MEDO 2025./2026.

Peto kolo

28. ožujka 2026.

Seniori (1. – 4. r. SŠ)

Zadaci

Zadatak S-5.1. [10 bodova]

Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvostruko je dulja od stranice $\overline{BC}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da veličina kuta $\sphericalangle DEA$ bude jednaka veličini kuta $\sphericalangle CED$. Kolika je veličina tog kuta?

Zadatak S-5.2. [15 bodova]

Kažemo da je tablica 3×3 *šarolika* ako je u svako polje te tablice upisan po jedan od brojeva -1, 0 i 1, tako da je svih šest zbrojeva brojeva u pojedinom retku odnosno stupcu međusobno različito.

Postoji li takva tablica? Ako postoji, koliko ima različitih šarolikih tablica?

Zadatak S-5.3. [20 bodova]

Neka su m i n relativno prosti prirodni brojevi takvi da je $\dfrac{m+n}{m-n}$ također prirodan broj. Dokaži da je barem jedan od brojeva $mn+1$ i $4mn+1$ potpun kvadrat.

Zadatak S-5.4. [25 bodova]

U ovisnosti o realnom broju x odredi vrijednost beskonačne sume:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^n}{2^{n+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{8} \right\rfloor + \cdots.$$

Napomena: $\lfloor a \rfloor$ označava najveći cijeli broj manji ili jednak realnom broju a.

Zadatak S-5.5. [30 bodova]

Žeton je postavljen u ishodište koordinatnog sustava. Medvjedi Dado i Tina igraju sljedeću igru. Dado igra prvi, a zatim igraju naizmjenično. U svakom potezu igrač bira dva (ne nužno različita) cijela broja a i b, koje ni Dado ni Tina nisu odabrali u prethodnim potezima, te zatim pomiče žeton za a jedinica u horizontalnom smjeru i za b jedinica u vertikalnom smjeru. Tina pobjeđuje ako se žeton u bilo kojem trenutku vrati u ishodište. Može li Dado spriječiti Tinu da pobijedi?

Napomena: Pomak u horizontalnom smjeru za pozitivnu vrijednost ide udesno, a za negativnu ulijevo (analogno vrijedi i za vertikalni smjer).

Zadatak S-5.6. [35 bodova]

Neka je A konačan skup funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:

(i) ako su $f, g \in A$, onda je $f \circ g \in A$

(ii) za svaku funkciju $f \in A$ postoji funkcija $g \in A$ tako da vrijedi $f(f(x)+y) = 2x + g(g(y)-x)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Neka je $id\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ identiteta, tj. $id(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $id \in A$.

Zadatak S-5.7. [40 bodova]

Neka je točka H ortocentar raznostraničnog šiljastokutnog trokuta ABC. Simetrala šiljastog kuta kojeg čine pravci AH i CH siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama P i Q. Neka je M polovište stranice $\overline{AC}$. Simetrala kuta u vrhu B trokuta ABC siječe dužinu $\overline{HM}$ u točki R. Dokaži da točke P, B, Q i R leže na istoj kružnici.

Zadatak S-5.8. [45 bodova]

Dani su prirodni brojevi $m, n > 1$. Dokaži da postoji samo konačno mnogo uređenih parova prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$(x+1)^n + (x+2)^n + \cdots + (x+m)^n = (y+1)^{2n} + (y+2)^{2n} + \cdots + (y+m)^{2n}.$$