljinu stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC u kojem vrijedi

$$|\sphericalangle BAC| = 60^\circ \quad \text{i} \quad |AB| + 3|AC| = \sqrt{2}.$$

Rješenje.

Ako je $|AC| = x$, onda je $|AB| = \sqrt{2} - 3x$.

Primjenom poučka o kosinusu dobiva se

$$|BC|^2 = x^2 + (\sqrt{2}-3x)^2 - 2x(\sqrt{2}-3x)\cos 60^\circ = 13x^2 - 7\sqrt{2}\,x + 2.$$

Minimalna vrijednost kvadratne funkcije

$$f(x) = 13x^2 - 7\sqrt{2}\,x + 2$$

iznosi

$$\frac{4\cdot 13\cdot 2 - \left(-7\sqrt{2}\right)^2}{4\cdot 13} = \frac{3}{26}.$$

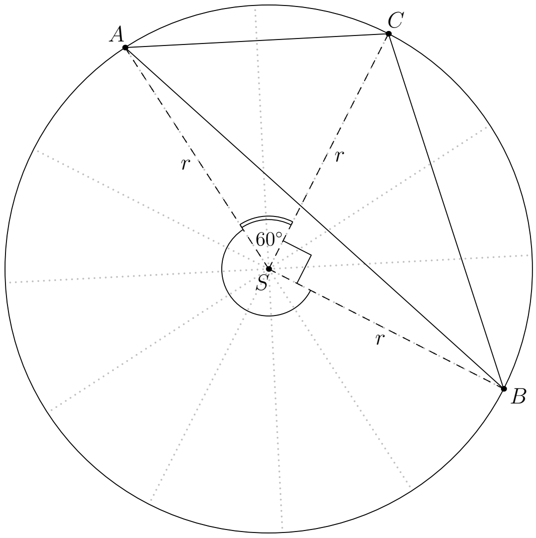
Najmanja moguća vrijednost duljine stranice $|BC|$ iznosi

$$\sqrt{\frac{3}{26}} = \frac{\sqrt{78}}{26}.$$

Zadatak B-2.3.

Trokutu ABC opisana je kružnica k. Duljine lukova $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ i $\widehat{AB}$ kružnice k odnose se kao $3:2:7$. Izračunaj vjerojatnost da se slučajno odabrana točka kruga omeđenoga kružnicom k nalazi unutar trokuta ABC.

Prvo rješenje.



Središnji kutovi koji određuju lukove dijele puni kut u omjeru jednakom omjeru duljina lukova. Budući da je $360^\circ : (3+2+7) = 30^\circ$, mjere središnjih kutova iznose:

$$|\sphericalangle BSC| = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ,$$

$$|\sphericalangle CSA| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ,$$

$$|\sphericalangle ASB| = 7 \cdot 30^\circ = 210^\circ.$$

Neka je r polumjer opisane kružnice trokuta ABC.

Površina trokuta ABC jednaka je

$$P_{ABC} = P_{ASC} + P_{BSC} - P_{ABS} = \frac{r^2}{2}\sin 60^\circ + \frac{r^2}{2}\sin 90^\circ - \frac{r^2}{2}\sin 150^\circ.$$

Budući da je

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

površina trokuta ABC iznosi

$$P = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r^2(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Vjerojatnost da se slučajno odabrana točka kruga opisanoga trokutu ABC nalazi unutar trokuta ABC iznosi

$$\frac{P_{ABC}}{P_{\text{kruga}}} = \frac{\frac{r^2(\sqrt{3}+1)}{4}}{r^2\pi} = \frac{\sqrt{3}+1}{4\pi}.$$

Drugo rješenje.

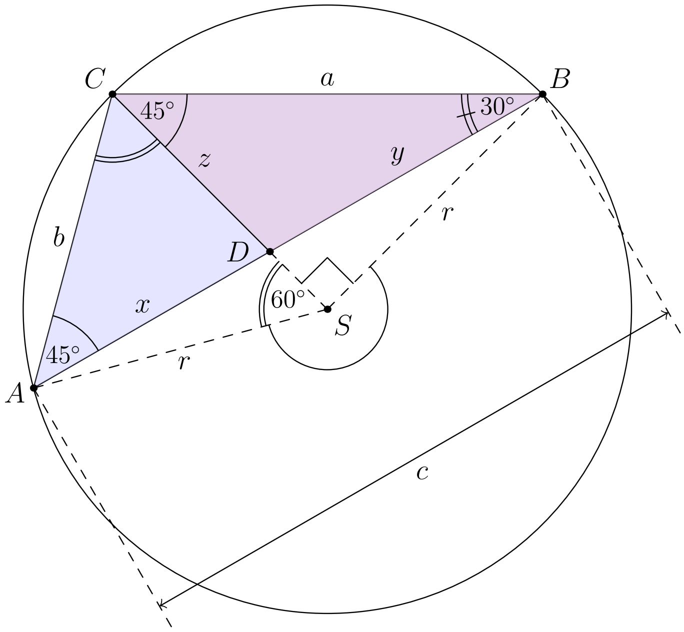
Kao u prvom rješenju pokazujemo da mjere središnjih kutova iznose:

$$|\sphericalangle BSC| = 90^\circ, \quad |\sphericalangle CSA| = 60^\circ \quad \text{i} \quad |\sphericalangle ASB| = 210^\circ.$$

Označimo α, β i γ redom mjere kutova $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle ACB$. Kutovi trokuta su pripadni obodni kutovi, čije mjere su jednake polovinama mjera središnjih kutova, odnosno vrijedi

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 30^\circ \quad \text{i} \quad \gamma = 105^\circ.$$

Označimo $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, te neka je $x = |AD|$, $y = |BD|$ i $z = |CD|$.



