

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

1. Odredi sve parove  $(x, y)$  realnih brojeva za koje vrijedi

$$|2x + 1| + 3x - 2y = -14$$

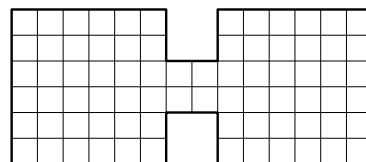
$$|3x + 1| + x + 4y = 25.$$

2. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve  $a, b$  i  $c$  za koje je  $a \geq c$  i  $b \geq c$  vrijedi nejednakost

$$\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}.$$

3. Vrhovima  $B, C$  i  $D$  kvadrata  $ABCD$  prolaze, redom, međusobno paralelni pravci  $b, c$  i  $d$ . Ako je udaljenost pravaca  $b$  i  $c$  jednaka 5, a udaljenost pravaca  $b$  i  $d$  jednaka 7, kolika može biti površina kvadrata  $ABCD$ ?

4. Ploču na slici treba prekriti pločicama dimenzija  $1 \times 2$ . Svaka pločica prekriva točno dva polja. Pločice se smiju rotirati i ne smiju se preklapati. Dokaži da je broj načina na koje se to može napraviti jednak zbroju kvadrata dvaju prirodnih brojeva.



5. Odredi sve trojke prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  takve da vrijedi

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

1. Odredi najveću moguću površinu pravokutnika upisanog u pravokutni trokut s katetama duljina 5 i 12 tako da se dva vrha pravokutnika nalaze na hipotenuzi, a po jedan vrh na svakoj kateti tog trokuta.
2. Odredi broj različitih vrijednosti koje poprima izraz

$$\frac{n^2 - 2}{n^2 - n + 2},$$

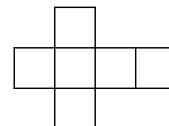
za  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2026\}$ .

3. Neka je  $m$  prirodan broj i neka su  $a$  i  $b$  prirodni brojevi takvi da je

$$m^2 < a < m^2 + m \quad \text{i} \quad m^2 < b < m^2 + m.$$

Odredi sve prirodne djelitelje  $d$  umnoška  $ab$  za koje vrijedi  $m^2 < d < m^2 + m$ .

4. *Blok* je figura koja se sastoji od šest jediničnih kvadrata kao što je prikazano na slici. Odredi najveći mogući broj blokova koje je moguće postaviti na ploču dimenzija  $6 \times 11$  tako da svaki prekriva točno šest polja. Blokovi se mogu rotirati i ne smiju se preklapati.



5. Neka je  $H$  ortocentar šiljastokutnog trokuta  $ABC$  i  $M$  polovište stranice  $\overline{AB}$ . Pravac  $HM$  siječe pravce  $AC$  i  $BC$  redom u točkama  $A_1$  i  $B_1$ . Neku su  $A_2$  i  $B_2$  redom nožišta okomica iz  $A_1$  i  $B_1$  na pravac  $CH$ . Dokaži da se pravci  $AB_2$  i  $BA_2$  sijeku na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

1. Neka je

$$A = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \dots + \frac{\sin 177^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}$$

i

$$B = \operatorname{tg} 91^\circ + \operatorname{tg} 92^\circ + \dots + \operatorname{tg} 179^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ.$$

Izračunaj  $A + B$ .

2. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$(2 + \sqrt{5})^{x^2 - 4x + 2} + (\sqrt{5} - 2)^{x^2 - 4x + 2} = 18.$$

3. Postoje li prirodni brojevi  $a$ ,  $b$  i  $c$  takvi da su

$$\log_a(bc + 1), \quad \log_b(ca + 1) \quad \text{i} \quad \log_c(ab + 1)$$

također prirodni brojevi?

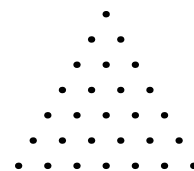
4. Neka je  $ABC$  šiljastokutni trokut u kojem je  $|BC| < |CA|$ . Središte njegove upisane kružnice je točka  $I$ , a  $k$  mu je opisana kružnica. Neka su  $M$  i  $N$  redom polovišta kraćih lukova nad tetivama  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$  kružnice  $k$ . Pravac kroz  $C$  paralelan s  $MN$  ponovno siječe kružnicu  $k$  u točki  $P$ . Pravac  $PI$  ponovno siječe kružnicu  $k$  u točki  $T$ . Dokaži da vrijedi

$$|MP| \cdot |MT| = |NP| \cdot |NT|.$$

5. Na pravcu  $p$  označeno je 2026 točaka na jednakim razmacima. U jednoj poluravnini (s iste strane pravca  $p$ ) označene su sve točke koje zajedno s dvjema označenim točkama pravca  $p$  čine vrhove jednakostraničnog trokuta. Neka je  $\mathcal{T}$  skup svih označenih točaka, uključujući one na pravcu  $p$ .

Josip može brisati točke skupa  $\mathcal{T}$  tako da u svakom koraku obriše po tri točke koje su vrhovi nekog jednakostraničnog trokuta. Korak ponavlja sve dok mu ne ostane točno jedna točka. Točka skupa  $\mathcal{T}$  koja može ostati posljednja neobrisana naziva se *Josipova*.

Odredi broj Josipovih točaka.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

1. Neka je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nekonstantan aritmetički niz realnih brojeva takav da postoji prirodni broj  $r$  za koji je

$$a_{r+1} + a_{r+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{3r+2}.$$

Dokaži da niti jedan član tog niza nije jednak 0.

2. Neka je  $ABC$  trokut s pravim kutom u vrhu  $C$ . Neka je  $D$  nožište visine iz vrha  $C$ . Kružnica sa središtem u  $C$  polumjera  $|CD|$  siječe opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točkama  $E$  i  $F$ . Pravac  $EF$  siječe dužinu  $\overline{CD}$  u točki  $P$ . Dokaži da je  $P$  polovište dužine  $\overline{CD}$ .

3. Za uređenu trojku prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  kažemo da je *morska* ako su  $a, b$  i  $c$  međusobno različiti, te je broj  $ac$  djeljiv brojevima  $a + b$  i  $b + c$ . Dokaži da

- a) za svaki prirodni broj  $d > 1$  postoji morska trojka  $(a, b, c)$  za koju je  $M(a, b, c) = d$ .  
b) ne postoji morska trojka  $(a, b, c)$  za koju je  $M(a, b, c) = 1$ .

*Napomena.*  $M(a, b, c)$  označava najveći zajednički djelitelj brojeva  $a, b$  i  $c$ .

4. Odredi koliko ima polinoma s realnim koeficijentima  $f(x) = x^{2026} + a_{2025}x^{2025} + \dots + a_1x + a_0$  takvih da je  $f(2026) = 0$  i da postoji polinom  $g(x)$  s realnim koeficijentima takav da jednakost

$$(f(x+1) - f(x)) \cdot g(x) = f(x)$$

vrijedi za svaki realan broj  $x$ .

5. Za arhipelag od 2026 otoka kažemo da je *dobro povezan* ako među svakih pet različitih otoka, postoje tri takva da između svaka dva od njih postoji dvosmjerna brodska linija. Odredi najveći prirodni broj  $N$  takav da u svakom dobro povezanom arhipelagu postoji niz od barem  $N$  različitih otoka takav da su svaka dva uzastopna, te prvi i posljednji otok u nizu povezani brodskom linijom.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.