

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

### Zadatak A-1.1.

Odredi sve parove  $(x, y)$  realnih brojeva za koje vrijedi

$$|2x + 1| + 3x - 2y = -14$$

$$|3x + 1| + x + 4y = 25.$$

### Rješenje.

Promotrimo prvo slučaj kada je  $x \leq -\frac{1}{2}$ . Tada je  $2x + 1, 3x + 1 \leq 0$ , pa sustav postaje

$$\begin{aligned}x - 2y &= -13 \\ -2x + 4y &= 26.\end{aligned}$$

Ovaj sustav ima beskonačno rješenja oblika  $\left(x, \frac{x + 13}{2}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , no samo ona za koja je  $x \leq -\frac{1}{2}$  zadovoljavaju naš uvjet.

Slično, za  $x \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]$  sustav postaje

$$\begin{aligned}5x - 2y &= -15 \\ -2x + 4y &= 26,\end{aligned}$$

čije rješenje  $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{25}{4}$  ne zadovoljava uvjet  $x > -\frac{1}{2}$ .

Končano, za  $x > -\frac{1}{3}$  sustav postaje

$$\begin{aligned}5x - 2y &= -15 \\ 4x + 4y &= 24,\end{aligned}$$

čije jedino rješenje  $x = -\frac{6}{14}, y = \frac{90}{14}$  ne zadovoljava uvjet  $x > -\frac{1}{3}$ .

Zaključujemo da su rješenja oni i samo oni uređeni parovi oblika  $\left(x, \frac{x + 13}{2}\right)$ ,  $x \leq -\frac{1}{2}$ .

### Zadatak A-1.2.

Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  za koje je  $a \geq c$  i  $b \geq c$  vrijedi nejednakost

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

#### Prvo rješenje.

Kvadriranjem obje strane dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$c(a-c) + 2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)} + c(b-c) \leq ab.$$

Sada raspisivanjem  $ab = (c + (a-c))(c + (b-c)) = c^2 + c(b-c) + c(a-c) + (a-c)(b-c)$  dobijemo

$$c(a-c) + c(b-c) + 2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)} \leq c^2 + c(b-c) + c(a-c) + (a-c)(b-c),$$

odnosno

$$2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)} \leq c^2 + (a-c)(b-c).$$

Primjenom A–G nejednakosti na  $c^2$  i  $(a-c)(b-c)$  vidimo da zadnja nejednakost vrijedi.

#### Drugo rješenje.

Uvedimo oznake  $x := a - c$  i  $y := b - c$ .

Sada nejednakost postaje

$$\sqrt{cx} + \sqrt{cy} \leq \sqrt{(c+x)(c+y)}.$$

Kvadriranjem dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$cx + cy + 2\sqrt{c^2xy} \leq c^2 + cx + cy + xy,$$

odnosno

$$2\sqrt{c^2xy} \leq c^2 + xy.$$

Primjenom A–G nejednakosti na nenegativne brojeve  $c^2$  i  $xy$  vidimo da zadnja nejednakost vrijedi.

### Zadatak A-1.3.

Vrhovima  $B$ ,  $C$  i  $D$  kvadrata  $ABCD$  prolaze, redom, međusobno paralelni pravci  $b$ ,  $c$  i  $d$ . Ako je udaljenost pravaca  $b$  i  $c$  jednaka 5, a udaljenost pravaca  $b$  i  $d$  jednaka 7, kolika može biti površina kvadrata  $ABCD$ ?

### Rješenje.

Uočimo da imamo tri mogućnosti za pravac  $b$ : on može sjeći stranicu  $\overline{CD}$ , stranicu  $\overline{AD}$ , ili može sjeći kvadrat samo u točki  $B$ .

Ukoliko  $b$  siječe stranicu  $\overline{CD}$ , tada se  $b$  nalazi između pravaca  $c$  i  $d$ , pravac  $c$  siječe kvadrat samo u točki  $C$ , a  $d$  siječe stranicu  $\overline{AB}$ .

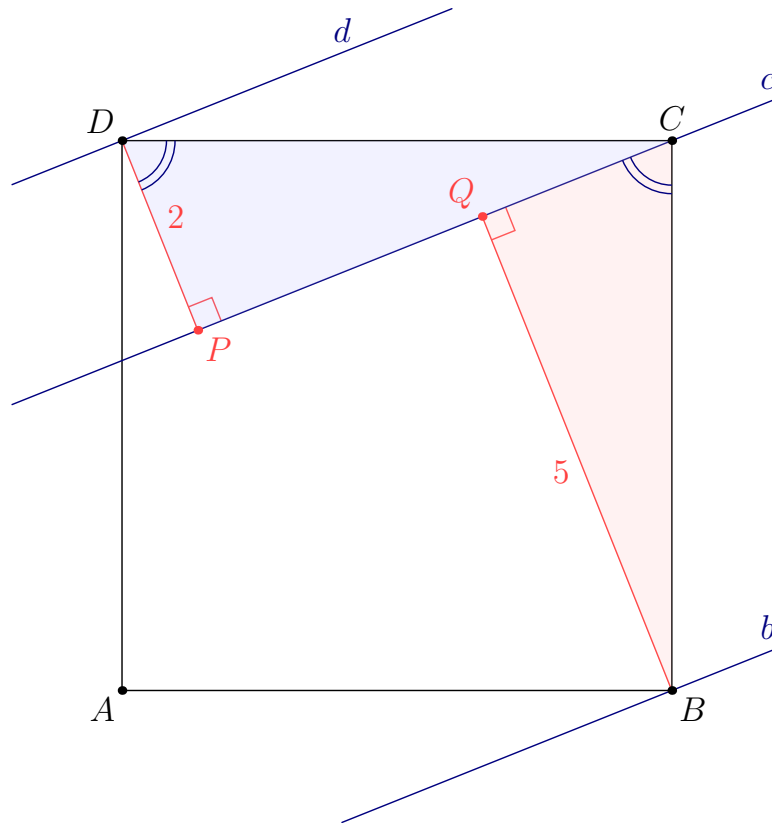
Ukoliko  $b$  siječe stranicu  $\overline{DA}$ , tada bi se  $d$  nalazio između  $b$  i  $c$ . U tom bi slučaju udaljenost između  $b$  i  $d$  bila manja od one između  $b$  i  $c$ , pa vidimo da ovaj slučaj nije moguć.

Ukoliko  $b$  siječe kvadrat samo u točki  $B$ , tada se  $c$  nalazi između  $b$  i  $d$ , te  $c$  siječe stranicu  $\overline{AD}$  zbog uvjeta udaljenosti.

Dakle, postoje dva slučaja koje je potrebno analizirati.

Promotrimo prvo slučaj kada pravac  $b$  siječe kvadrat samo u točki  $B$ . Budući da je pravac  $c$  između pravaca  $b$  i  $d$ , udaljenost pravaca  $b$  i  $c$  veća je od udaljenosti pravaca  $c$  i  $d$ , stoga pravac  $c$  siječe stranicu  $\overline{AD}$  kvadrata.

Udaljenost između pravaca  $c$  i  $d$  je tada  $7 - 5 = 2$ .



Neka su  $P$  i  $Q$  nožišta okomica iz točaka  $D$  i  $B$  na pravac  $c$ .

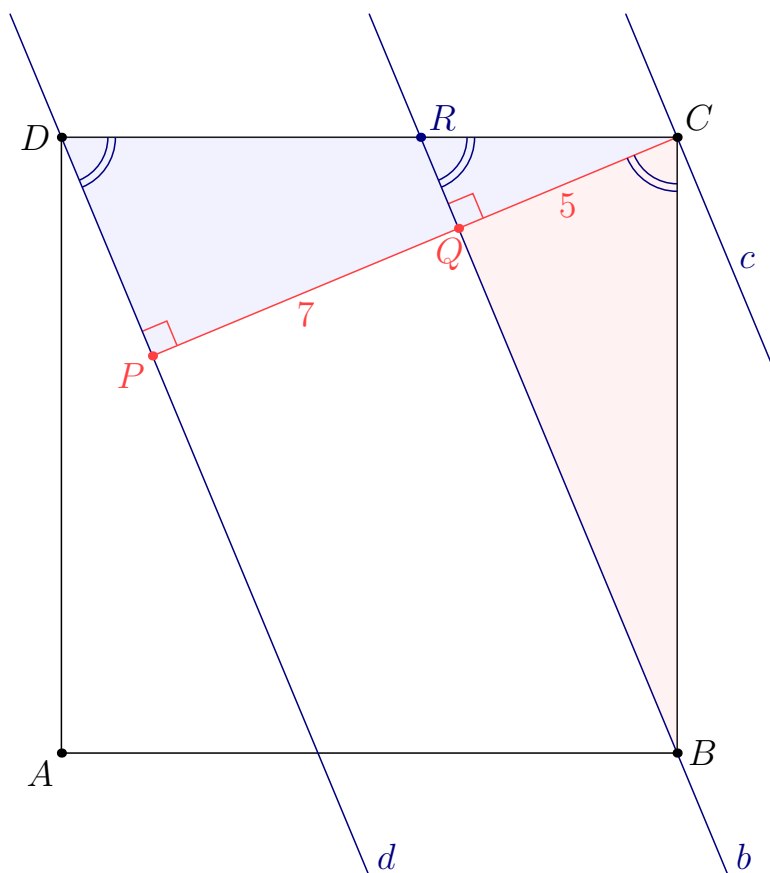
Kako su kutovi  $\sphericalangle QCB$  i  $\sphericalangle PDC$  sukladni (kutovi s okomitim kracima) i  $|BC| = |DC|$  zaključujemo da su pravokutni trokuti  $BCQ$  i  $CDP$  sukladni.

Stoga je  $|PC| = |QB| = 5$ . Po Pitagorinom poučku, konačno imamo:

$$|CD| = \sqrt{|DP|^2 + |PC|^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

Dakle, površina u ovom slučaju iznosi 29.

Promotrimo sada drugi slučaj, kada se pravac  $b$  nalazi između  $c$  i  $d$ .



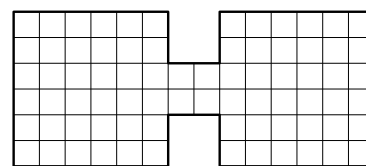
Neka su  $P$  i  $Q$  redom nožišta okomica iz točke  $C$  na pravce  $d$  i  $b$ . Slično kao i u prethodnom slučaju pokazuje se da su pravokutni trokuti  $BCQ$  i  $CDP$  sukladni. Stoga je  $|DP| = |CQ| = 5$  a  $|CP| = 5 + 7 = 12$ . Po pitagorinom poučku, konačno imamo

$$|CD| = \sqrt{|DP|^2 + |PC|^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Dakle, površina u ovom slučaju iznosi 169.