Uočimo da je trokut CSB jednakokračan pravokutan, pa vrijedi $a = r\sqrt{2}$ i $|\sphericalangle DCB = 45°$.

Nadalje, trokut ASC je jednakostraničan jer je $|AS| = |CS|$ i $|\sphericalangle CSA = 60°$, pa vrijedi $b = r$.

U trokutima ABC i CBD vrijedi $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCB$ i $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CBD$, pa su po KK poučku ti trokuti slični. Iz sličnosti slijedi

$$\frac{y}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a^2}{c} = \frac{2r^2}{c}.$$

Po poučku o sinusima za trokut CBD slijedi

$$\frac{y}{\sin 45°} = \frac{z}{\sin 30°} \Rightarrow z = \frac{y\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{2}}{c}.$$

Po poučku o sinusima za trokut ADC slijedi

$$\frac{x}{\sin 60°} = \frac{z}{\sin 45°} \Rightarrow x = \frac{z\sqrt{6}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{c}.$$

Budući da je $c = x + y$, zaključujemo

$$c = \frac{r^2\sqrt{3}}{c} + \frac{2r^2}{c} \Rightarrow c^2 = r^2(2+\sqrt{3}) \Rightarrow c = r\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Površinu trokuta ABC računamo po formuli

$$P_{ABC} = \frac{abc}{4r} = \frac{r^3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4r} = \frac{r^2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}.$$

Vjerojatnost da se slučajno odabrana točka kruga opisanoga trokutu ABC nalazi unutar trokuta ABC iznosi

$$\frac{P_{ABC}}{P_{\text{kruga}}} = \frac{\frac{r^2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}}{r^2\pi} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4\pi}.$$

Napomena: Budući da vrijedi $(\sqrt{3}+1)^2 = 3+2\sqrt{3}+1 = 4+2\sqrt{3}$, odnosno $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$, u oba rješenja smo dobili istu površinu trokuta ABC i traženu vjerojatnost.

Duljinu stranice c možemo izračunati iz jednakokračnog trokut ASB. Primjenom adicijske formule dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{c}{2r} &= \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)\\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ\\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\end{aligned}$$

tj. $c = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{6})$. Također vrijedi $c^2 = r^2(2+\sqrt{3})$, odnosno $c = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Zadatak B-2.4.

Odredi sve realne brojeve p, q i r za koje je $[-1, 2\rangle \setminus \{r\}$ skup svih rješenja nejednadžbe

$$\frac{-2px^2 + p^2x}{0.25q^3x^2 + q^2x} \geqslant 0.$$

Prvo rješenje.

Faktoriziramo li brojnik i nazivnik, nejednadžbu možemo zapisati kao

$$\frac{px(p-2x)}{q^2x(0.25qx+1)} \geqslant 0.$$

Uočimo da za $x = 0$ razlomak nije definiran, pa taj broj ne može biti rješenje nejednadžbe. Budući da se u skupu rješenja nalaze svi elementi skupa $[1, 2\rangle$ osim realnog broja r, zaključujemo da je $r = 0$.

Nadalje, mora vrijediti $q \neq 0$. Promotrimo nejednadžbu $\frac{p(p-2x)}{0.25qx+1} \geqslant 0$.

Budući da je $q^2 > 0$, skupovi rješenja te nejednadžbe i nejednadžbe iz zadatka razlikuju se samo u broju 0, odnosno tražimo realne brojeve p i q takve da je $[-1, 2\rangle$ skup rješenja te nejednažbe.

Ako je $p = 0$, onda je skup rješenja te nejednadžbe čitav skup realnih brojeva, što ne odgovara uvjetu iz zadatka. Dakle, $p \neq 0$.

Ako je $pq < 0$, onda je skup rješenja te nejednažbe unija dva intervala, što također ne odgovara uvjetu zadatka.

Ako je $p > 0$ i $q > 0$, onda je skup rješenje te nejednadžbe $\left\langle -\frac{4}{q}, \frac{p}{2} \right]$, što opet ne odgovara uvjetu zadatka.

Stoga mora vrijediti $p < 0$ i $q < 0$, te je tada skup rješenja te nejednažbe $\left[\frac{p}{2}, -\frac{4}{q}\right\rangle$. Budući da tražimo realne brojeve p i q takve da je skup rješenja $[-1, 2\rangle$, slijedi da je $p = q = -2$.

Drugo rješenje.

Budući da su brojnik i nazivnik umnošci linearnih izraza u nepoznanici x, skup rješenja nejednadžbe unija je intervala realnih brojeva čiji rubovi su nultočke brojnika ili nazivnika, pri čemu nultočke nazivnika nisu uključene u skup rješenja, a nultočke nazivnika jesu.

Nultočke nazivnika $0.25q^3x^2+q^2x = xq^2(0.25qx+1)$ su $x=0$ ili $x=-\frac{4}{q}$, pa ta dva realna broja ne mogu biti u skupu rješenja nejednadžbe. Iz uvjeta zadatka vidimo da su iz skupa rješenja isključeni brojevi $x=r$ i $x=2$, pa zaključujemo da mora vrijediti $r=0$ i $q=-2$.

Nultočke brojnika $-2px+p^2x = px(p-2x)$ su $x=0$ i $x=\frac{p}{2}$. Uočimo da je $x=0$ i nultočka nazivnika, te za tu vrijednost algebarski razlomak iz nejednadžbe nije definiran. Druga nultočka brojnika mora biti $x=-1$, tj. slijedi da mora vrijediti $p=-2$.