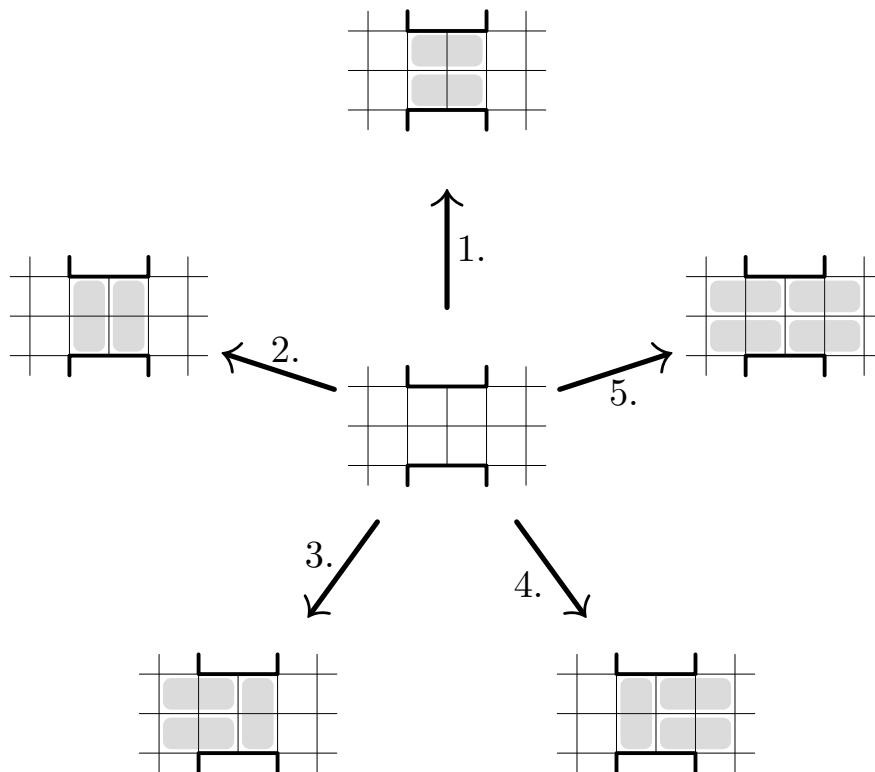
#### Zadatak A-1.4.

Ploču na slici treba prekriti pločicama dimenzija  $1 \times 2$ . Svaka pločica prekriva točno dva polja. Pločice se smiju rotirati i ne smiju se preklapati. Dokaži da je broj načina na koje se to može napraviti jednak zbroju kvadrata dvaju prirodnih brojeva.



## Rješenje.

Neka  $M$  označava broj načina na koje  $6 \times 6$  ploču možemo popločati pločicama dimenzija  $1 \times 2$ , a  $N$  broj načina na koje  $6 \times 6$  ploču kojoj su uklonjena dva središnja polja na jednom rubu možemo popločati pločicama dimenzija  $1 \times 2$ . Dio ploče sastavljen od četiri polja između dvije  $6 \times 6$  ploče nazivamo *most*. Ovisno o načinu na koji je popločan most razlikujemo pet slučajeva.



**Prvi slučaj:** Most je popločan s dvije horizontalne domine. Preostala polja možemo popločati na  $M^2$  načina, jer svaki od preostalih  $6 \times 6$  dijelova ploče možemo popločati neovisno od drugog.

**Drugi slučaj:** Most je popločan s dvije vertikalne domine. Preostala polja možemo popločati na  $M^2$  načina, jer svaki od preostalih  $6 \times 6$  dijelova ploče možemo popločati neovisno od drugog.

**Treći slučaj:** Desna strana mosta je okupirana vertikalnom dominom, a lijeva strana s dvije horizontalne domine koje popločavaju i dva centralna polja desne stranice lijevog  $6 \times 6$  dijela ploče. Preostala polja možemo popločati na  $N \cdot M$  načina.

**Četvrti slučaj:** Lijeva strana mosta je okupirana vertikalnom dominom, a desna strana s dvije horizontalne domine koje popločavaju i dva centralna polja lijeve stranice desnog  $6 \times 6$  dijela ploče. Preostala polja možemo popločati na  $M \cdot N$  načina.

**Peti slučaj:** Most je prekriven s četiri horizontalne domine, na način preostaju dva neovisna  $6 \times 6$  komada kojima su uklonjena dva centralna polja na jednom rubu. Preostala polja možemo popločati na  $N^2$  načina.

Preostale dvije mogućnosti prekrivanja mosta ne dozvoljavaju prekrivanje ostatka ploče, budući da svaka od preostale dvije komponente sadrži neparno mnogo polja ploče.



Zbrajanjem dobijemo da je ukupan broj načina na koji se cijela ploče može popločati jednak

$$2M^2 + 2MN + N^2 = M^2 + (M + N)^2.$$

### Zadatak A-1.5.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  takve da vrijedi

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

#### Rješenje.

Pokažimo da je nužno  $a \leq 2$ . Doista, za  $a \geq 3$ , znamo da 8 dijeli  $2^a$ . S druge strane  $2b^2$  daje ostatak 0 ili 2, a  $3^c$  ostatak 1 ili 3 pri dijeljenju s 8. Stoga vidimo da lijeva strana jednakosti daje ostatak 0 ili 2 pri djeljenju s 8, a desna 4 ili 6, čime dolazimo do kontradikcije.

Promotrimo sada slučaj kada je  $a = 1$ .

Jednadžba postaje  $2b^2 = 3^c + 65$ .

Promotrimo ostatke koje obje strane jednadžbe daju pri dijeljenju s 8. Ako je  $b$  neparan, onda  $2b^2$  daje ostatak 2 pri dijeljenju s 8, a ako je  $b$  paran, onda  $2b^2$  daje ostatak 0 pri dijeljenju s 8. Ako je  $c$  neparan, onda  $3^c + 65$  daje ostatak 4 pri dijeljenju s 8, a ako je  $c$  paran, onda  $3^c + 65$  daje ostatak 2 pri dijeljenju s 8. Slijedi da je  $c$  nužno paran.

Promotrimo sada ostatke koje obje strane jednadžbe daju pri dijeljenju s 5. Kvadrati daju ostatke 0, 1, 4 pri dijeljenju s 5, pa  $2b^2$  daje ostatak 0, 2 ili 3. S druge strane,  $3^c$  daje ostatak 1 ili 4 pri dijeljenju s 5 za paran  $c$ , pa  $3^c + 65$  također daje ostatak 1 ili 4. Zaključujemo da je nemoguće da obje strane daju isti ostatak pri dijeljenju s 5 i pri dijeljenju s 8, pa u ovom slučaju nema rješenja.

Promotrimo sada slučaj kada je  $a = 2$ . Jednadžba postaje  $2b^2 = 3^c + 63$ .

Desna strana je djeljiva s 3, pa je  $b = 3k$  za neki prirodan broj  $k$ . Jednadžba postaje

$$2k^2 = 3^{c-2} + 7.$$

Slijedi da je  $c \geq 2$ . Za  $c = 2$  dobivamo rješenje  $k = 2$ , odnosno  $b = 6$ .

Za  $c > 2$  desna strana jednadžbe daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, a lijeva strana daje ostatak 0 ili 2, pa u tom slučaju nema rješenja.

Zaključujemo da je jedino rješenje  $(a, b, c) = (2, 6, 2)$ .

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

### Zadatak A-2.1.

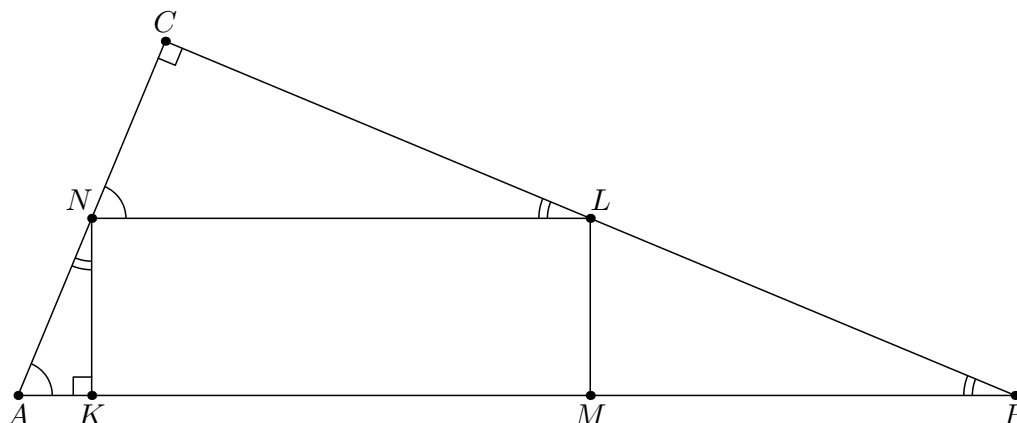
Odredi najveću moguću površinu pravokutnika upisanog u pravokutni trokut s katetama duljina 5 i 12 tako da se dva vrha pravokutnika nalaze na hipotenuzi, a po jedan vrh na svakoj kateti tog trokuta.

### Rješenje.

Pitagorin poučak nam govori da je hipotenuza pravokutnog trokuta u pitanju duljine  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ .

Označimo sada vrhove nasuprot stranica duljina 12, 5 i 13 s  $A$ ,  $B$  i  $C$  redom.

Označimo vrhove pravokutnika s  $K$ ,  $L$ ,  $M$  i  $N$  kao na slici.



Kako je trokut  $ANK$  sličan trokutu  $ABC$ , znamo da je

$$|KN| = \frac{12}{13} \cdot |AN|.$$

S druge strane, kako je trokut  $NLC$  sličan trokutu  $ABC$ , znamo da je

$$|NL| = \frac{13}{5} \cdot |NC| = \frac{13}{5} \cdot (5 - |AN|).$$

Površina pravokutnika  $KLMN$  je tada jednaka

$$P_{KLMN} = |KN| \cdot |NL| = \frac{12}{5} (5|AN| - |AN|^2)$$

Kako je površina izražena kao kvadratna funkcija u  $|AN|$ , čiji je vodeći koeficijent negativan, najveća vrijednost se postiže u tjemenu, odnosno kada je  $|AN| = \frac{5}{2}$ . Najveća moguća površina tada iznosi

$$\frac{12}{5} \left( 5 \cdot \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} \right)^2 \right) = 15.$$

### Zadatak A-2.2.

Odredi broj različitih vrijednosti koje poprima izraz

$$\frac{n^2 - 2}{n^2 - n + 2},$$

za  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2026\}$ .

### Rješenje.

Odredimo sve parove brojeva  $(m, n)$  iz skupa  $\{1, 2, \dots, 2026\}$  za koje je  $m < n$  i

$$\frac{n^2 - 2}{n^2 - n + 2} = \frac{m^2 - 2}{m^2 - m + 2},$$

odnosno

$$(n^2 - 2)(m^2 - m + 2) = (m^2 - 2)(n^2 - n + 2).$$

Množenjem zagrada slijedi

$$n^2m^2 - n^2m + 2n^2 - 2m^2 + 2m - 4 = m^2n^2 - m^2n + 2m^2 - 2n^2 + 2n - 4,$$

a to je pak ekvivalentno s

$$(m - n)(mn - 4m - 4n + 2) = 0.$$

Budući da je  $m \neq n$ , slijedi da je  $mn - 4m - 4n + 2 = 0$ , odnosno

$$(m - 4)(n - 4) = 14.$$

Budući da je  $-3 \leq m - 4 < n - 4$ , jedine mogućnosti su

$$\begin{cases} m - 4 = 1 \\ n - 4 = 14 \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} m - 4 = 2 \\ n - 4 = 7, \end{cases}$$

odnosno  $(m, n) = (5, 18)$  ili  $(m, n) = (6, 11)$ . Dakle, postoje točno dva para brojeva iz skupa  $\{1, 2, \dots, 2026\}$  za koje izraz poprima iste vrijednosti, pa je broj različitih vrijednosti koje izraz poprima jednak  $2026 - 2 = 2024$ .

### Zadatak A-2.3.

Neka je  $m$  prirodan broj i neka su  $a$  i  $b$  prirodni brojevi takvi da je

$$m^2 < a < m^2 + m \quad \text{i} \quad m^2 < b < m^2 + m.$$

Odredi sve prirodne djelitelje  $d$  umnoška  $ab$  za koje vrijedi  $m^2 < d < m^2 + m$ .

### Rješenje.

Neka je  $a = m^2 + t$  i  $b = m^2 + s$  za  $1 \leq s, t < m$ . Neka je  $d = m^2 + r$  za  $1 \leq r < m$  djeliteľ od  $ab$ . Tada je

$$m^2 + r \mid (m^2 + t)(m^2 + s).$$

Broj  $m^2 + t$  daje isti ostatak pri dijeljenju s  $m^2 + r$  kao i  $m^2 + t - (m^2 - r) = t - r$ . Slično,  $m^2 + s$  daje isti ostatak kao  $s - r$ . Stoga

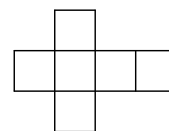
$$m^2 + r \mid (s - r)(t - r).$$

Kako su  $r, s, t$  prirodni brojevi između  $m^2$  i  $m^2 + m$ , slijedi  $|s - r| < m$  i  $|t - r| < m$ , pa je  $|(s - r)(t - r)| < m^2 < m^2 + r$ . Jedini način da broj koji je po apsolutnoj vrijednosti manji od  $m^2 + r$  bude djeljiv s  $m^2 + r$  je ako je taj broj jednak 0. Slijedi da je  $r = s$  ili  $r = t$ , pa je  $d = a$  ili  $d = b$ .

Za  $d = a$  i  $d = b$  uvjet zadatka je zadovoljen, pa zaključujemo da su  $a$  i  $b$  jedini brojevi koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

### Zadatak A-2.4.

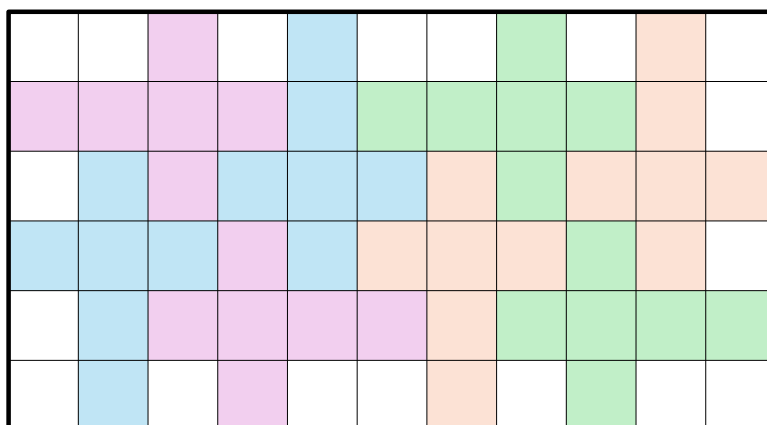
*Blok* je figura koja se sastoji od šest jediničnih kvadrata kao što je prikazano na slici. Odredi najveći mogući broj blokova koje je moguće postaviti na ploču dimenzija  $6 \times 11$  tako da svaki prekriva točno šest polja. Blokovi se mogu rotirati i ne smiju se preklapati.



### Rješenje.

Promotrimo rubna polja ploče. Zbog oblika bloka, jasno je da dva susjedna rubna polja ploče ne mogu biti prekrivena blokovima. Također je jasno da kutna polja ploče ne mogu biti prekrivena blokovima. Zbog toga zaključujemo da je najviše 14 rubnih polja ploče prekriveno blokovima, po 2 na lijevoj i desnoj strani, te po 5 na gornjoj i donjoj strani. Uz preostalih 36 polja ploče koja nisu rubna, zaključujemo da najviše 50 polja ploče može biti prekriveno blokovima, odnosno da na ploču možemo smjestiti najviše 8 blokova.

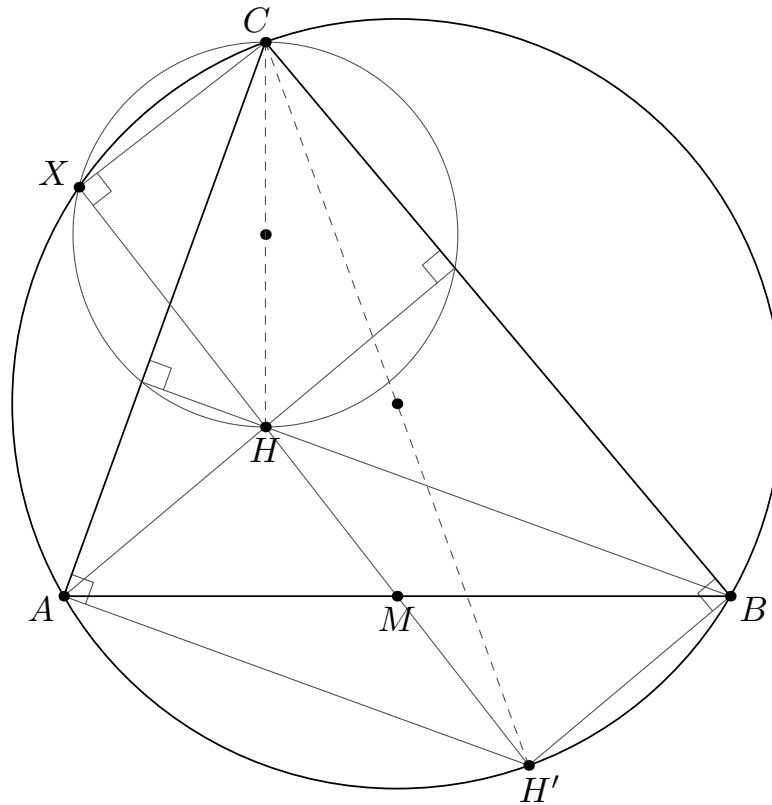
Na slici je dan primjer postavljanja 8 blokova na ploču.



### Zadatak A-2.5.

Neka je  $H$  ortocentar šiljastokutnog trokuta  $ABC$  i  $M$  polovište stranice  $\overline{AB}$ . Pravac  $HM$  siječe pravce  $AC$  i  $BC$  redom u točkama  $A_1$  i  $B_1$ . Neku su  $A_2$  i  $B_2$  redom nožišta okomica iz  $A_1$  i  $B_1$  na pravac  $CH$ . Dokaži da se pravci  $AB_2$  i  $BA_2$  sijeku na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .

### Rješenje.



Neka je  $H'$  centralnosimetrična slika točke  $H$  s obzirom na točku  $M$ . Budući da se dužine  $\overline{AB}$  i  $\overline{HH'}$  međusobno raspolavljaju, četverokut  $AH'BH$  je paralelogram. Iz toga slijedi da je pravac  $BH$  paralelan s  $H'A$ , a pravac  $AH$  paralelan s  $H'B$ .

Budući da je pravac  $AC$  okomit na  $BH$ , slijedi da je okomit i na  $H'A$ , odnosno

$$|\sphericalangle H'AC| = 90^\circ.$$

Jednako tako, budući da je pravac  $BC$  okomit na  $AH$ , slijedi da je okomit i na  $H'B$ , to jest,

$$|\sphericalangle H'BC| = 90^\circ.$$

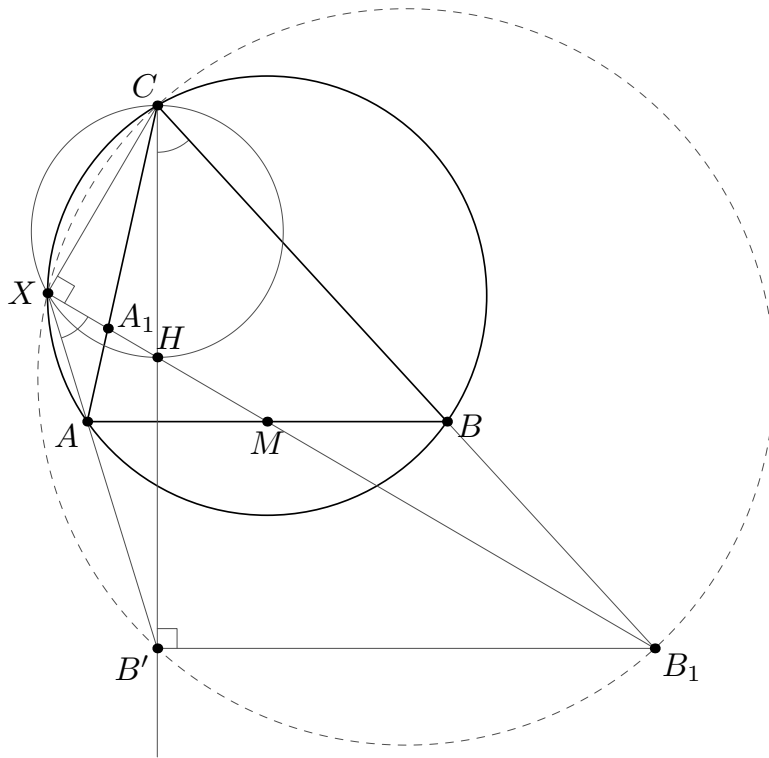
Iz prethodnih dviju jednakosti prema obratu Talesovog poučka slijedi da je  $\overline{CH'}$  promjer opisane kružnice trokuta  $ABC$ .

Neka je  $X$  drugo sjecište pravca  $HH'$  i opisane kružnice trokuta  $ABC$ . Prema Talesovom poučku imamo

$$|\sphericalangle HXC| = |\sphericalangle H'XC| = 90^\circ,$$

odakle slijedi da točka  $X$  leži na kružnici promjera  $\overline{CH'}$ .

Dakle, opisana kružnica trokuta  $ABC$ , kružnica promjera  $\overline{CH'}$  i pravac  $HM$  se sijeku u točki  $X$ .