Još je potrebno provjeriti da uz $p=q=-2$, nejednadžba zaista ima skup rješenja $[-1,2\rangle \setminus \{0\}$ (a ne, na primjer, $\langle -\infty,-1] \cup \langle 2,+\infty\rangle$). Zaista, za $p=q=-2$ nejednažba glasi

$$\frac{4x^2+4x}{-2x^2+4x} \geqslant 0,$$

te je izraz na lijevoj strani nejednadžbe nenegativan ako i samo ako je $x \neq 0$, te vrijedi $x+1 \geqslant 0$ i $-x+2>0$, odnosno skup rješenja te nejednažbe je $[-1,2) \setminus \{0\}$.

Zadatak B-2.5.

Lorna je stavila kuglice u deset kutija tako da je u svakoj kutiji barem jedna kuglica i da ne postoje dvije kutije u kojima je jednak broj kuglica. Tada je primijetila da, koju god kutiju odabrala, može uzeti sve kuglice iz nje i ubaciti ih u neke od preostalih kutija tako da u svakoj od tih devet kutija bude jednak broj kuglica. Koliki je najmanji mogući ukupan broj kuglica u svih 10 kutija?

Rješenje.

Označimo s n_i broj kuglica u i-toj kutiji, te pretpostavimo da vrijedi

$$n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > n_5 > n_6 > n_7 > n_8 > n_9 > n_{10}.$$

Tada vrijedi

$$n_1 \geqslant n_2+1 \geqslant n_3+2 \geqslant n_4+3 \geqslant n_5+4 \geqslant n_6+5 \geqslant n_7+6 \geqslant n_8+7 \geqslant n_9+8 \geqslant n_{10}+9.$$

Kako bismo iz desete kutije mogli prebaciti kuglice u preostale kutije tako da u svakoj od tih kutija bude jednak broj kuglicu, u drugu treba prebaciti barem jednu kuglicu, u treću barem dvije, ..., te u devetu barem osam kuglica. Stoga slijedi

$$n_{10} \geqslant 1+2+3+\cdots+8 = 36,$$

te zaključujemo $n_i \geqslant 46-i$ za sve $i=1,2,\ldots,10$. Dakle, u svim kutijama zajedno mora biti barem $36+37+\ldots+45 = (45+36)\cdot 10 : 2 = 405$ kuglica.

Neka je u kutijama redom 45, 44, 43, ..., 36 kuglica. Tada je ukupan broj kuglica u kutijama $405 = 45 \cdot 9$. Zbog toga koju god kutiju odabrali, kuglice iz odabrane kutije možemo rasporediti u preostale kutije tako da u svakoj kutiji bude točno 45 kuglica.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

Zadatak B-3.1.

Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \leqslant -\frac{1}{2}$$

u intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rješenje.

Korištenjem formula za sinus dvostrukog argumenta te sinus zbroja izraz $\sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$ možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x &= \frac{2}{2} \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \\
&= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \\
&= \cos \frac{\pi}{3} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x = \\
&= \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Dakle, rješavamo nejednadžbu $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Uz pomoć trigonometrijske kružnice zaključujemo

$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2x + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,$$

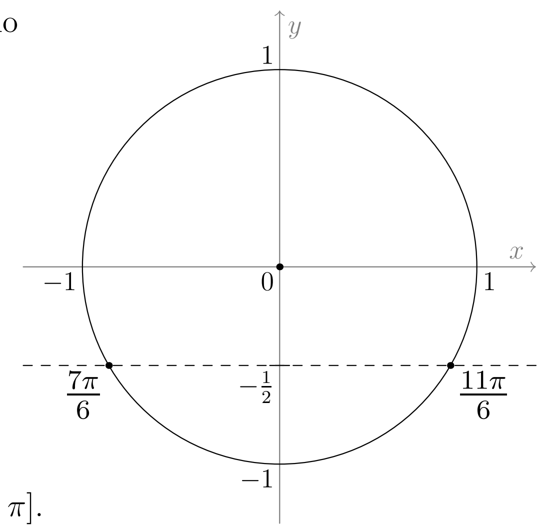
odakle dobivamo

$$\frac{5\pi}{12} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Uvrstimo li $k = -1$ i $k = 0$ dobivamo

$$x \in \left[\frac{-7\pi}{12}, \frac{-\pi}{4}\right] \bigcup \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

što je rješenje dane nejednadžbe na intervalu $[-\pi, \pi]$.



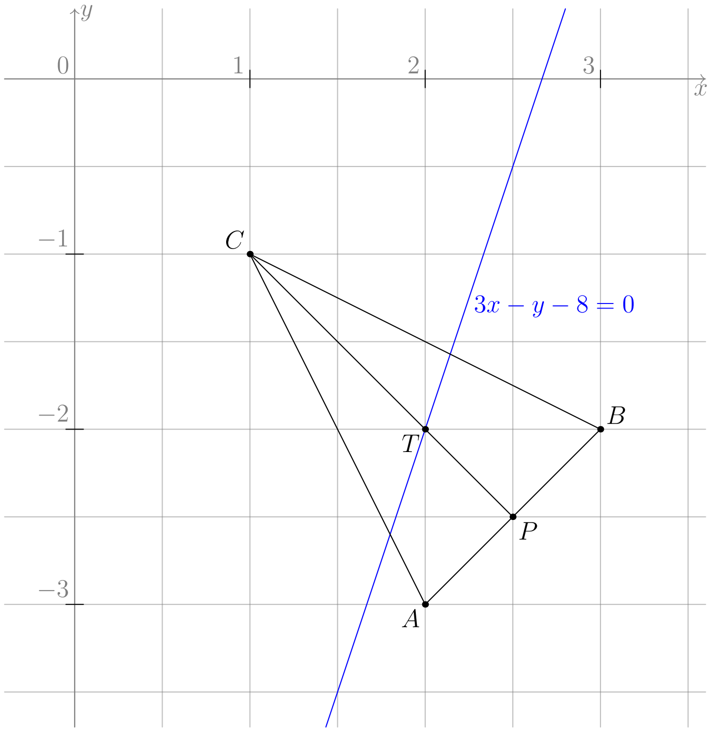
Zadatak B-3.2.