Neka je sada  $B'$  sjecište pravaca  $AX$  i  $CH$  te označimo  $|\sphericalangle CBA| = \beta$ . Budući da je četverokut  $ABCX$  tetivan, vrijedi  $|\sphericalangle CXA| = 180^\circ - \beta$ . Zato slijedi

$$|\sphericalangle B_1XB'| = |\sphericalangle HXA| = |\sphericalangle CXA| - |\sphericalangle CXH| = (180^\circ - \beta) - 90^\circ = 90^\circ - \beta.$$

S druge strane,

$$|\sphericalangle B_1CB'| = |\sphericalangle BCH| = 90^\circ - |\sphericalangle CBA| = 90^\circ - \beta.$$

Dakle,  $|\sphericalangle B_1XB'| = |\sphericalangle B_1CB'|$  pa slijedi da je četverokut  $B_1CXB'$  tetivan. Zato

$$|\sphericalangle B_1B'C| = 180^\circ - |\sphericalangle CXB_1| = 90^\circ,$$

iz čega dobivamo da je  $B'$  nožište okomice iz točke  $B_1$  na pravac  $CH$ . Drugim riječima, točke  $B'$  i  $B_2$  se podudaraju.

Posebno, pravac  $AB_2$  prolazi točkom  $X$ . Analogno se pokaže i da pravac  $BA_2$  prolazi tom točkom, odakle slijedi tvrdnja zadatka.

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

### Zadatak A-3.1.

Neka je

$$A = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \dots + \frac{\sin 177^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}$$

i

$$B = \operatorname{tg} 91^\circ + \operatorname{tg} 92^\circ + \dots + \operatorname{tg} 179^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ.$$

Izračunaj  $A + B$ .

### Rješenje.

Svaki pribrojnik u zbroju  $A$  je oblika  $\frac{\sin(4n+1)^\circ}{\cos(2n)^\circ \cos(2n+1)^\circ}$  za  $n = 0, 1, \dots, 44$ .

Uočimo da je

$$\begin{aligned} \frac{\sin(4n+1)^\circ}{\cos(2n)^\circ \cos(2n+1)^\circ} &= \frac{\sin((2n)^\circ + (2n+1)^\circ)}{\cos(2n)^\circ \cos(2n+1)^\circ} \\ &= \frac{\sin(2n)^\circ \cos(2n+1)^\circ + \cos(2n)^\circ \sin(2n+1)^\circ}{\cos(2n)^\circ \cos(2n+1)^\circ} \\ &= \operatorname{tg}(2n)^\circ + \operatorname{tg}(2n+1)^\circ. \end{aligned}$$

Time zbroj  $A$  sada postaje

$$A = \operatorname{tg}(0^\circ) + \operatorname{tg}(1^\circ) + \dots + \operatorname{tg}(88^\circ) + \operatorname{tg}(89^\circ).$$

Kako je

$$\operatorname{tg}(k)^\circ + \operatorname{tg}(180 - k)^\circ = \operatorname{tg}(k)^\circ - \operatorname{tg}(k)^\circ = 0$$

slijedi da je

$$A + B = 0.$$

### Zadatak A-3.2.

Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$(2 + \sqrt{5})^{x^2 - 4x + 2} + (\sqrt{5} - 2)^{x^2 - 4x + 2} = 18.$$

### Rješenje.

Uočimo da je  $(2 + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} - 2) = 1$ , odnosno

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{2 + \sqrt{5}}.$$

Supstitucijom  $t = (2 + \sqrt{5})^{x^2 - 4x + 2}$  početna jednačina postaje

$$t^2 - 18t + 1 = 0.$$

Rješenja gornje kvadratne jednačine su  $t_1 = 9 + 4\sqrt{5}$  i  $t_2 = 9 - 4\sqrt{5}$ .

Uvrštavanjem prvog rješenja  $t_1 = 9 + 4\sqrt{5}$  natrag u supstituciju redom imamo

$$(2 + \sqrt{5})^{x^2 - 4x + 2} = 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2,$$

iz čega slijedi da je  $x^2 - 4x + 2 = 2$ , tj.  $x^2 - 4x = 0$

Rješavanjem kvadratne jednačine  $x^2 - 4x = 0$  dobivamo  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 4$ .

Uvrštavanjem drugog rješenja  $t_2 = 9 - 4\sqrt{5}$  natrag u supstituciju redom imamo

$$(2 + \sqrt{5})^{x^2 - 4x + 2} = 9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2 = (2 + \sqrt{5})^{-2},$$

iz čega slijedi da je  $x^2 - 4x + 2 = -2$ , tj.  $x^2 - 4x + 4 = 0$ .

Rješavanjem kvadratne jednačine  $x^2 - 4x + 4 = 0$  dobivamo  $x_3 = 2$ .

Dakle, sva rješenja početne jednačine su  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$  i  $x_3 = 2$ .

### Zadatak A-3.3.

Postoje li prirodni brojevi  $a$ ,  $b$  i  $c$  takvi da su

$$\log_a(bc + 1), \quad \log_b(ca + 1) \quad \text{i} \quad \log_c(ab + 1)$$

također prirodni brojevi?

#### Prvo rješenje.

Pretpostavimo da postoje takvi prirodni brojevi.

Zbog simetričnosti uvjeta zadatka bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti  $a \leq b \leq c$ .

Nadalje, kako su  $a$ ,  $b$  i  $c$  baze logaritma imamo da je  $a, b, c \geq 2$ .

Sada redom imamo da je

$$ab + 1 \leq c^2 + 1 < c^3,$$

iz čega slijedi da je  $\log_c(ab + 1) < 3$ .

Kako je  $\log_c(ab + 1)$  prirodan broj, slijedi da je  $\log_c(ab + 1) = 1$  ili  $\log_c(ab + 1) = 2$ .

Ako je  $\log_c(ab + 1) = 2$ , tada je  $c^2 = ab + 1$ .

Ako je  $b < c$  tada redom imamo

$$c^2 = ab + 1 \leq (c - 1)^2 + 1 = c^2 - 2c + 2 < c^2$$

što dovodi do kontradikcije. Dakle, nužno je  $b = c$ .

Uvrštavanjem u  $c^2 = ab + 1$  imamo da je tada  $c^2 = ac + 1$ . Kako su  $c^2$  i  $ac$  djeljivi s  $c$ , iz gornjeg slijedi da tada  $c$  mora dijeliti i 1, odnosno  $c = 1$ , što je u kontradikciji s  $c \geq 2$ .

Ako je  $\log_c(ab + 1) = 1$ , tada je  $c = ab + 1$ .

Uočimo da za  $ac + 1$  vrijedi

$$b < ac + 1 = a(ab + 1) + 1 \leq b^3 + b + 1 < b^4$$

iz čega slijedi da je  $1 < \log_b(ac + 1) < 4$ .

Kako je  $\log_b(ac + 1)$  također prirodan broj, slijedi da mora biti  $\log_b(ac + 1) = 2$  ili  $\log_b(ac + 1) = 3$ .

Ako je  $\log_b(ac + 1) = 2$ , tada je  $ac + 1 = b^2$ .

Uvrštavanjem  $c = ab + 1$  imamo da je tada

$$b^2 = ac + 1 = a^2b + a + 1.$$

Kako su  $b^2$  i  $a^2b$  djeljivi s  $b$  slijedi da mora i  $a + 1$  također biti djeljiv s  $b$ .

Nadalje, kako je

$$a + 1 \leq b + 1 < 2b$$

slijedi da mora biti  $b = a + 1$ .

Uvrštavanjem  $b = a + 1$  i  $c = ab + 1$  u  $ac + 1 = b^2$  dobivamo

$$(a + 1)^2 = b^2 = a(ab + 1) + 1 = a(a(a + 1) + 1) + 1 = a^3 + a^2 + a + 1,$$

odnosno

$$0 = a^3 - a = a(a^2 - 1) \geq 2(2^2 - 1) = 6$$

pa dolazimo do kontradikcije.

Ako je  $\log_b(ac + 1) = 3$ , tada je  $ac + 1 = b^3$ .

Uvrštavanjem  $c = ab + 1$  imamo da je tada

$$b^3 = ac + 1 = a^2b + a + 1.$$

Analogno kao i u prethodnom slučaju zaključujemo da tada mora biti  $b = a + 1$ .

Uvrštavanjem  $b = a + 1$  i  $c = ab + 1$  u  $b^3 = ac + 1$  dobivamo

$$(a + 1)^3 = b^3 = ac + 1 = a(ab + 1) + 1 = a(a(a + 1) + 1) + 1 = a^3 + a^2 + a + 1,$$

što se nakon kraćenja svodi na

$$0 = 2a^2 + 2a.$$

Zadnja jednakost je pak očito nemoguća jer je  $a$  prirodan broj.

Dakle, ne postoje takvi prirodni brojevi  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

## Drugo rješenje.

Dokažimo da ne postoje takvi prirodni brojevi  $a, b$  i  $c$ .

Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoje takvi prirodni brojevi  $a, b$  i  $c$ .

Tada su  $k = \log_a(bc + 1)$ ,  $l = \log_b(ca + 1)$  i  $m = \log_c(ab + 1)$  također prirodni brojevi.

Iz definicije logaritma imamo

$$\begin{aligned}bc + 1 &= a^k \\ca + 1 &= b^l \\ab + 1 &= c^m.\end{aligned}$$

Množenjem gornjih jednakosti i sređivanjem dobivamo

$$a^2b^2c^2 + abc(a + b + c) + ab + bc + ca + 1 = a^kb^lc^m.$$

Kako su  $k, l, m \geq 1$  iz gornjeg zaključujemo da  $1 + ab + bc + ca$  mora biti djeljiv s  $abc$ .

Posebno, kako je  $1 + ab + bc + ca$  djeljivo s  $abc$ , imamo da je tada i  $1 + ab + bc + ca \geq abc$ .

Nadalje, kako su  $a, b$  i  $c$  baze logaritma imamo da je  $a, b, c \geq 2$ . Time je

$$\frac{1 + ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{13}{8} < 2$$

Dakle, imamo da je

$$1 \leq \frac{1 + ab + bc + ca}{abc} < 2$$

i da je  $\frac{1 + ab + bc + ca}{abc}$  prirodan broj jer je  $1 + ab + bc + ca$  djeljivo s  $abc$ .

Prema tome mora biti  $\frac{1 + ab + bc + ca}{abc} = 1$ , tj.  $1 + ab + bc + ca = abc$ .

Kako je gornja jednadžba simetrična u  $a, b$  i  $c$ , bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $a$  najmanji među brojevima  $a, b$  i  $c$ .

Kako je  $a \leq b, c$  te  $b, c \geq 2$  redom imamo

$$1 = \frac{1 + ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{13}{4a},$$

odnosno imamo da je  $a \leq \frac{13}{4} < 4$ .

Dakle, mora biti  $a = 2$  ili  $a = 3$ .

Ako je  $a = 2$ , uvrštavanjem natrag u jednadžbu  $1 + ab + bc + ca = abc$  te izražavanjem  $b$  preko  $c$  redom imamo

$$b = \frac{2c + 1}{c - 2} = 2 + \frac{5}{c - 2}.$$

Kako je  $b$  prirodan broj slijedi da  $c - 2$  mora dijeliti 5, a kako je  $c \geq 2$  slijedi da je to jedino moguće ako je  $c = 3$  ili  $c = 7$ .

Uvrštavanjem natrag dobivamo da je za  $c = 3$  tada  $b = 7$ , a za  $c = 7$  je  $b = 3$ .

Međutim, za ta rješenja nisu svi logaritmi koje promatramo prirodni brojevi. Na primjer  $\log_2(3 \cdot 7 + 1) = \log_2(22)$  nije prirodan broj.

Ako je  $a = 3$ , uvrštavanjem natrag u jednadžbu  $1 + ab + bc + ca = abc$  i izražavanjem  $b$  preko  $c$  dobivamo

$$b = \frac{3c + 1}{2c - 3}.$$

Kako su  $b, c \geq 3$  redom imamo

$$3 \leq b = \frac{3c + 1}{2c - 3} \leq \frac{3c + 1}{c} = 3 + \frac{1}{c} < 4$$

iz čega slijedi da mora biti  $b = 3$ .

Međutim, uvrštavanjem natrag  $b = 3$  dobivamo da je tada  $c = \frac{10}{3}$  što nije prirodan broj.

Dakle, ni u slučaju  $a = 3$  nemamo rješenja iz čega konačno slijedi da ne postoje takvi prirodni brojevi  $a, b$  i  $c$ .

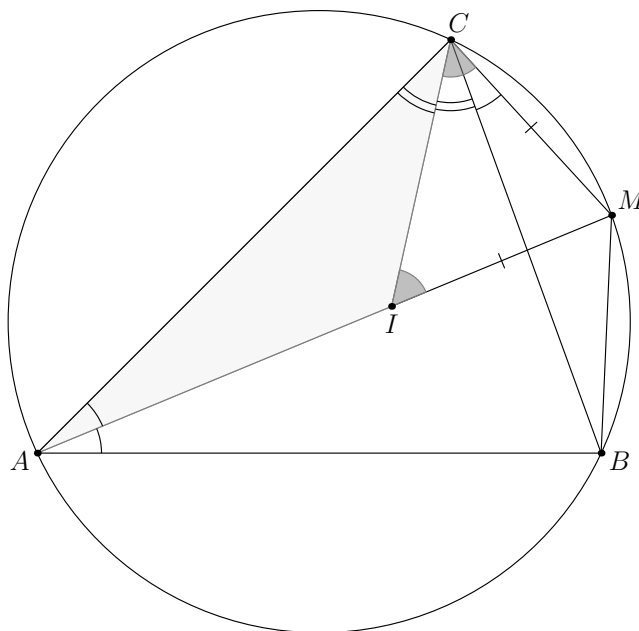
### Zadatak A-3.4.

Neka je  $ABC$  šiljastokutni trokut u kojem je  $|BC| < |CA|$ . Središte njegove upisane kružnice je točka  $I$ , a  $k$  mu je opisana kružnica. Neka su  $M$  i  $N$  redom polovišta kraćih lukova nad tetivama  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$  kružnice  $k$ . Pravac kroz  $C$  paralelan s  $MN$  ponovno siječe kružnicu  $k$  u točki  $P$ . Pravac  $PI$  ponovno siječe kružnicu  $k$  u točki  $T$ . Dokaži da vrijedi

$$|MP| \cdot |MT| = |NP| \cdot |NT|.$$

### Prvo rješenje.

Neka su  $\alpha, \beta, \gamma$  redom mjere unutarnjih kutova trokuta u vrhovima  $A, B, C$  te neka je  $\varphi_1 = |\sphericalangle TPM|$  i  $\varphi_2 = |\sphericalangle NPT|$ .



Budući da je  $M$  polovište luka nad tetivom  $BC$ , slijedi da  $M$  leži na pravcu  $AI$ . Nadalje, iz jednakosti obodnih kutova nad tetivom  $\overline{MB}$  imamo  $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle BAM| = \frac{\alpha}{2}$  pa slijedi

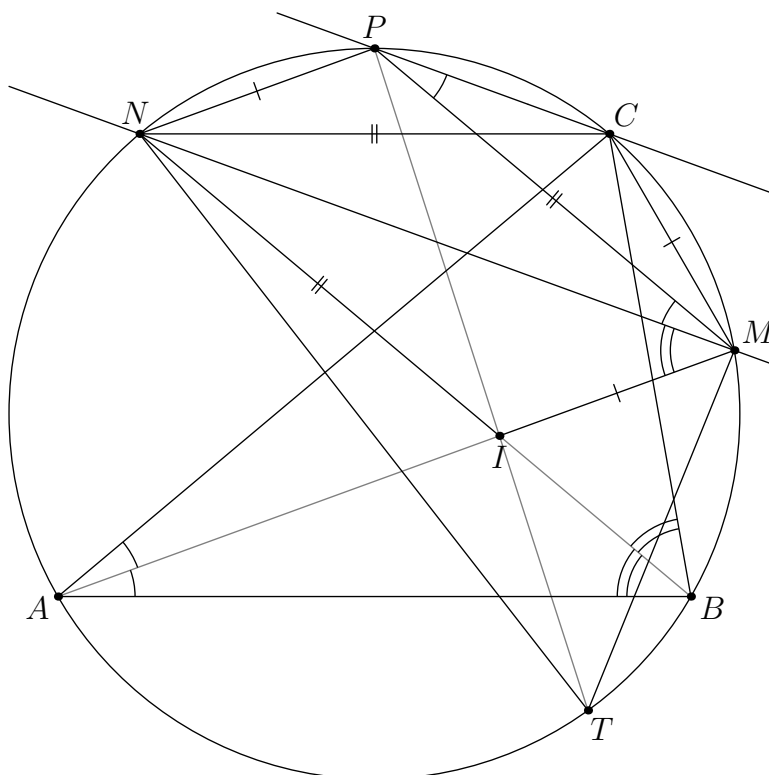
$$|\sphericalangle ICM| = |\sphericalangle ICB| + |\sphericalangle BCM| = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

S druge strane,  $\sphericalangle MIC$  je vanjski kut trokuta  $AIC$  pa je njegova mjera jednaka zbroju mjera unutarnjih kutova trokuta s kojima ne dijeli zajednički vrh:

$$|\sphericalangle MIC| = |\sphericalangle CAI| + |\sphericalangle ACI| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Dakle,  $|\sphericalangle ICM| = |\sphericalangle MIC|$  pa je trokut  $ICM$  jednakokratan i  $|MI| = |MC|$ .

Analogno se pokaže i  $|\sphericalangle ICN| = |\sphericalangle NIC|$ , odakle slijedi  $|NI| = |NC|$ .



Četverokut  $NMCP$  je trapez koji je ujedno i tetivan, pa slijedi da je  $NMCP$  jednakokrani trapez. Zato imamo

$$|NI| = |NC| = |MP|, \quad |MI| = |MC| = |PN|,$$

pri čemu smo redom koristili jednakost duljina dijagonala i krakova trapeza jednakokrannog  $NMCP$ .

Nadalje, iz jednakosti kutova uz presječnicu, te iz jednakosti obodnih kutova nad tetivom  $\overline{MC}$  redom slijedi

$$|\sphericalangle PMN| = |\sphericalangle MPC| = |\sphericalangle MAC| = \frac{\alpha}{2},$$

dok iz jednakosti obodnih kutova nad tetivom  $\overline{NA}$  slijedi

$$|\sphericalangle NMI| = |\sphericalangle NMA| = |\sphericalangle NBA| = \frac{\beta}{2}.$$

Odavde dobivamo

$$|\sphericalangle PMI| = |\sphericalangle PMN| + |\sphericalangle NMA| = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Analogno dobivamo  $|\sphericalangle INP| = \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

Sada primjenom poučka o sinusima na trokute  $PIM$  i  $PNI$  redom dobivamo

$$\frac{|PN|}{|PI|} = \frac{|IM|}{|PI|} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}, \quad \frac{|PM|}{|PI|} = \frac{|IN|}{|PI|} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Iz ovih jednakosti posebno slijedi

$$\frac{|PN|}{|PM|} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}.$$

Primjenom poučka o sinusima na trokut  $MNT$  dobivamo

$$\frac{|MT|}{|NT|} = \frac{\sin |\sphericalangle TNM|}{\sin |\sphericalangle NMT|} = \frac{\sin |\sphericalangle TPM|}{\sin |\sphericalangle NPT|} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2},$$

pri čemu smo koristili jednakost obodnih kutova nad tetivama  $\overline{MT}$  i  $\overline{NT}$ .

Konačno, iz posljednje dvije jednakosti slijedi

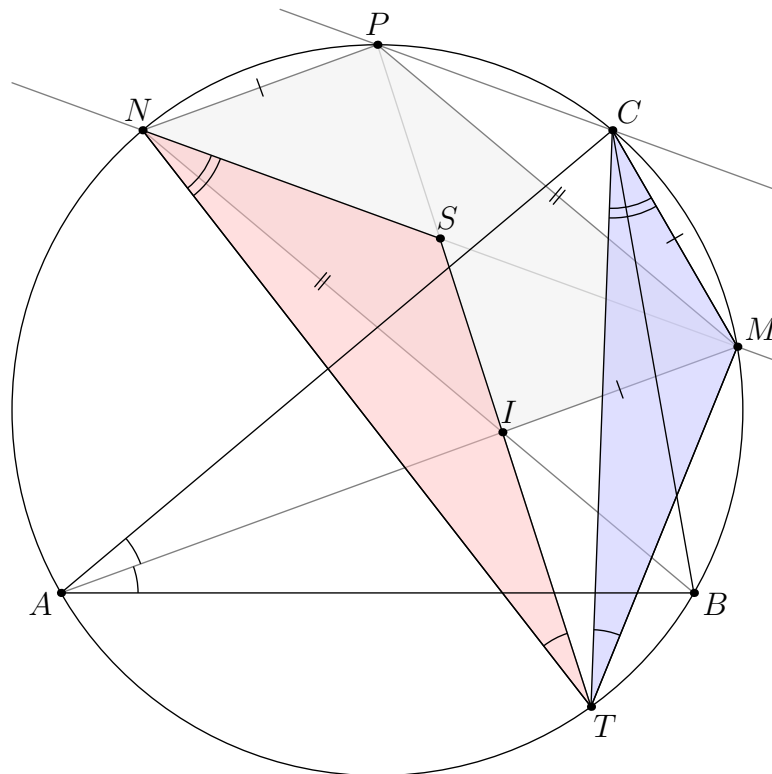
$$\frac{|PN|}{|PM|} = \frac{|MT|}{|NT|},$$

odnosno  $|MP| \cdot |MT| = |NP| \cdot |NT|$ , što je i trebalo dokazati.

### Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju dobivamo da je

$$|NI| = |NC| = |MP|, \quad |MI| = |MC| = |PN|,$$



S druge strane, četverokut  $NIMP$  ima nasuprotne stranice jednake duljine, pa je taj četverokut paralelogram. Označimo sa  $S$  sjecište njegovih dijagonala.