Dva su vrha trokuta ABC točke $A(2, -3)$ i $B(3, -2)$. Težište toga trokuta leži na pravcu $3x - y - 8 = 0$, a njegova površina iznosi $\frac{3}{2}$. Odredi sve moguće koordinate vrha C.

Prvo rješenje.

Kako je $|AB| = \sqrt{(3-2)^2+(-2+3)^2} = \sqrt{2}$, a površina trokuta iznosi $\frac{3}{2}$ dobivamo da je duljina visine na stranicu $\overline{AB}$ jednaka $h = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Težište trokuta leži na pravcu $3x - y - 8 = 0$, te su stoga njegove koordinate $T(x_T, 3x_T - 8)$.



Udaljenost težišta trokuta od pravca AB čija je jednadžba $x - y - 5 = 0$ jednaka je $\frac{1}{3}h = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Stoga slijedi $\dfrac{|x_T - y_T - 5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, odakle uvrštavanjem $y_T = 3x_T - 8$ dobivamo jednadžbu $|3 - 2x_T| = 1$, čija su rješenja $x_T = 1$ i $x_T = 2$. Dakle, težište trokuta ima koordinate $T(1, -5)$ ili $T(2, -2)$.

Nadalje, kako težište trokuta dijeli težišnicu trokuta u omjeru $2:1$ računajući od vrha trokuta, iz jednakosti $\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$, pri čemu je P polovište dužine $\overline{AB}$, dobivamo da točka C ima koordinate $C(3x_T - 2x_P, 3y_T - 2y_P)$.

Uvrštavanjem koordinata točke $P\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ i koordinata težišta trokuta konačno dobivamo

$$C_1(-2, -10) \qquad \text{i} \qquad C_2(1, -1).$$

Drugo rješenje.

Iskoristimo li formulu za koordinate težišta trokuta $T\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$ dobivamo da težište trokuta ABC ima koordinate $T\left(\frac{5+x_C}{3}, \frac{y_C-5}{3}\right)$.

Kako težište trokuta leži na pravcu $3x - y - 8 = 0$ dobivamo da vrijedi

$$3 \cdot \frac{5+x_C}{3} - \frac{y_C-5}{3} - 8 = 0$$

odakle slijedi $y_C = 3x_C - 4$.

Nadalje, kako je površina trokuta ABC jednaka $\frac{3}{2}$ te vrijedi

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|,$$

uvrštavanjem koordinata točaka A, B i C u izraz za površinu dobivamo jednadžbu

$$|2(-2 - y_C) + 3(y_C + 3) + x_C(-3 + 2)| = 3.$$

Nadalje, uvrstimo li u dobivenu jednadžbu da je $y_C = 3x_C - 4$ sređivanjem dobivamo jednadžbu $|2x_C + 1| = 3$ čija su rješenja $x_{C_1} = -2$ i $x_{C_2} = 1$.

Konačno, iz $x_{C_1} = -2$ i $x_{C_2} = 1$ slijedi $y_{C_1} = -10$ i $y_{C_2} = -1$.

Dakle, dobivamo dva rješenja $C_1(-2, -10)$ i $C_2(1, -1)$.

Zadatak B-3.3.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da je $\log_2\left(n^2 + 295\right)$ također prirodan broj.

Rješenje.

Neka je $\log_2(n^2 + 295) = m$, $m \in \mathbb{N}$.

Tada vrijedi $n^2 + 295 = 2^m$. Budući da je zadnja znamenka kvadrata prirodnog broja jedna od znamenki $0, 1, 4, 5, 6$ ili 9, slijedi da $n^2 + 295$ završava znamenkom $5, 6, 9, 0, 1$ ili 4, a kako je $n^2 + 295$ paran broj, zaključujemo da mu je zadnja znamenka 4 ili 6.

Nadalje, kako potencije $2^k, k \in \mathbb{N}$ imaju ciklički raspored zadnjih znamenki $2, 4, 8, 6$, a broj 2^m završava znamenkom 4 ili 6, zaključujemo da je m paran prirodan broj.

Stoga neka je $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} n^2 + 295 &= 2^{2k} \\ \left(2^k\right)^2 - n^2 &= 295 \\ \left(2^k - n\right)\left(2^k + n\right) &= 295. \end{aligned}$$

Kako vrijedi $2^k - n < 2^k + n$, te kako je $295 = 5 \cdot 59$ slijede dva moguća slučaja.

1. slučaj	2. slučaj
$2^k - n = 1,$ $2^k + n = 295.$	$2^k - n = 5,$ $2^k + n = 59.$

U prvom slučaju zbrajanjem jednadžbi dobivamo jednadžbu $2^{k+1} = 296$ koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

U drugom slučaju zbrajanjem jednadžbi dobivamo $2^{k+1} = 64$, odakle slijedi $k = 5$ i $n = 27$.

Dakle, jedini prirodni broj n za koji je $\log_2\left(x^2 + 295\right)$ također prirodan broj je broj 27.