Budući da su tetive  $\overline{NP}$  i  $\overline{CM}$  jednake duljine, to su i njihovi pripadni obodni kutovi  $|\sphericalangle PTN|$  i  $|\sphericalangle MTC|$  sukladni. Iz jednakosti obodnih kutova nad tetivom  $\overline{MT}$  slijedi

$$|\sphericalangle TCM| = |\sphericalangle TNM| = |\sphericalangle TNS|.$$

Zato prema KK poučku o sličnosti slijedi da su trokuti  $NST$  i  $CMT$  slični. Iz te sličnosti dobivamo

$$\frac{|NT|}{|NS|} = \frac{|CT|}{|CM|}.$$

Sada je

$$|NP| \cdot |NT| = |CM| \cdot |NT| = |CT| \cdot |NS|. \quad (1)$$

Analogno, iz sličnosti trokuta  $NCT$  i  $SMT$  dobivamo

$$|MP| \cdot |MT| = |CT| \cdot |MS|. \quad (2)$$

Točka  $S$  je sjecište dijagonala paralelograma  $NIMP$  pa ona raspolavlja dužinu  $NM$ , to jest,  $|NS| = |MS|$ . Konačno, iz jednakosti (1) i (2) slijedi

$$|NP| \cdot |NT| = |MP| \cdot |MT|,$$

što je i trebalo dokazati.

### Zadatak A-3.5.

Na pravcu  $p$  označeno je 2026 točaka na jednakim razmacima. U jednoj poluravnini (s iste strane pravca  $p$ ) označene su sve točke koje zajedno s dvjema označenim točkama pravca  $p$  čine vrhove jednakostraničnog trokuta. Neka je  $\mathcal{T}$  skup svih označenih točaka, uključujući one na pravcu  $p$ .

Josip može brisati točke skupa  $\mathcal{T}$  tako da u svakom koraku obriše po tri točke koje su vrhovi nekog jednakostraničnog trokuta. Korak ponavlja sve dok mu ne ostane točno jedna točka. Točka skupa  $\mathcal{T}$  koja može ostati posljednja neobrisana naziva se *Josipova*.

Odredi broj Josipovih točaka.

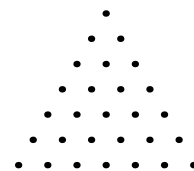
### Rješenje.

Postavimo promatrane točke u koordinatni sustav, tako da je pravac  $p$  na  $x$ -osi. Koordinate prve točke su  $(0, 0)$ , a druge točke  $(1, 0)$ , čime su određene koordinate svih ostalih točaka.

Sve točke su oblika  $\left(\frac{m}{2}, \frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$ , gdje su  $m$  i  $n$  cijeli brojevi i  $m + n$  paran. Naime, s točkama

$(a, 0)$  i  $(b, 0)$  na pravcu  $p$ , jednakostraničan trokut čini i točka  $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Obojajmo sve točke u neku od 3 boje, ovisno o ostatku koji  $m$  u zapisu  $\left(\frac{m}{2}, \frac{n\sqrt{3}}{2}\right)$  daje pri dijeljenju s 3.



Promotrimo točke

$$A = \left( \frac{m}{2}, \frac{n\sqrt{3}}{2} \right), \quad B = \left( \frac{a}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2} \right).$$

Odredimo koordinate dviju točaka koje tvore jednakostranične trokute s  $A$  i  $B$ . Najprije primijetimo da polovište dužine  $AB$  ima koordinate

$$P = \left( \frac{m+a}{4}, \frac{(n+b)\sqrt{3}}{4} \right).$$

Dalje, znamo da se točke koje s  $A$  i  $B$  čine jednakostraničan trokut nalaze na simetrali promatrane dužine, i to udaljene za  $\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$  od  $P$ . Dakle, potrebno je pronaći vektor okomit na dužinu  $AB$ , skalirati ga i pribrojiti točki  $P$ . Vektori okomiti na

$$\vec{AB} = \left( \frac{m-a}{2}, \frac{(n-b)\sqrt{3}}{2} \right)$$

duljine  $|AB|$  su

$$\vec{v} = \left( \frac{(n-b)\sqrt{3}}{2}, \frac{a-m}{2} \right)$$

i  $-\vec{v}$ . Stoga su tražene točke

$$P \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v} = \left( \frac{m+a \pm 3(n-b)}{2}, \frac{n+b \pm (a-m)}{2}\sqrt{3} \right).$$

Promotrimo sada sumu brojnika  $x$ -koordinata triju promatranih točaka.

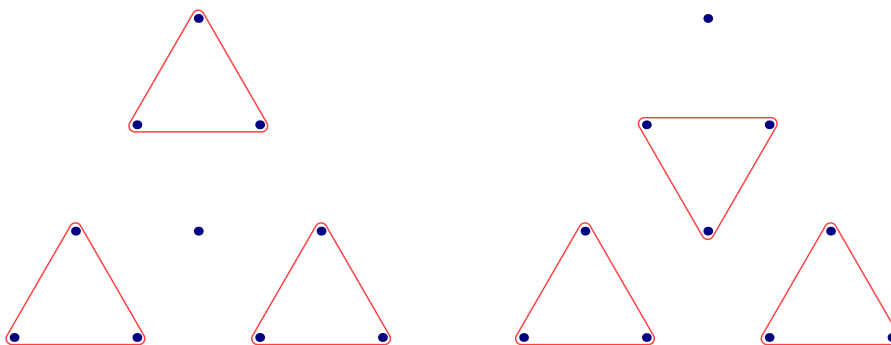
$$m+a + \frac{m+a \pm 3(n-b)}{2} = \frac{3(m+a \pm (n-b))}{2} \equiv 0 \pmod{3}.$$

Budući da suma tri broja može biti djeljiva s 3 samo ako svi daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, ili ako svi daju različit, zaključujemo da je svaki jednakostraničan trokut jednobojan ili raznobojan.

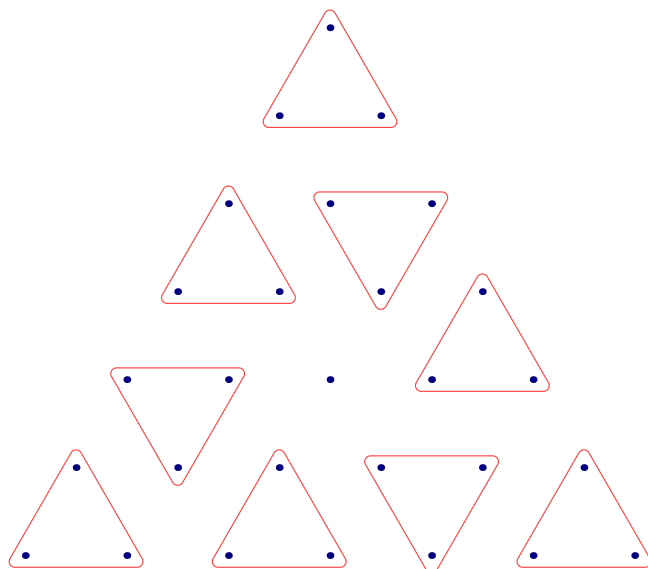
Budući da boje kojom su obojani vrhovi (boja 0) ima za 1 više od preostale dvije boje, zaključujemo da Josipova točka mora biti boje 0.

Pokažimo induktivno da svi vrhovi boje 0 mogu ostati neizbrisani. Radimo indukciju po  $k$ , gdje je  $3k$  duljina stranice početnog velikog trokuta, odnosno na stranici se nalazi  $3k+1$  točaka (trokut veličine  $3k+1$ ).

Kao bazu demonstriramo slučajeve  $k=0$  (trivijalno) i  $k=1$ . U slučaju  $k=1$ , točke boje 0 su vrhovi i centralna točka. Na slici se vidi koje trojke Josip treba brisati kako bi mu ostale samo točke u pitanju.

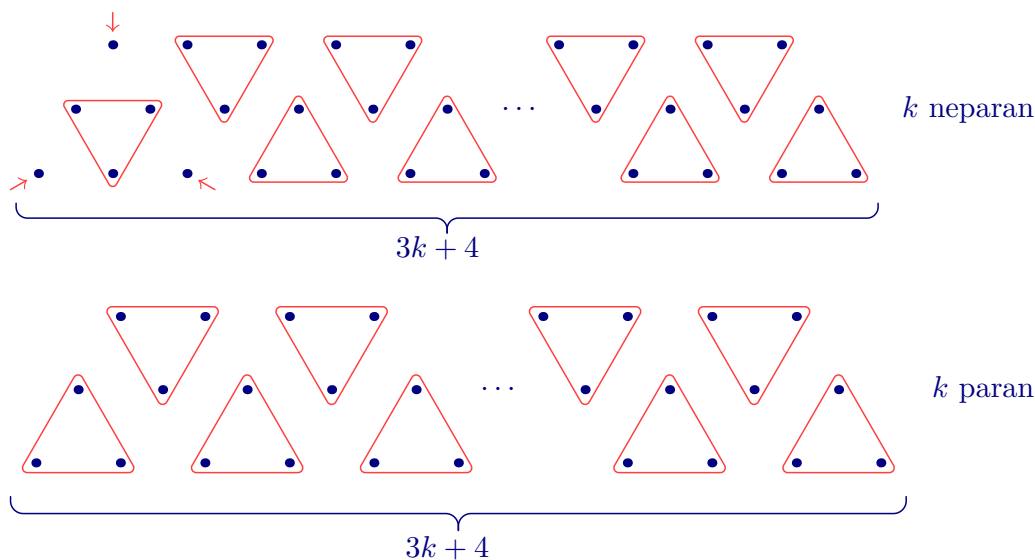


Korak za  $k + 1$ . Odaberimo proizvoljnu točku boje 0 u trokutu veličine  $3k + 4$ . Ta točka se nalazi u nekom od 3 trokuta veličine  $3k + 1$  koja sadržavaju vrh trokuta veličine  $3k + 4$ , osim ako je  $k = 1$  i radi se o centralnoj točki velikog trokuta. U tom slučaju možemo postići da samo ona ostane na način opisan na slici ispod.



Po pretpostavci indukcije unutar tog  $3k + 1$  trokuta možemo izbrisati sve osim odabrane točke. Preostala su nam 3 retka uz jednu od stranica trokuta veličine  $3k + 4$ .

Sve točke i 3 retka uz jednu od stranica trokuta veličine  $3k + 4$  možemo obrisati na jedan od dva dolje prikazana načina, ovisno o parnosti broja  $k$ .



Kako je ukupan broj točaka jednak  $\frac{(1+2026) \cdot 2026}{2} = 2027 \cdot 1013$ , broj Josipovih točaka je

$$\frac{2027 \cdot 1013 - 1}{3} + 1.$$

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

### Zadatak A-4.1.

Neka je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nekonstantan aritmetički niz realnih brojeva takav da postoji prirodni broj  $r$  za koji je

$$a_{r+1} + a_{r+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{3r+2}.$$

Dokaži da niti jedan član tog niza nije jednak 0.