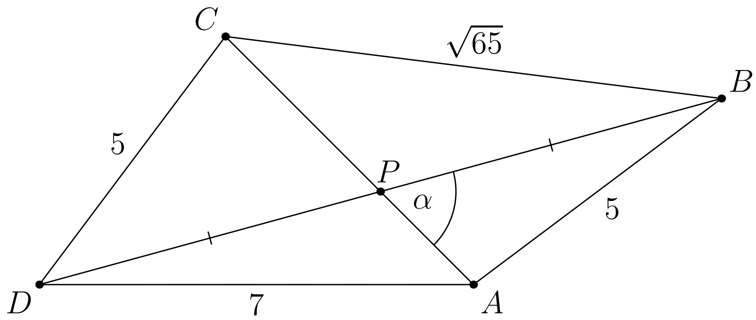
Zadatak B-3.4.

Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da vrijedi

$$|AB| = |CD| = 5, \quad |BC| = \sqrt{65} \quad \text{i} \quad |AD| = 7.$$

Dijagonale tog četverokuta sijeku se u točki P. Ako je zbroj površina trokuta PAB i PCD jednak zbroju površina trokuta PBC i PDA, kolika je površina četverokuta $ABCD$?

Prvo rješenje.



Budući da je zbroj površina trokuta PAB i PCD jednak zbroju površina trokuta PBC i PDA, korištenjem formule da je površina trokuta jednaka polovini umnošku duljina dviju stranica i sinusa kuta između tih stranica dobivamo sljedeću jednakost:

$$\frac{1}{2}|PA||PB|\sin\alpha + \frac{1}{2}|PC||PD|\sin\alpha = \frac{1}{2}|PB||PC|\sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}|PA||PD|\sin(180^\circ - \alpha).$$

Kako je $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ i $\sin\alpha \neq 0$ podijelimo li dobivenu jednakost s $\frac{1}{2}\sin\alpha$ te faktoriziramo slijedi $(|PB| - |PD|)\,(|PA| - |PC|) = 0$.

Stoga je $|PB| = |PD|$ ili $|PA| = |PC|$.

Budući da zadani četverokut nije paralelogram, ne mogu istovremeno obje jednakosti biti istinite. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|PB| = |PD|$.

Tada trokuti PDA i PAB kao i trokuti PBC i PCD imaju jednake površine. Stoga je i površina trokuta ABC jednaka površini trokuta ACD. Iz jednakosti površina trokuta ABC i ACD slijedi da je $\sin\sphericalangle BAC = \sin\sphericalangle DCA$.

Pošto trokuti ABC i ACD nisu sukladni mora biti $\sphericalangle BAC \neq \sphericalangle DCA$ pa zaključujemo $\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle DCA$.

Kako su kosinusi suplementarnih kutova suprotni brojevi vrijedi $\cos\sphericalangle BAC + \cos\sphericalangle DCA = 0$.

Označimo li s $x = |AC|$, te primijenimo poučak o kosinusu na trokute ABC i ACD prethodna jednakost prelazi u jednakost

$$\frac{x^2 + 25 - 65}{2 \cdot 5 \cdot x} + \frac{x^2 + 25 - 49}{2 \cdot 5 \cdot x} = 0,$$

odakle sređivanjem dobivamo $2x^2 - 64 = 0$, odnosno $x = 4\sqrt{2}$.

Konačno, $\cos\sphericalangle BAC = \frac{x^2+25-65}{2\cdot 5\cdot x} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$, a korištenjem osnovne relacije $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dobivamo $\sin\sphericalangle BAC = \frac{7}{5\sqrt{2}}$.

Stoga je površina četverokuta $ABCD$ jednaka

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \sin\sphericalangle BAC = 5 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 28.$$

Drugo rješenje.

Analogno kao i u prvom rješenju dolazimo do zaključka da je $|PB| = |PD|$.

Nadalje, primijenimo li poučak o kosinusu na svaki od trokuta PAB, PCD, PBC i PDA, dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$25 = |PA|^2 + |PB|^2 - 2|PA||PB| \cos\alpha \tag{1}$$
$$25 = |PC|^2 + |PD|^2 - 2|PC||PD| \cos\alpha = |PC|^2 + |PB|^2 - 2|PB||PC| \cos\alpha \tag{2}$$
$$65 = |PB|^2 + |PC|^2 + 2|PB||PC| \cos\alpha \tag{3}$$
$$49 = |PA|^2 + |PD|^2 + 2|PA||PD| \cos\alpha = |PA|^2 + |PB|^2 + 2|PA||PB| \cos\alpha \tag{4}$$

Ako oduzmemo jednadžbe (4) i (1), a zatim (3) i (2) slijedi

$$|PA||PB| \cos\alpha = 6 \quad \text{i} \quad |PB||PC| \cos\alpha = 10.$$

Dijeljenjem dobivenih jednadžbi dobivamo $\dfrac{|PA|}{|PC|} = \dfrac{3}{5}$.

Nadalje, zbrojimo li jednadžbe (1) i (4), a zatim (2) i (3), dobivamo

$$|PA|^2 + |PB|^2 = 37 \quad \text{i} \quad |PC|^2 + |PB|^2 = 45.$$

Oduzimanjem ovih jednakost slijedi $|PC|^2 - |PA|^2 = 8$.

Preostaje riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \dfrac{|PA|}{|PC|} = \dfrac{3}{5} \\ |PC|^2 - |PA|^2 = 8. \end{cases}$$

Stavimo li $|PA| = 3k$ i $|PC| = 5k$, iz druge jednadžbe dobivamo da je $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, odnosno $|PA| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $|PC| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Iz $|PA|^2 + |PB|^2 = 37$ slijedi $|PB| = |PD| = \sqrt{\frac{65}{2}}$.