### Rješenje.

Označimo s  $a$  početni član i s  $d$  razliku aritmetičkog niza  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Tada je  $a_n = a + (n - 1)d$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i uvjet

$$a_{r+1} + a_{r+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{3r+2},$$

možemo zapisati kao

$$2a + (2r + 1)d = (3r + 2)a + d \cdot (1 + 2 + \dots + 3r + 1),$$

odnosno

$$2a + (2r + 1)d = (3r + 2)a + \frac{(3r + 2)(3r + 1)}{2} \cdot d.$$

Slijedi da je

$$a = \left( \frac{4r + 2 - (3r + 2)(3r + 1)}{6r} \right) \cdot d = \frac{-9r - 5}{6} \cdot d.$$

Pretpostavimo da je  $a_n = 0$  za neki prirodan broj  $n$ . Tada je  $a + (n - 1)d = 0$ , odnosno

$$d \cdot \left( \frac{-9r - 5}{6} + n - 1 \right) = 0,$$

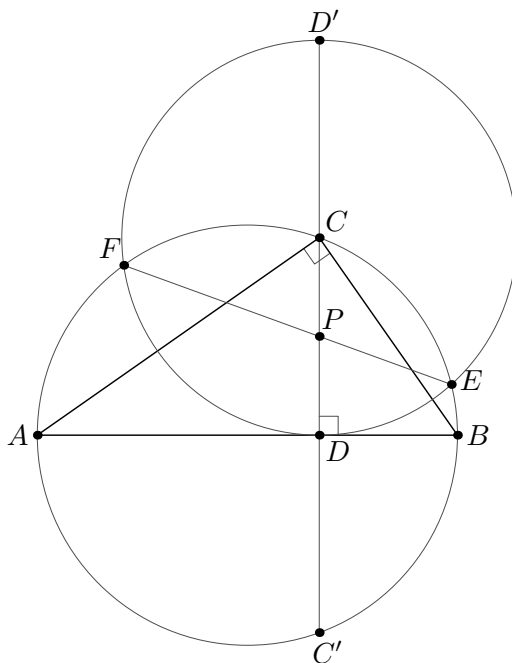
iz čega slijedi da je  $\frac{-9r - 5}{6}$  cijeli broj. Međutim, to je kontradikcija jer 6 ne dijeli  $-9r - 5$  ni za koji prirodan broj  $r$ . Dakle, niti jedan član niza nije jednak 0.

### Zadatak A-4.2.

Neka je  $ABC$  trokut s pravim kutom u vrhu  $C$ . Neka je  $D$  nožište visine iz vrha  $C$ . Kružnica sa središtem u  $C$  polumjera  $|CD|$  siječe opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  u točkama  $E$  i  $F$ . Pravac  $EF$  siječe dužinu  $CD$  u točki  $P$ . Dokaži da je  $P$  polovište dužine  $CD$ .

### Rješenje.

Neka su točke  $C'$  i  $D'$  redom presjeci pravca  $CD$  s opisanom kružnicom trokuta  $ABC$  te kružnicom sa središtem  $C$  polumjera  $|CD|$ , kao na skici.



Budući da je trokut  $ABC$  pravokutan, dužina  $\overline{AB}$  je promjer kružnice opisane tom trokutu. Slijedi da su točke  $C'$  i  $C$  međusobno simetrične s obzirom na pravac  $AB$  pa je  $|CD| = |C'D|$ .

S druge strane, kako je  $C$  središte kružnice, vrijedi  $|CD'| = |CD|$ .

Iz potencije točke  $P$  s obzirom na opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  slijedi

$$|PF| \cdot |PE| = |PC| \cdot |PC'| = |PC| \cdot (|PD| + |DC'|) = |PC| \cdot (|PD| + |DC|).$$

S druge strane, iz potencije iste točke s obzirom na kružnicu sa središtem  $C$  radijusa  $|CD|$  dobivamo

$$|PF| \cdot |PE| = |PD| \cdot |PD'| = |PD| \cdot (|PC| + |CD'|) = |PD| \cdot (|PC| + |CD|).$$

U oba niza jednakosti, početni izrazi su jednaki, pa i završni izrazi moraju biti jednaki, to jest,

$$|PC| \cdot (|PD| + |DC|) = |PD| \cdot (|PC| + |CD|),$$

odakle slijedi  $|PC| = |PD|$ , to jest,  $P$  je polovište dužine  $\overline{CD}$ .

**Napomena:** Umjesto potencije točke, mogu se promatrati sličnosti trokuta  $PCF$  i  $PC'E$ , odnosno  $PDE$  i  $PD'F$ .

### Zadatak A-4.3.

Za uređenu trojku prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  kažemo da je *morska* ako su  $a, b$  i  $c$  međusobno različiti, te je broj  $ac$  djeljiv brojevima  $a + b$  i  $b + c$ . Dokaži da

- za svaki prirodni broj  $d > 1$  postoji morska trojka  $(a, b, c)$  za koju je  $M(a, b, c) = d$ .
- ne postoji morska trojka  $(a, b, c)$  za koju je  $M(a, b, c) = 1$ .

*Napomena.*  $M(a, b, c)$  označava najveći zajednički djelitelj brojeva  $a, b$  i  $c$ .

#### Prvo rješenje.

- Neka je  $d > 3$ . Stavimo  $a = (d - 1)d$ ,  $b = d$ ,  $c = (d - 2)d$ . Tada je  $ac = d^2(d - 1)(d - 2)$  djeljiv s  $a + b = d^2$  i  $b + c = d(d - 1)$ .  
Za  $d = 3$ , stavimo  $a = 3$ ,  $b = 6$  i  $c = 12$ . Tada je  $ac = 36$  djeljiv s  $a + b = 9$  i s  $b + c = 18$ .  
Za  $d = 2$ , stavimo  $a = 4$ ,  $b = 2$  i  $c = 6$ . Tada je  $ac = 24$  djeljiv s  $a + b = 6$  i  $b + c = 8$ .
- Pretpostavimo da je  $(a, b, c)$  morska trojka s  $M(a + b, b + c) = 1$ . Onda su  $a + b$  i  $b + c$  relativno prosti djelitelji od  $ac$ , pa i njihov umnožak dijeli  $ac$ . Međutim,  $(a + b)(b + c) > ac$ , što je kontradikcija. Dakle, postoji prost broj  $p$  koji dijeli  $a + b$  i  $b + c$ . Tada  $p$  dijeli i  $ac$ , pa dijeli jedan od brojeva  $a$  i  $c$ . Kako  $p$  dijeli  $a + b$  i  $b + c$ , slijedi da  $p$  dijeli  $b$ . Iz toga slijedi da  $p$  dijeli i  $a$  i  $c$ . Dakle, u svakoj morskoj trojci postoji prost broj koji dijeli sva tri člana trojke, pa  $M(a, b, c)$  ne može biti 1.

#### Drugo rješenje.

- Rješenje a) dijela isto je kao u prvom rješenju.
- Pretpostavimo da je  $(a, b, c)$  morska trojka takva da je  $M(a, b, c) = 1$ . Neka je  $x = M(a, b)$ ,  $y = M(b, c)$ ,  $z = M(a, c)$ . Tada su  $x, y, z$  relativno prosti i postoje brojevi  $d, e, f$  takvi da je  $a = xzd$ ,  $b = xye$ ,  $c = yzf$ . Uvjeti djeljivosti u novim oznakama glase

$$\begin{aligned}x(zd + ye) &| xyz^2df, \\y(xe + zf) &| xyz^2df,\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}zd + ye &| yz^2df, \\xe + zf &| xz^2df.\end{aligned}$$

Tvrdimo da je  $zd + ye$  relativno prost s  $y, z$  i  $d$ . Naime, ako prost broj dijeli  $y, z$  ili  $d$  te dijeli  $zd + ye$ , onda taj prost broj dijeli  $zd$  i  $ye$ . Međutim,  $zd$  i  $ye$  su relativno prosti jer su jednaki  $b/M(a, b)$  i  $a/M(a, b)$ . Analogno slijedi da je  $xe + zf$  relativno prost s  $x, z$  i  $f$ . Slijedi da djeljivosti možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}zd + ye &| f, \\xe + zf &| d.\end{aligned}$$

Međutim, ako je  $d \geq f$  slijedi  $zd + ye > f$  i prva djeljivost nije zadovoljena, a ako je  $d \leq f$  slijedi  $xe + zf > d$  i druga djeljivost nije zadovoljena. U svakom slučaju dobivamo kontradikciju. Dakle, ne postoji morska trojka  $(a, b, c)$  takva da je  $M(a, b, c) = 1$ .

#### Zadatak A-4.4.

Odredi koliko ima polinoma s realnim koeficijentima  $f(x) = x^{2026} + a_{2025}x^{2025} + \dots + a_1x + a_0$  takvih da je  $f(2026) = 0$  i da postoji polinom  $g(x)$  s realnim koeficijentima takav da jednakost

$$(f(x+1) - f(x)) \cdot g(x) = f(x)$$

vrijedi za svaki realan broj  $x$ .

#### Prvo rješenje.

Promotrimo polinom  $f(x+1) - f(x)$ . Tvrdimo da je njegov stupanj jednak 2025 te da mu je vodeći koeficijent jednak 2026.

Naime, imamo

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^{2026} + a_{2025}(x+1)^{2025} + \dots + a_1(x+1) + a_0 \\ &= \left( x^{2026} + \binom{2026}{1}x^{2025} + \dots \right) + a_{2025} \left( x^{2025} + \binom{2025}{1}x^{2024} + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

Vidimo da je koeficijent uz  $x^{2026}$  u  $f(x+1)$  jednak 1 jer se  $x^{2026}$  pojavljuje samo u članu  $(x+1)^{2026}$ . Slično, koeficijent uz  $x^{2025}$  u  $f(x+1)$  jednak je  $\binom{2026}{1} + a_{2025}$ , jer se  $x^{2025}$  pojavljuje samo u članovima  $(x+1)^{2026}$  i  $a_{2025}(x+1)^{2025}$ .

Slijedi da je koeficijent uz  $x^{2026}$  u  $f(x+1) - f(x)$  jednak 0, a koeficijent uz  $x^{2025}$  jednak je 2026, kao što smo i tvrdili.

Slijedi da je stupanj od  $g(x)$  jednak 1 odnosno  $g(x)$  je linearan polinom. Posebno,  $g(x)$  ima jedinstvenu realnu nultočku  $r_0$ , te je  $g(x) = c(x - r_0)$  za neki realni broj  $c \neq 0$ . Usporedbom vodećih koeficijenata slijedi  $c = \frac{1}{2026}$ .

Uvrštavanjem  $r_0$  u zadani izraz, slijedi  $f(r_0) = 0$ . Slijedi da možemo zapisati  $f(x) = (x - r_0)h(x)$  za neki polinom  $h(x)$  s realnim koeficijentima, pa je

$$((x+1 - r_0)h(x+1) - (x - r_0)h(x)) \cdot \frac{1}{2026}(x - r_0) = (x - r_0)h(x),$$

odnosno

$$((x+1 - r_0)h(x+1) - (x - r_0)h(x)) = 2026 \cdot h(x).$$

To možemo zapisati kao

$$(x+1 - r_0)h(x+1) = (x + 2026 - r_0)h(x).$$

Tvrdimo da su nultočke od  $h(x)$  upravo  $r_0 - 1, r_0 - 2, \dots, r_0 - 2025$ .