Nadalje, iz $|PA||PB| \cos\alpha = 6$ slijedi $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$, te iz osnovne relacije $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dobivamo $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}$.

Konačno, površina četverokuta $ABCD$ je

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC||BD| \sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{65}{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = 28.$$

Zadatak B-3.5.

Za ekipno natjecanje iz matematike prijavili su se učenici triju razreda, 3.a, 3.b i 3.c. Iz svakoga od tih triju razreda prijavila su se po dva mladića i dvije djevojke. Ako se od svih prijavljenih učenika na slučajan način odabere četveročlana ekipa, kolika je vjerojatnost da će u ekipi biti predstavnici svakoga razreda te barem jedan mladić i barem jedna djevojka?

Prvo rješenje.

Broj različitih odabira četiri člana u ekipi jednak je $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495$. Umnožak $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9$ smo podijelili s brojem načina na koji se 4 člana mogu poredati jer poredak članova u ekipi nije bitan.

Odredimo sada broj načina odabira ekipe u kojoj će biti predstavnici sva tri razreda i oba spola.

Najprije biramo razred koji će imati dva predstavnika. To možemo učiniti na 3 načina. Neka, primjerice, razred A ima dva predstavnika. Razlikujemo dva slučaja ovisno o tome jesu li predstavnici iz razreda A istog ili različitog spola.

Ako su predstavnici iz razreda A različitog spola, tada par (mladić i djevojka) iz razreda A možemo odabrati na $2\cdot 2 = 4$ načina. Iz preostala dva razreda biramo po jednog učenika, što možemo učiniti na $4\cdot 4 = 16$ načina. Stoga je ukupan broj odabira u ovom slučaju $3\cdot 4\cdot 16 = 192$.
Ako su predstavnici iz razreda A istog spola, primjerice dva mladića, tada za predstavnike iz razreda B i C imamo sljedeće mogućnosti:

- djevojka iz B i mladić iz C
- mladić iz B i djevojka iz C
- djevojka iz B i djevojka iz C

Za svaku od tih mogućnosti broj odabira jednak je $2\cdot 2 = 4$.

Stoga je ukupan broj odabira u ovom slučaju jednak $3\cdot 2\cdot 12 = 72$.

Dakle, ukupan broj odabira jednak je $192 + 72 = 264$.

Stoga je tražena vjerojatnost $\frac{264}{495} = \frac{8}{15}$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, ukupan broj različitih odabira četiri člana u ekipi jednak je $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495$.

U ekipi mogu biti 3 mladića i 1 djevojka, 3 djevojke i 1 mladić te 2 mladića i dvije djevojke.

Budući da je broj načina na koji možemo odabrati 3 mladića i 1 djevojku jednak broju načina na koji možemo odabrati 3 djevojke i 1 mladića, razmotrit ćemo samo prvi slučaj.

Odredimo najprije broj načina na koji možemo odabrati 3 mladića, po jednog iz svakog razreda i 1 djevojku. Razred iz kojega je djevojka možemo odabrati na 3 načina. Po jednog mladića iz svakog razreda možemo odabrati na 2 načina, kao i djevojku bez obzira iz kojeg je razreda. Stoga je ukupan broj odabira 3 mladića, po jednog iz svakog razreda i jedne djevojke jednak $3\cdot 8\cdot 2 = 48$.

Odredimo zatim broj načina na koji možemo odabrati 3 mladića i 1 djevojku tako da su dva mladića iz istog razreda, a po jedan mladić i jedna djevojka svaki iz jednog od preostalih dvaju razreda.

Razred iz kojega su dva mladića biramo na 3 načina a ta dva mladića na 1 način. U preostala dva razreda biramo jednog mladića i jednu djevojku. Svakog od njih možemo odabrati na 2 načina, a pritom postoje i 2 mogućnosti raspodjele (mladić iz B, djevojka iz C ili obratno).

Stoga je ukupan broj odabira 2 mladića iz istog razreda te jednog mladića i jedne djevojke iz svakog od preostalih razreda jednak $3\cdot 1\cdot (2\cdot 2)\cdot 2 = 24$.

Preostalo je još odrediti broj načina na koji možemo odabrati 2 mladića i 2 djevojke.

Ako su 2 mladića iz istog razreda, a 2 djevojke iz različitih (preostalih) razreda, ukupan je broj odabira $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ jer razred iz kojeg su 2 mladića biramo na 3 načina, a svaku djevojku na 2 načina.

Isto vrijedi i ako su dvije djevojke iz istog razreda, a 2 mladića iz različitih (preostalih) razreda, tj. ukupan broj odabira i u tom slučaju jednak je $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Ako su 1 mladić i 1 djevojka iz istog razreda, te 1 djevojka i 1 mladić svaki iz jednog od preostalih dvaju razreda, broj odabira je $3 \cdot 2^4 \cdot 2 = 96$, jer razred iz kojeg su mladić i djevojka možemo odabrati na 3 načina, svakog od njih možemo birati na 2 načina, a 1 djevojku i jednog mladića svakog iz jednog od preostalih dvaju razreda možemo birati na $2 \cdot 2 \cdot 2$ načina (jer postoje dvije mogućnosti raspodjele, mladić iz B, djevojka iz C ili obratno).

Konačno, ukupan je broj odabira članova ekipe s predstavnicima svih razreda i oba spola jednak $2 \cdot (48 + 24) + (24 + 96) = 264$, a tražena vjerojatnost $\frac{264}{495} = \frac{8}{15}$.

Zadatak B-4.1.

Dokaži da za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$ vrijedi

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}=n-\frac{1}{n}.$$

Prvo rješenje.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije – provjeravamo da formula vrijedi za $n=2$:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}.$$

Pretpostavimo da formula vrijedi za neki prirodni broj $n \geqslant 2$.