Dokažimo matematičkom indukcijom da ti brojevi stvarno jesu nultočke. Uvrštavanjem  $x = r_0 - 1$  u izraz slijedi

$$0 \cdot h(x+1) = 2025 \cdot h(r_0 - 1),$$

pa je  $h(r_0 - 1) = 0$ . Pretpostavimo da je  $h(r_0 - t) = 0$  za prirodan broj  $t < 2025$ . Uvrstimo  $r_0 - t - 1$  u izraz. Dobivamo

$$-th(r_0 - t) = (2025 - t)h(r_0 - t - 1).$$

Lijeva strana je jednaka 0 prema pretpostavci, pa slijedi  $h(r_0 - t - 1) = 0$ , čime je korak indukcije proveden.

Ti brojevi su sve nultočke jer ih ima 2025, a  $h(x)$  je stupnja 2025. Slijedi da je  $h(x) = (x - (r_0 - 1))(x - (r_0 - 2)) \cdots (x - (r_0 - 2025))$ , pa je

$$f(x) = (x - r_0)(x - (r_0 - 1))(x - (r_0 - 2)) \cdots (x - (r_0 - 2025)),$$

za neki realan broj  $r_0$ . Kako je  $f(2026) = 0$ , slijedi da se 2026 nužno nalazi među brojevima  $r_0, r_0 - 1, \dots, r_0 - 2025$ , pa je  $r_0 = 2025 + t$  za neki  $t \in \{0, 1, \dots, 2025\}$ . Time dobivamo 2026 mogućnosti za  $f(x)$ .

Preostaje provjeriti da svaki od tih polinoma zadovoljava jednakost iz zadatka za  $h(x) = \frac{1}{2026}(x - r_0)$ .

Zaista, vrijedi

$$\begin{aligned} (f(x+1) - f(x))h(x) &= ((x+1-r_0) \dots (x+2026-r_0) - (x-r_0) \dots (x+2025-r_0)) \frac{1}{2026}(x-r_0) \\ &= (x+2026-r_0 - (x-r_0))(x+1-r_0) \dots (x+2025-r_0) \frac{1}{2026}(x-r_0) \\ &= (x-r_0)(x+1-r_0) \dots (x+2025-r_0) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

## Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, zaključimo da je  $g(x)$  polinom stupnja 1 s vodećim koeficijentom  $\frac{1}{2026}$ . Posebno,  $g(x)$  ima jedinstvenu realnu nultočku  $r_0$ .

Neka je  $r$  bilo koja nultočka od  $f(x)$ . Tada uvrštavanjem  $r$  u izraz slijedi

$$f(r+1) \cdot g(r) = 0,$$

pa je ili  $r+1$  također nultočka od  $f(x)$  ili je  $r$  nultočka od  $g(x)$ , odnosno  $r = r_0$ . Ako je  $r \neq r_0$ , ponavljanjem istog postupka za  $r+1$  slijedi da je ili  $r+1 = r_0$  ili je  $r+2$  nultočka od  $f(x)$ . Kako  $f(x)$  ima konačno mnogo nultočaka, za neki nenegativan cijeli broj  $k$  će vrijediti da je  $r+k = r_0$ . Dakle, za svaku nultočku  $r$  od  $f(x)$  postoji nenegativan cijeli broj  $k$  takav da je  $r+k = r_0$ . Posebno, za  $r = 2026$  dobivamo da je  $r_0$  prirodan broj veći ili jednak 2026. Nadalje, ako je  $r$  nultočka od  $f(x)$ , slijedi da je  $r$  cijeli broj i ako je  $r < r_0$ , onda je  $r+1$  nultočka od  $f(x)$ .

Dakle, skup nultočaka od  $f(x)$  je skup uzastopnih cijelih brojeva koji sadrži 2026, i najveća nultočka od  $f(x)$  jednaka je nultočki od  $g(x)$ . Dakle, postoji nenegativan cijeli broj  $j$  i prirodni brojevi  $k_1, \dots, k_j$  takvi da je  $k_1 + \dots + k_j = 2026$  i

$$f(x) = (x - r_0)^{k_0} (x - (r_0 - 1))^{k_1} \dots (x - (r_0 - j))^{k_j}.$$

Tada je

$$f(x+1) = (x - (r_0 - 1))^{k_0} (x - (r_0 - 2))^{k_1} \dots (x - (r_0 - (j+1)))^{k_j}.$$

Tvrdimo da je  $k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_j = 1$ . Dokažimo tu tvrdnju matematičkom indukcijom.

Za bazu, primijetimo da je kratnost nultočke  $r_0$  u polinomu  $(f(x+1) - f(x))g(x)$  jednaka 1, jer je  $g(r_0) = 0$ ,  $f(r_0) = 0$  i  $f(r_0+1) \neq 0$ . Slijedi da je  $k_0 = 1$ .

Pretpostavimo da je  $k_0 = \dots = k_{i-1} = 1$  za neki  $i$  takav da je  $0 < i \leq j$ . Pretpostavimo da je  $k_i > 1$ . Promotrimo kratnost nultočke  $r_0 - i$  u polinomu  $(f(x+1) - f(x))g(x)$ . Vrijedi  $g(r_0 - i) \neq 0$ . Kratnost od  $r_0 - i$  u  $f(x+1)$  je jednaka  $k_{i-1} = 1$ , a kratnost od  $r_0 - i$  u  $f(x)$  je  $k_i$ , pa je kratnost od  $r_0 - i$  u  $f(x+1) - f(x)$  jednaka 1. Dakle, kratnost od  $r_0 - i$  u  $(f(x+1) - f(x)) \cdot g(x)$  jednaka je 1. S druge strane, kratnost od  $r_0 - i$  u  $f(x)$  jednaka je  $k_i > 1$ , što je kontradikcija. Dakle,  $k_i = 1$ . Time je korak indukcije proveden.

Dakle,  $f(x)$  je polinom kojem su sve nultočke jednostruke i čine skup 2026 uzastopnih cijelih brojeva koji sadrže broj 2026. Ima 2026 takvih skupova koji daju ukupno 2026 mogućnosti za  $f(x)$ .

Provjera da svaki od takvih polinoma zadovoljava tvrdnju zadatka ista je kao u prvom rješenju.

### Zadatak A-4.5.

Za arhipelag od 2026 otoka kažemo da je *dobro povezan* ako među svakih pet različitih otoka, postoje tri takva da između svaka dva od njih postoji dvosmjerna brodska linija. Odredi najveći prirodni broj  $N$  takav da u svakom dobro povezanom arhipelagu postoji niz od barem  $N$  različitih otoka takav da su svaka dva uzastopna, te prvi i posljednji otok u nizu povezani brodskom linijom.

### Rješenje.

Označimo otoke u arhipelagu redom s  $o_1, o_2, \dots, o_{2026}$ .

Za različite otoke  $o_{i_1}, o_{i_2}, \dots, o_{i_k}$  kažemo da čine *ciklus duljine  $k$*  ako postoji brodska linija među otocima  $o_{i_1}$  i  $o_{i_2}$ ,  $o_{i_2}$  i  $o_{i_3}$ ,  $\dots$ ,  $o_{i_{k-1}}$  i  $o_{i_k}$  te među otocima  $o_{i_k}$  i  $o_{i_1}$ . Trebamo odrediti najveći prirodan broj  $N$  takav da, neovisno o rasporedu brodskih linija, uvijek postoji ciklus duljine  $N$ .

Promotrimo raspored brodskih linija takav da su svi otoci  $o_1, o_2, \dots, o_{1013}$  međusobno povezani brodskim linijama, svi otoci  $o_{1014}, o_{1015}, \dots, o_{2026}$  su također međusobno povezani brodskim linijama te među otocima  $o_i$  i  $o_j$  nema brodske linije za sve  $1 \leq i \leq 1013$  i  $1014 \leq j \leq 2026$ . Takav raspored očito zadovoljava uvjet zadatka te u tom slučaju najveća duljina ciklusa iznosi točno 1013. Dakle, vrijedi  $N \leq 1013$ .

Dokažimo da uvijek postoji ciklus duljine barem 1013, neovisno o rasporedu brodskih linija.

Pretpostavimo da u arhipelagu postoje neka tri otoka među kojima nema brodske linije. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su to otoci  $o_1, o_2$  i  $o_3$ .

Promotrimo tada pet otoka  $o_1, o_2, o_3, o_i$  i  $o_j$  pri čemu je  $3 < i < j$ . Iz uvjeta zadatka slijedi da tada među otocima  $o_i$  i  $o_j$  postoji brodska linija za sve  $3 < i < j$ . Dakle, svi otoci  $o_4, o_5, \dots, o_{2026}$  su međusobno povezani brodskim linijama te u tom slučaju postoji ciklus duljine 2023.

Pretpostavimo sada da među svaka tri otoka postoje dva koja su povezana brodskom linijom.

Za otoke  $o_{i_1}, o_{i_2}, \dots, o_{i_k}$  kažemo da čine *put duljine  $k$*  ako postoji brodska linija među otocima  $o_{i_1}$  i  $o_{i_2}$ ,  $o_{i_2}$  i  $o_{i_3}$ ,  $\dots$ ,  $o_{i_{k-1}}$  i  $o_{i_k}$ .

Neka je  $k$  duljina najduljeg puta u arhipelagu. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da otoci  $o_1, o_2, \dots, o_k$  čine put duljine  $k$ .

Ako je  $k = 2026$ , promotrimo otoke  $o_1, o_{1013}$  i  $o_{2026}$ . Budući da među svaka tri otoka postoje dva koja su povezana brodskom linijom, slijedi da će  $o_1$  biti povezan s  $o_{1013}$ ,  $o_1$  biti povezan s

$o_{2026}$  ili će  $o_{1013}$  biti povezan s  $o_{2026}$ . U svakom od ta tri slučaja postoji ciklus duljine barem 1013.

Ako je  $k < 2026$ , označimo sa  $S$  skup svih otoka  $o_i$  za  $i > k$ . Kako je  $k < 2026$ , znamo da skup  $S$  nije prazan.

Uočimo da zbog maksimalnosti broja  $k$  slijedi da otoci  $o_1$  i  $o_k$  nisu povezani niti s jednim otokom u skupu  $S$ .

Posebno, kako otoci  $o_1$  i  $o_k$  nisu povezani s otokom  $o_{k+1}$ , slijedi da tada mora postojati brodska linija između  $o_1$  i  $o_k$ . Dakle, otoci  $o_1, o_2, \dots, o_k$  čine ciklus.

Nadalje, za svaka dva različita otoka  $o_i$  i  $o_j$  iz  $S$  vrijedi da su međusobno povezani brodskom linijom jer otoci  $o_i$  i  $o_j$  nisu povezani s otokom  $o_1$ . Prema tome, svi otoci u skupu  $S$  su međusobno povezani brodskim linijama, pa u skupu  $S$  postoji put duljine  $2026 - k$ .

Budući da je  $k$  duljina najduljeg puta, slijedi da mora biti  $k \geq 2026 - k$ , odnosno  $k \geq 1013$ .

Kako otoci  $o_1, o_2, \dots, o_k$  čine ciklus, zaključujemo da i u ovom slučaju postoji ciklus duljine barem 1013.

Zaključujemo da je  $N \geq 1013$ , odnosno  $N = 1013$ .