Korak indukcije – koristeći pretpostavku treba pokazati da formula vrijedi i za $n+1$, tj. da vrijedi:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=n+1-\frac{1}{n+1}$$

Lijeva strana je jednaka (po pretpostavci):

$$\begin{aligned}
n-\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}} &= n-\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1+n^2}}{n(n+1)}\\
&= n-\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}}{n(n+1)}\\
&= n-\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{(n^2+n+1)^2}}{n(n+1)}\\
&= n-\frac{1}{n}+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\\
&= n-\frac{1}{n}+\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}\\
&= n-\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n(n+1)}\\
&= n+1-\frac{(n+1)-1}{n(n+1)}\\
&= n+1-\frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

što smo i trebali dobiti.

Drugo rješenje.

Izraz pod korijenom jednak je:

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2} &= \frac{(n-1)^2n^2+n^2+(n-1)^2}{(n-1)^2n^2} \\
&= \frac{n^4-2n^3+n^2+n^2+n^2-2n+1}{(n-1)^2n^2} \\
&= \frac{n^4+n^2+1-2n^3+2n^2-2n}{(n-1)^2n^2} \\
&= \frac{(n^2-n+1)^2}{(n-1)^2n^2}.
\end{aligned}
$$

Svaki pribrojnik je oblika:

$$
\frac{n^2-n+1}{(n-1)n}=\frac{n(n-1)+1}{(n-1)n}=1+\frac{1}{(n-1)n}=1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}
$$

Konačna suma iznosi:

$$
\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)
$$

$$
=(n-1)\cdot 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)
$$

$$
=n-1+\frac{1}{1}-\frac{1}{n}=n-\frac{1}{n}.
$$

Zadatak B-4.2.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$
\operatorname{Re}(z^4)-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(z^4)=\big(\operatorname{Re}(z^2)\big)^2
$$

i

$$
\operatorname{Im}(z^2)=2\sqrt{2}.
$$

Prvo rješenje.

Zapišimo broj z u trigonometrijskom obliku

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r > 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Tada iz uvjeta zadatka imamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} r^4\cos 4\varphi - \dfrac{1}{2}r^4\sin 4\varphi = r^4\cos^2 2\varphi, \\ r^2\sin 2\varphi = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Dijeljenjem s r^4 prva jednadžba prelazi u jednadžbu

$$\cos 4\varphi - \frac{1}{2}\sin 4\varphi = \cos^2 2\varphi,$$

čija su rješenja

$$\varphi_1 = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

i

$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prvo rješenje otpada, jer je

$$\sin 2\varphi_1 = \sin k\pi = 0,$$

što nije u skladu s drugom jednadžbom sustava.

Uvrštavanjem drugog rješenja u drugu jednadžbu sustava slijedi

$$r^2\sin 2\varphi = r^2\sin\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) = r^2 \cdot \frac{\pm\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Kako je uvijek $r^2 > 0$, moguće je samo da k bude paran i tada je

$$r = 2.$$

Iz uvjeta

$$0 \leqslant \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi,$$

uz k paran slijedi da je

$$k \in \{0, 2\},$$

odnosno traženi kompleksni brojevi su

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

i

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\right).$$

Drugo rješenje.

Zapišimo broj z u algebarskom obliku

$$z = x + yi, \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Tada je

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

i

$$z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4xy(x^2 - y^2)i.$$

Uvjet zadatka se svodi na sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 2xy(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)^2 \\ 2xy = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Sređivanjem prve jednadžbe redom slijedi

$$\begin{gathered} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 2x^3y + 2xy^3 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4, \\ -4x^2y^2 - 2x^3y + 2xy^3 = 0, \\ -2xy(2xy + x^2 - y^2) = 0. \end{gathered}$$

Kako je

$$xy = \sqrt{2} \neq 0,$$

mora vrijediti

$$2xy + x^2 - y^2 = 0.$$

Uvrštavanjem $xy = \sqrt{2}$, odnosno $y = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$, dobivamo jednadžbu

$$x^4 + 2\sqrt{2}\,x^2 - 2 = 0.$$

Rješenja te bikvadratne jednadžbe su

$$(x^2)_{1,2} = -\sqrt{2} \pm 2.$$

Kako je za $x \in \mathbb{R}$ uvijek $x^2 \geqslant 0$, jedino rješenje je

$$x^2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Konačno slijedi

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

i

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Traženi kompleksni brojevi su

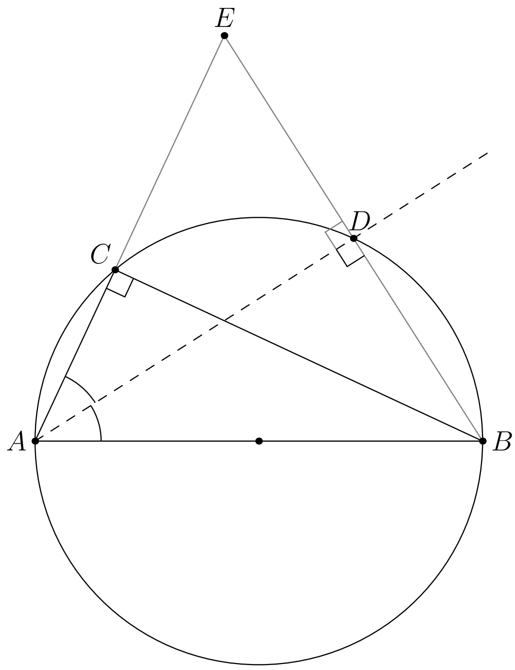
$$z_{1,2} = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}}\,i.$$

Zadatak B-4.3.

Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe opisanu kružnicu tog trokuta u točkama A i D. Neka je E točka na pravcu AC takva da je dužina $\overline{AD}$ okomita na dužinu $\overline{DE}$. Ako je točka C polovište dužine $\overline{AE}$, odredi $|\sphericalangle BAC|$.

Rješenje.

Budući da je trokut ABC pravokutni, hipotenuza $c = |AB|$ je promjer opisane kružnice k, pa je po Talesovom poučku kut $\sphericalangle ADB$ pravi. Zbog $AD \perp DE$ zaključujemo da točke B, D, E pripadaju istom pravcu.



Točka C polovište je dužine AE, pa vrijedi $b = |CA| = |CE|$.

Trokuti ABD i AED su slični jer se podudaraju u dva kuta, pa vrijedi

$$\frac{|AD|}{c} = \frac{|AD|}{2b} \qquad \Longrightarrow \qquad c = 2b \quad \Longrightarrow \quad \frac{b}{c} = \frac{1}{2},$$

odnosno $|\sphericalangle BAC| = 60°$.

Zadatak B-4.4.

Ana i Tea naizmjence bacaju asimetrični novčić kod kojega pismo pada s vjerojatnošću p. Pobjeđuje ona koja prva dobije pismo. Ako Tea baca prva, a Ana pobjeđuje s vjerojatnošću 0.25, odredi p.

Prvo rješenje.

Neka je q vjerojatnost da novčić padne na stranu s glavom. Tada je $q = 1 - p$.

Označimo s P i G pismo i glavu. Rezultate Teinih i Aninih bacanja prikazat ćemo u istom nizu. Kako Ana baca druga, ona pobjeđuje u slučajevima:

$$GP,\ GGGP,\ GGGGGP,\ \ldots$$

tj. kada padne neparni broj glava, a zatim pismo.

Vjerojatnost Anine pobjede jednaka je

$$qp + q^3p + q^5p + \cdots = qp(1 + q^2 + q^4 + \cdots).$$

Kako je $0 < q < 1$, pa je i $0 < q^2 < 1$, izraz u zagradi je geometrijski red čiji zbroj iznosi $\dfrac{1}{1-q^2}$, pa je vjerojatnost Anine pobjede $\dfrac{qp}{1-q^2}$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi:

$$\frac{qp}{1-q^2} = \frac{1}{4}.$$

Uvrštavanjem $q = 1 - p$ dobivamo:

$$\begin{aligned} 1 - (1-p)^2 &= 4(1-p)p, \\ 3p^2 - 2p &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su $p = 0$ i $p = \frac{2}{3}$. Kada bi bilo $p = 0$, pismo ne bi nikada palo, igra ne bi nikada završila i ne bi bilo pobjednika. Dakle, $p \neq 0$.

Stoga je $p = \frac{2}{3}$.

Drugo rješenje.

Neka je q vjerojatnost da novčić padne na stranu s glavom. Vrijedi $q = 1 - p$.

Vjerojatnost da Tea pobijedi u svom prvom bacanju je p.

Ana pobjeđuje u svom prvom bacanju ako je Tea bacila pismo, a Ana glavu, pa je vjerojatnost da Ana pobijedi u svom prvom bacanju qp.

Vjerojatnost da igra nije završena nakon što svaka baci jednom je $1 - p - qp = q^2$. Nakon toga su njihove vjerojatnosti za pobjedu iste kao na početku igre.

Označimo vjerojatnost da Tea pobijedi s x. Prema uvjetu zadatka, $x = 1 - 0.25 = 0.75$. Vjerojatnost da Tea pobijedi u svom drugom bacanju ili kasnije je $q^2 \cdot x$.

Ukupna vjerojatnost da Tea pobijedi (nakon svojeg prvog bacanja ili bilo kada kasnije) je $p + q^2x$ pa vrijedi $p + q^2x = x$ odakle je $p = (1 - q^2)x$. Uvrštavanjem $x = 0.75$ i $q = 1 - p$ dobivamo jednadžbu $p = (1 - (1-p)^2) \cdot 0.75$ čija su rješenja $p = 0$ i $p = \dfrac{2}{3}$.

Kada bi bilo $p = 0$, pismo ne bi nikada palo, igra ne bi nikada završila i ne bi bilo pobjednika. Dakle, $p = \dfrac{2}{3}$.

Zadatak B-4.5.

Odredi najmanji prirodni broj koji ima točno 30 djelitelja.

Rješenje.

Neka je

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ su prosti brojevi, a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ prirodni brojevi.

Svaki djelitelj d broja n je oblika $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, pri čemu je $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, za sve $i = 1, 2, \ldots, k$. Stoga je broj djelitelja broja n jednak

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Kako je $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, postoje sljedeće mogućnosti:

1. n ima tri prosta faktora s eksponentima $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ i $\alpha_3 = 4$.
2. n ima dva prosta faktora s eksponentima 5 i 4 ili 9 i 2 ili 14 i 1.
3. n ima samo jedan prosti faktor s eksponentom 29.

Najmanji n se postiže kad su prosti faktori najmanji mogući, a veći eksponenti su na manjim faktorima. Prema navedenm mogućnostima imamo:

1. Najmanji takav broj je $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$.
2. Najmanji takvi brojevi su $2^5 \cdot 3^4 = 2592$, ili $2^9 \cdot 3^2 = 4608$, ili $2^{14} \cdot 3^1 = 49152$.
3. Najmanji takav broj je 2^{29}.

Traženi najmanji broj s 30 djelitelja je 720.